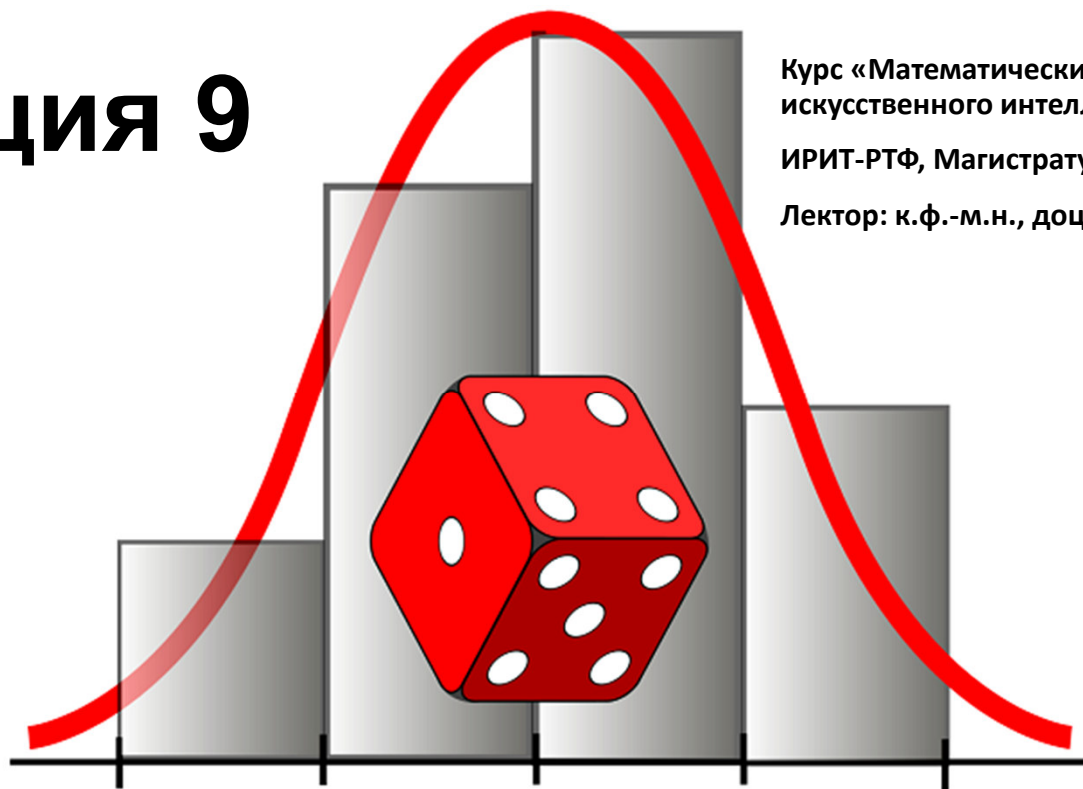


Лекция 9

Курс «Математические основы
искусственного интеллекта»

ИРИТ-РТФ, Магистратура (СпецВО)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.



Математические основы искусственного интеллекта Теория вероятностей

Лекция 9

Непрерывные случайные величины

1. Определение непрерывной случайной величины (НСВ) и ее свойства.
2. Плотность НСВ и ее свойства.
3. Числовые характеристики НСВ и их свойства.

Определение непрерывной случайной величины

Опр. Пусть X — произвольная случайная величина. Так же, как и для дискретной случайной величины (ДСВ) можно ввести **функцию распределения вероятностей**

$$F(x) = P(X < x), x \in \mathbb{R}$$

Опр. Если функция $F(x)$ непрерывна, то случайную величину X называют **непрерывной случайной величиной (НСВ)**.

Свойства функции распределения

При доказательстве свойств функции распределения для ДВС X нигде не использовалось то, что СВ X является дискретной, поэтому эти свойства справедливы для произвольной СВ.

Кроме того, справедливы свойства, характерные только для НСВ.

Свойства функции распределения

Теорема 1 (свойства функции распределения произвольной СВ).

Пусть X — произвольная СВ и $F(x)$ — ее функция распределения. Тогда

$$(1) 0 \leq F(x) \leq 1, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$$

$$(2) F(x) \uparrow, \text{ т.е. } x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$(3) P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$$

$$(4) F(x - 0) = F(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}, \text{ т.е.}$$

функция $F(x)$ непрерывна слева в точке x ,

$$(5) F(x + 0) - F(x) = P(X = x)$$

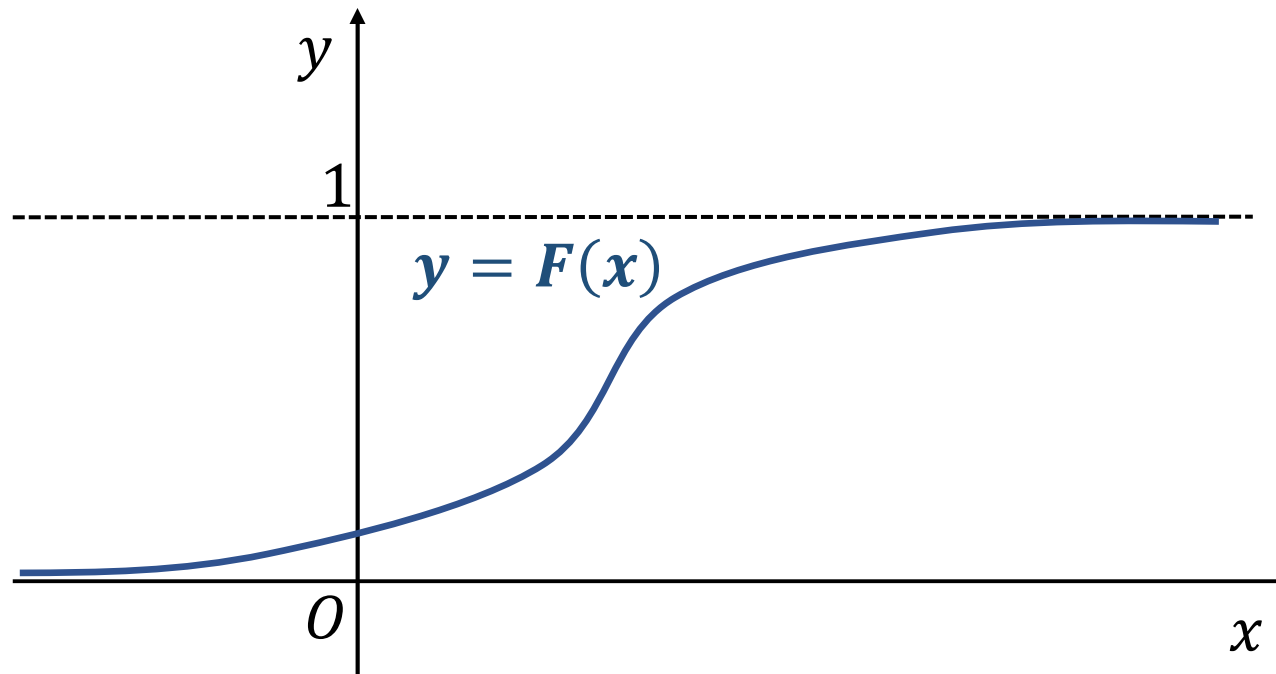
Свойства функции распределения НСВ

Теорема 2 (свойства функции распределения НСВ). Пусть X – НСВ и $F(X)$ – ее функция распределения. Тогда

$$(1) P(X = x) = 0 \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

$$(2) P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = \\ = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \\ = F(b) - F(a)$$

Функция распределения НСВ (геометрическая интерпретация)



Свойства функции распределения НСВ

Доказательство.

(1) $P(X = x) = F(x + 0) - F(x)$ по (5) теоремы 1.

Поскольку $F(x)$ — непрерывна, $F(x - 0) = F(x + 0) = F(x)$, поэтому $P(X = x) = 0$.

(2) $P(a \leq X < b) = P(X = a \text{ or } a < X < b) =$
 $= P(X = a) + P(a < X < b) =$
 $= \text{по (1) теоремы 1} =$

$= 0 + P(a < X < b) = P(a < X < b)$

и $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ по (2) теоремы 1

Плотность распределения вероятностей

Определение

Опр. Если функция распределения $F(x)$ случайной величины X не только непрерывна, но и дифференцируема, то ее производная $f(x) = F'(x)$ называется **плотностью распределения вероятностей** НСВ X .

Везде ниже мы будем предполагать, что функция распределения $F(x)$ дифференцируема за исключением разве ли лишь конечного числа точек.

Свойства плотности распределения

Теорема 3 (свойства плотности распределения)

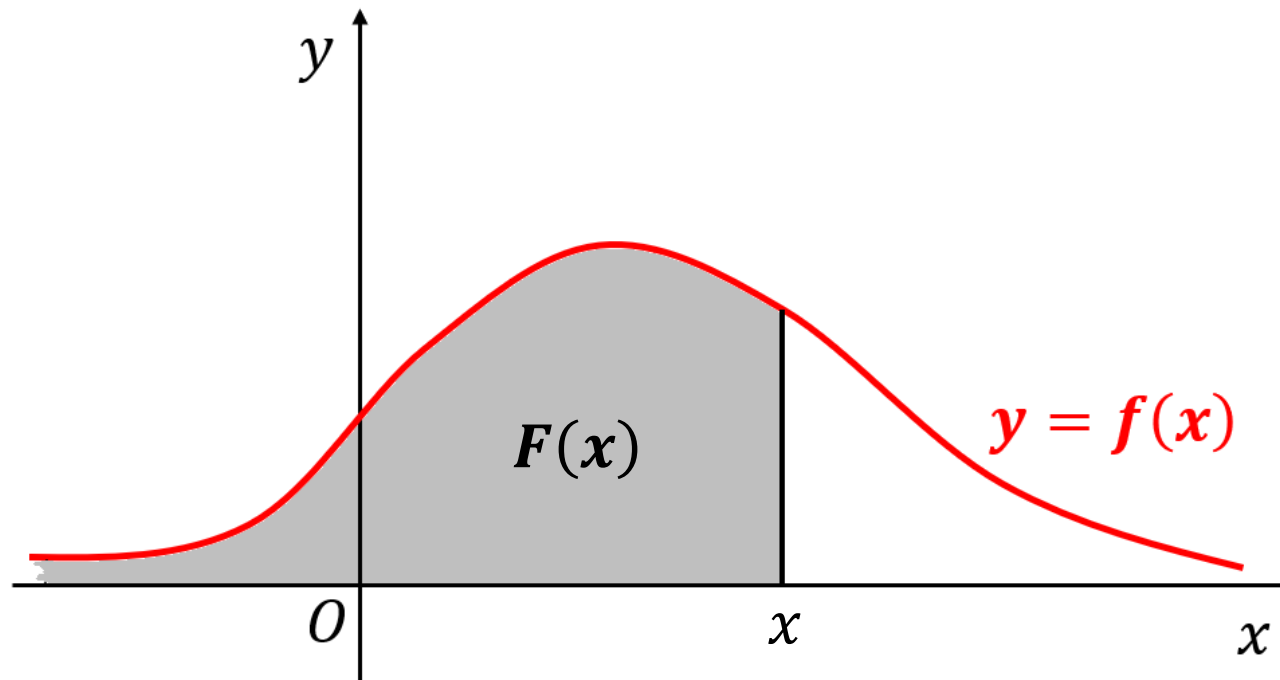
(1) $f(x) \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ (условие неотрицательности)

$$(2) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt ;$$

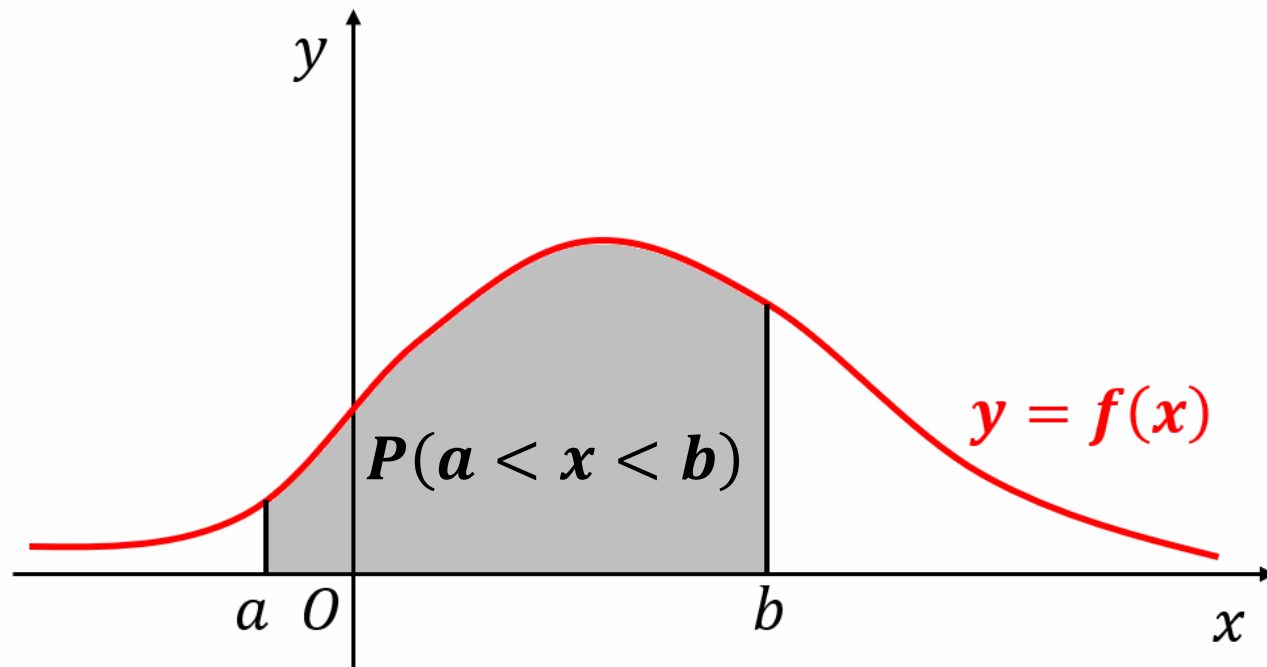
$$(3) P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = \\ = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b) = \\ = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) ;$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ (свойство нормированности)}$$

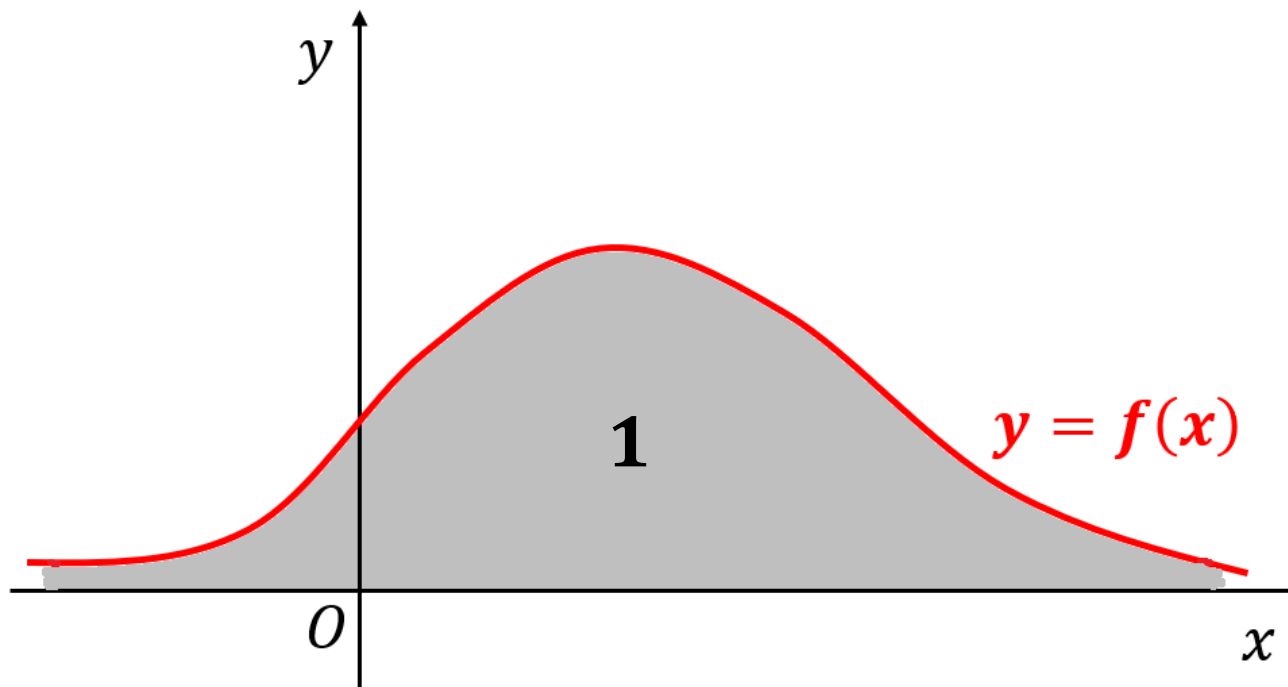
Свойства плотности распределения (геометрическая иллюстрация)



Свойства плотности распределения (геометрическая иллюстрация)



Свойства плотности распределения (геометрическая иллюстрация)



Свойства плотности распределения

Доказательство

(1) $F(x) \uparrow$ по (2) теоремы 1 $\Rightarrow f(x) = F'(x) \geq 0$
для любого $x \in \mathbb{R}$;

(2) $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ — интеграл с переменным
верхним пределом $\Rightarrow G'(x) = f(x)$,
т. е. $G(x)$ — первообразная для $f(x) \Rightarrow$

$$F(x) = G(x) + C \Rightarrow F(-\infty) = G(-\infty) + C \Rightarrow$$

$$[\text{по (1) теор. 1}] 0 = G(-\infty) + C \Rightarrow C = -G(-\infty)$$

Свойства плотности распределения Доказательство (продолжение)

$$\Rightarrow F(x) = G(x) - G(-\infty) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{-\infty} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_{-\infty}^a f(t)dt = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

(3) По (1) теоремы 1 и формуле Ньютона-Лейбн.

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Остальные равенства следуют из (2) теоремы 2.

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

по (1) теоремы 1. ■

Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание

Аналогично, как и для ДСВ, можно ввести те же числовые характеристики для НСВ.

Опр. **Математическим ожиданием НСВ (м.о.)** X с плотностью распределения $f(x)$ называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Числовые характеристики НСВ

Дисперсия. Среднее квадратичное отклонение

Опр. **Дисперсией** ДСВ X , называется число

$$D(X) = M \left((X - M(X))^2 \right)$$

Опр. **Среднем квадратичным отклонением** ДСВ X называется число

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

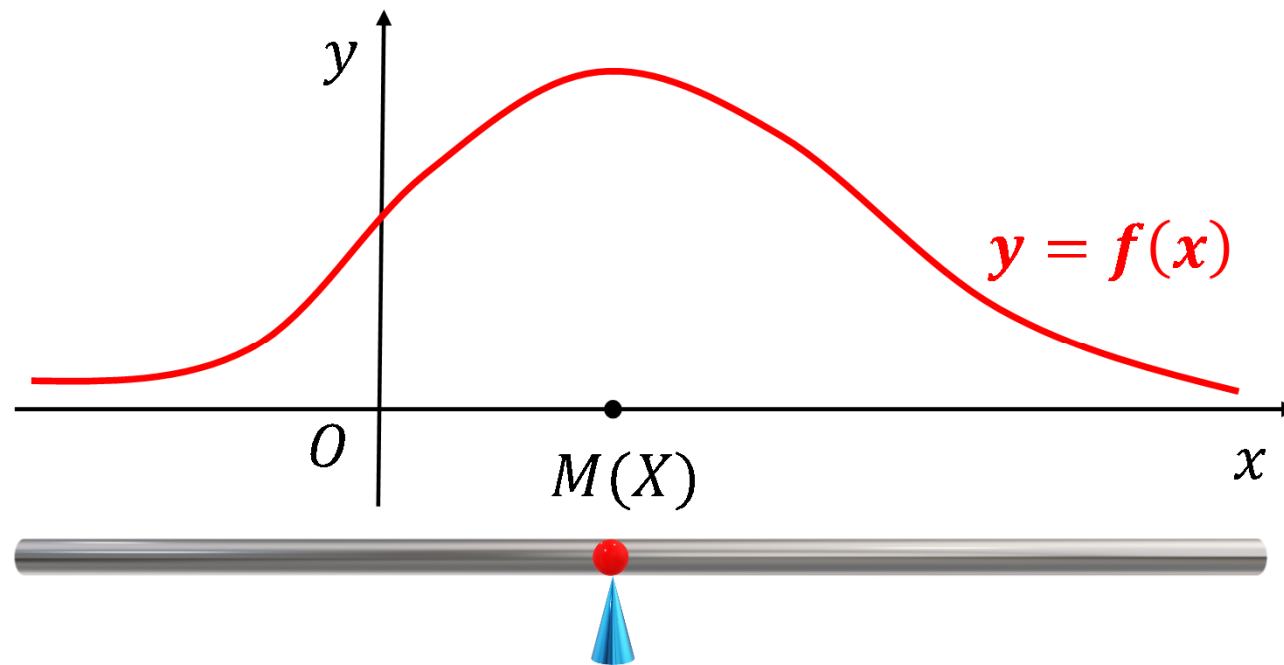
Числовые характеристики НСВ

Также, аналогично, математическое ожидание — это среднее значение НСВ X с учетом плотности распределения вероятностей, а дисперсия и среднее квадратичное отклонение НСВ X с — это мера **рассеяния** относительно математического ожидания.

В отличии от ДСВ матем. ожидание, а значит и дисперсия и среднее квадратич. отклонение НСВ существует не всегда (почему?)

Числовые характеристики НСВ (механическая интерпретация)

Математическое ожидание НСВ X - это центр масс бесконечного стержня с линейной плотностью $f(x)$.



Свойства числовых характеристик НСВ

Числовые характеристики НСВ обладают теми же свойствами, что ДСВ.

Перечислим их без доказательства.

При этом, аналогично, НСВ X, Y называются **независимыми**, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Свойства математического ожидания НСВ

Теорема 4 (свойства матем. ожидания).

(1) Для любых НСВ величин X, Y

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

(2) Для независимых НСВ X, Y

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

(3) Для любой НСВ X и константы $c \in \mathbb{R}$

$$M(cX) = cM(X), M(c) = c$$

Свойства дисперсии НСВ

Теорема 5 (свойства дисперсии).

(1) Для любой НСВ X

$$D(X) \geq 0 \text{ и } D(X) = 0 \Leftrightarrow X = c$$

(2) Для независимых НСВ X, Y

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

(3) Для любой НСВ X и константы $c \in \mathbb{R}$

$$D(cX) = c^2 D(X), D(c) = 0$$

Свойства дисперсии НСВ

(4) Для любой НСВ X

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - (M(X))^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

Свойства средн. квадратич. Отклонения НСВ

Теорема 6 (свойства средн. квадр. отклон.).

(1) Для любой ДСВ X

$$\sigma(X) \geq 0 \text{ и } \sigma(X) = 0 \Leftrightarrow X = c$$

(2) Для любой ДСВ X и константы $c \in \mathbb{R}$

$$\sigma(cX) = c\sigma(X), \sigma(c) = 0$$

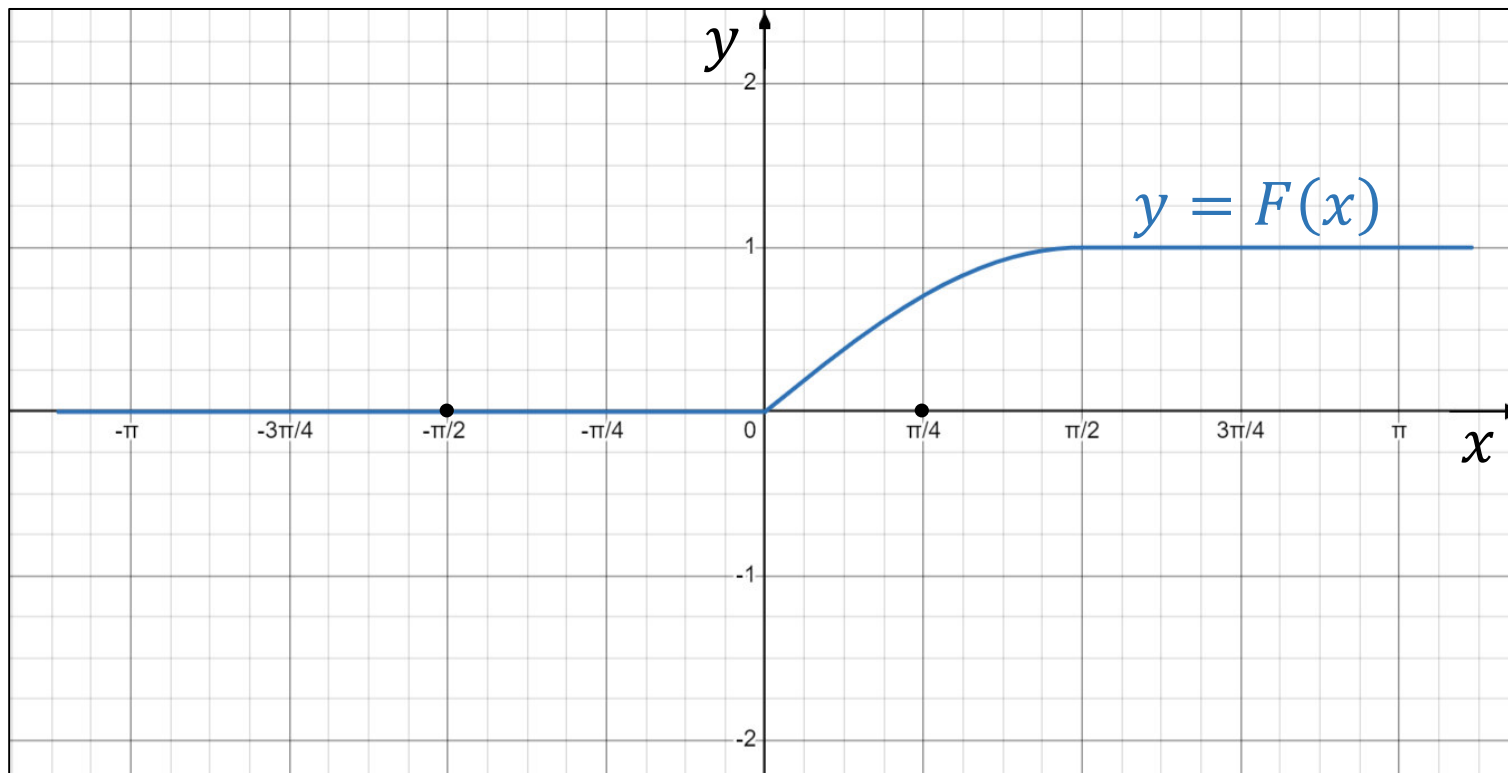
Свойства функции распределения и плотности вероятностей. Задача 1

Задача 1. Дана функция распределения $F(x)$ некоторой НСВ X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти $P\left(-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{4}\right)$, плотность распределения $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 1. График $y = F(x)$

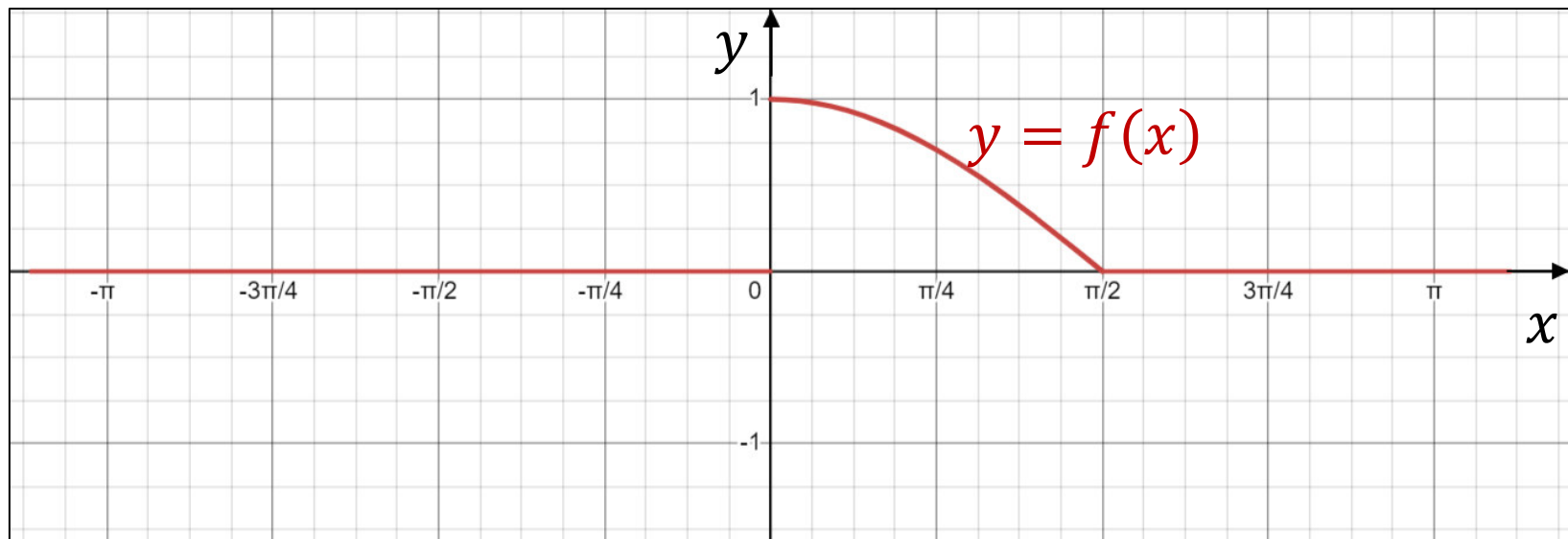


Задача 1. Решение

Решение. По определению плотности распределения

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Задача 1. График $y = f(x)$



Задача 1. Решение (продолжение)

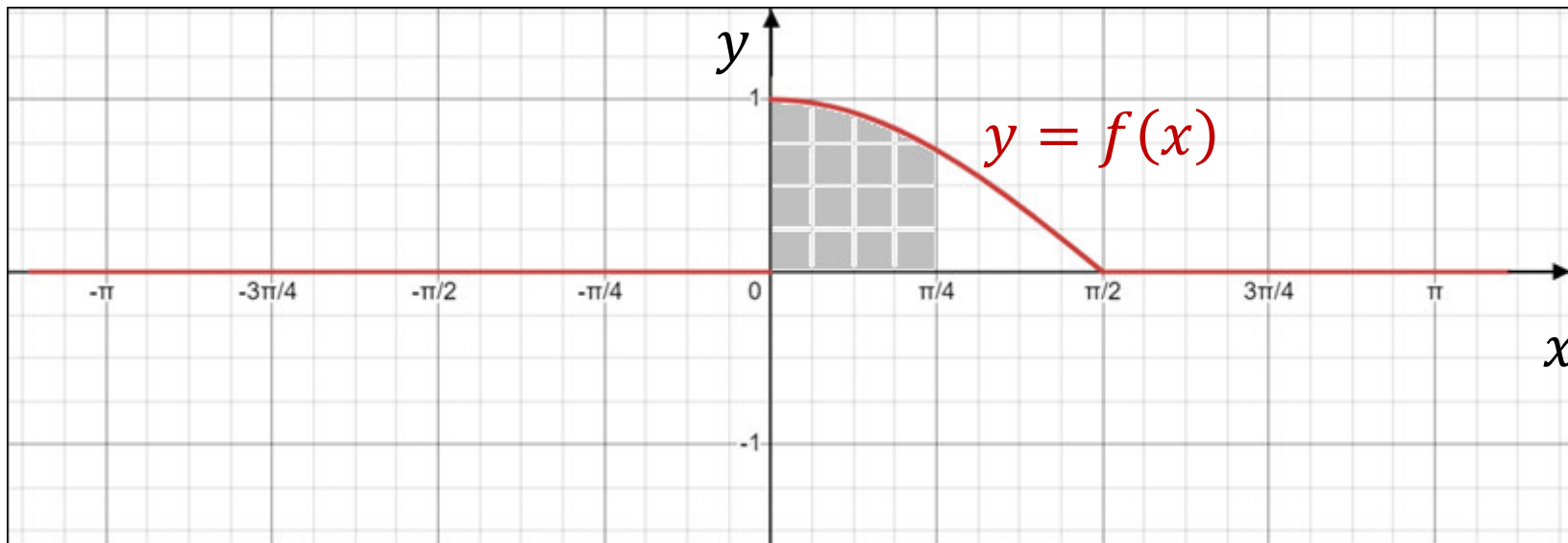
По (3) теоремы 2

$$\begin{aligned} \text{(I сп). } P\left(-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{4}\right) &= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sin\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.8 \end{aligned}$$

Задача 1. Решение (окончание)

$$\begin{aligned} \text{(II сп). } P\left(-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{4}\right) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \\ &= \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 1. График $y = f(x)$



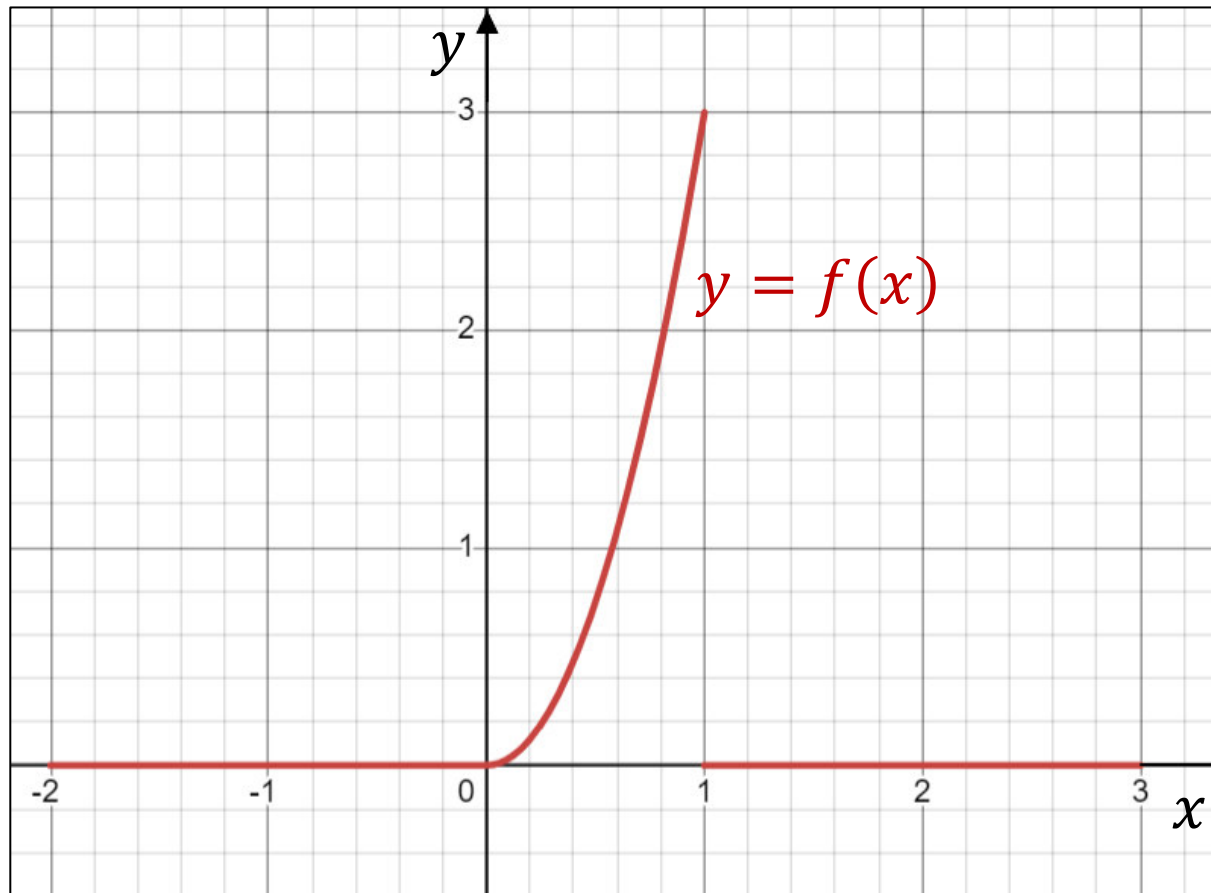
Свойства функции распределения и плотности вероятностей. Задача 2

Задача 2. Дана функция $f(x)$ плотности распределения некоторой НСВ X :

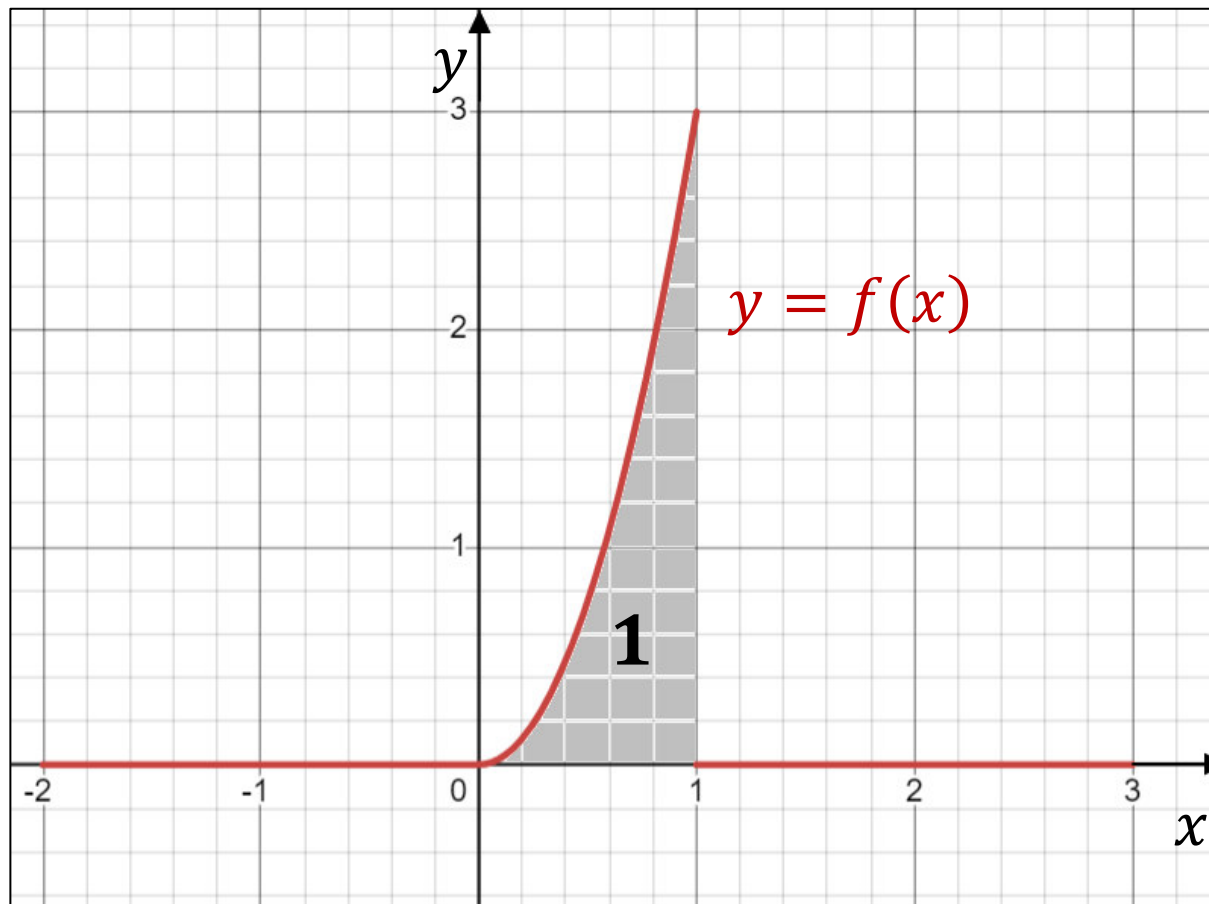
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ ax^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найти константу a и функцию распределения $F(x)$.

Задача 2. График $y = f(x)$



Задача 2. Свойство нормальности



Задача 2. Решение

По (4) теоремы 3

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 1 \Rightarrow \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 ax^2 dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = \\ &= a \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = a \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \end{aligned}$$

Задача 2. Решение (продолжение)

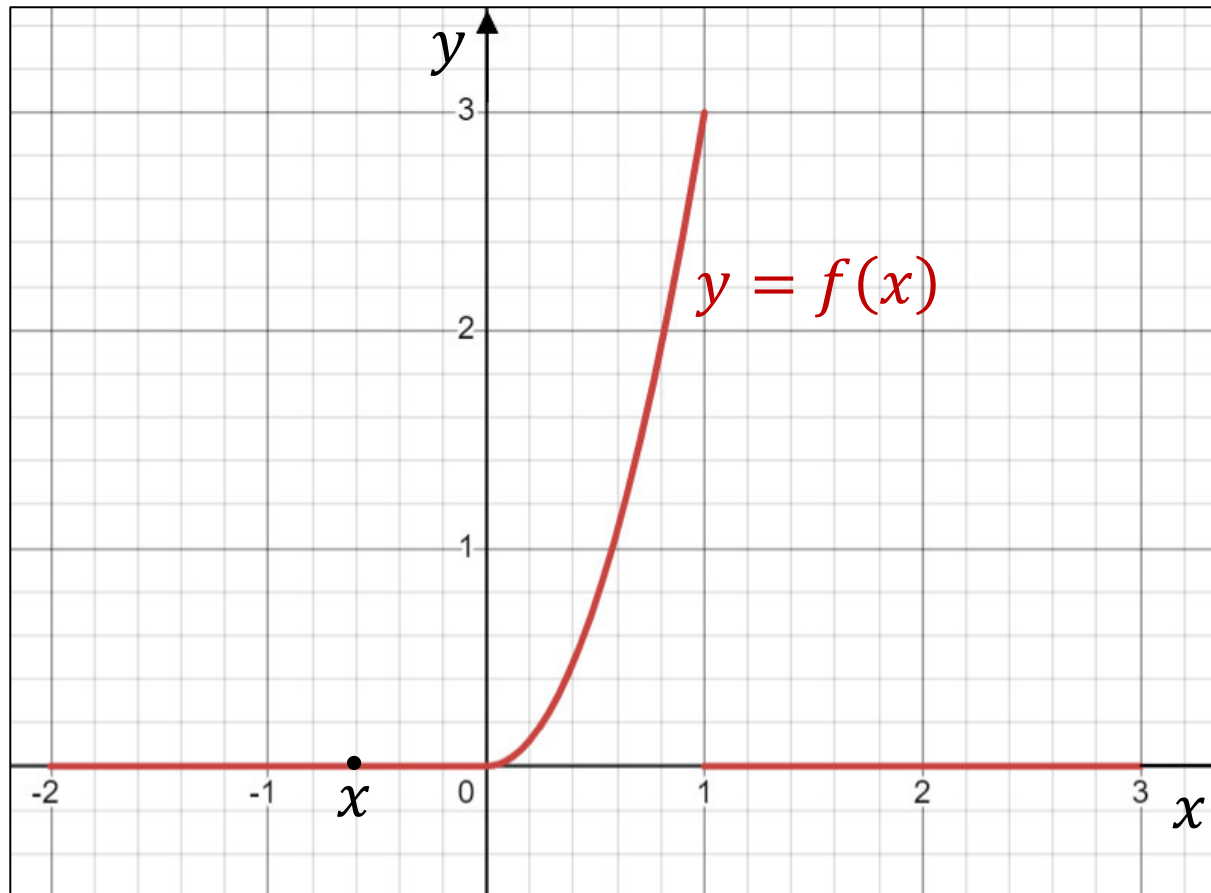
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 3x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найдем $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$

(1) Пусть $x \leq 0$.

Тогда $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x 0dx = 0$.

Задача 2. Вычисление функции $y = F(x)$ по $y = f(x)$

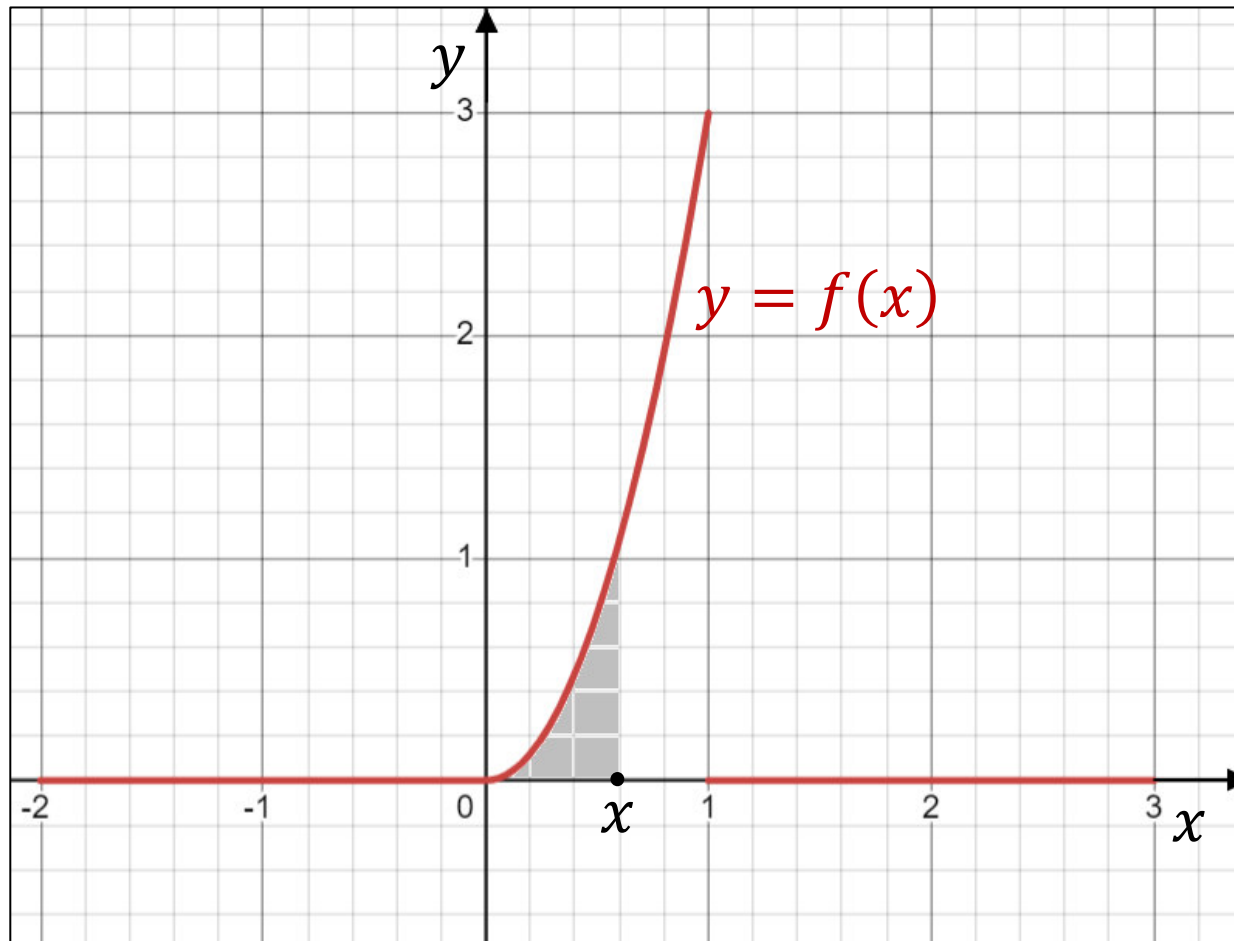


Задача 2. Решение (продолжение)

(2) Пусть $0 < x \leq 1$.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x 3x^2dx = 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^x = x^3 \Big|_0^x = x^3\end{aligned}$$

Задача 2. Вычисление функции $y = F(x)$ по $y = f(x)$

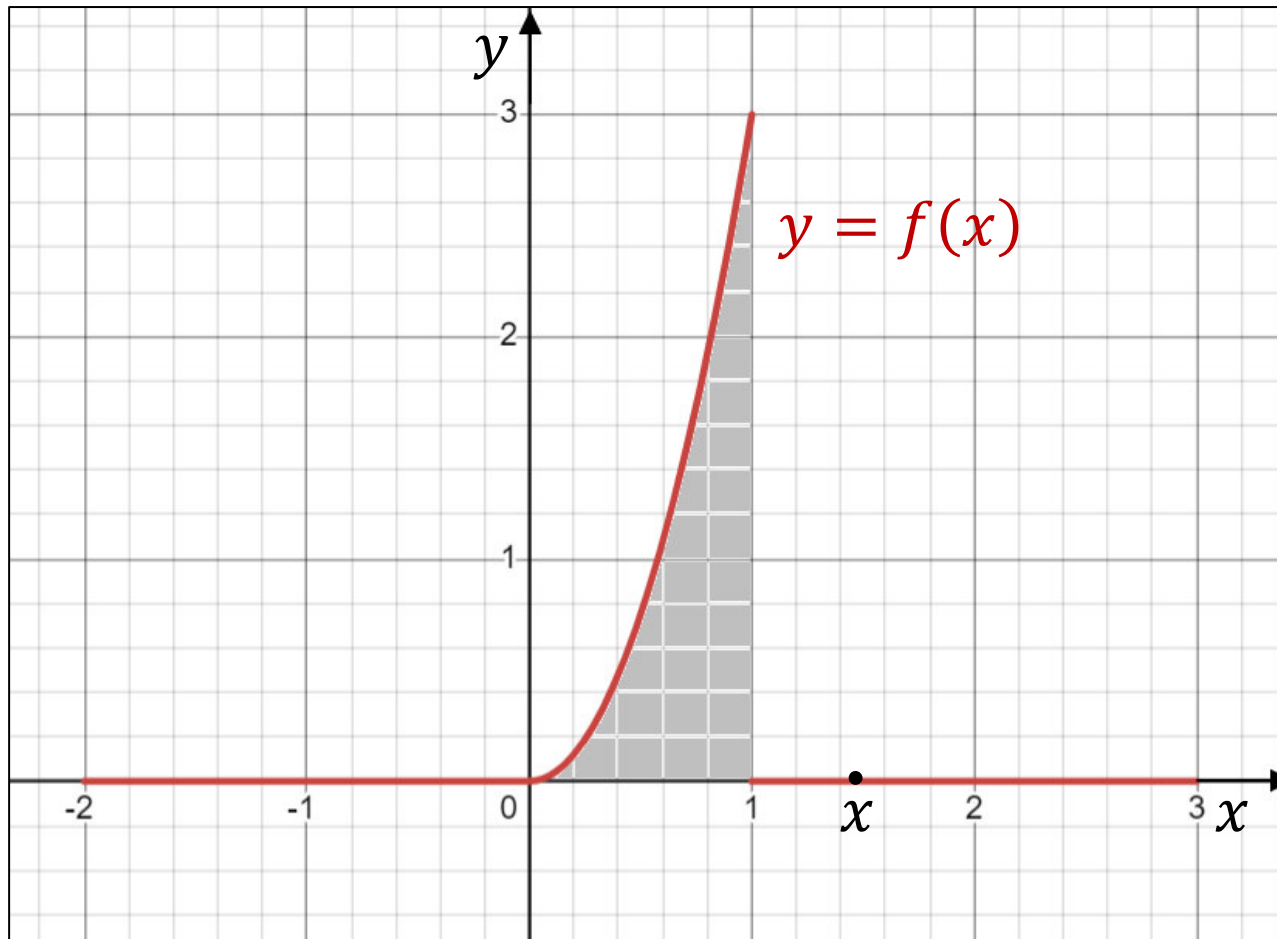


Задача 2. Решение (продолжение)

(3) Пусть $x > 1$.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x)dx = \\&= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^x f(x)dx = \\&= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 3x^2dx + \int_1^x 0dx = \\&= \int_0^1 3x^2dx = x^3 \Big|_0^1 = 1\end{aligned}$$

Задача 2. Вычисление функции $y = F(x)$ по $y = f(x)$

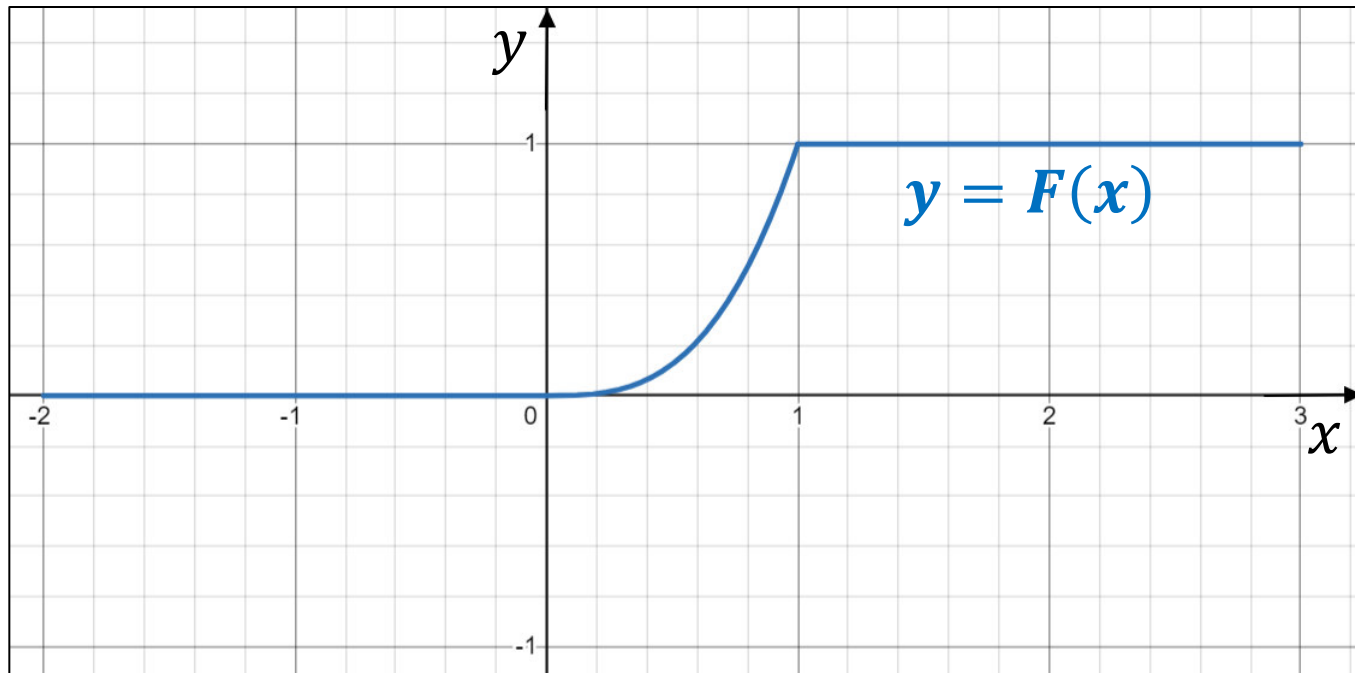


Задача 2. Окончание

Значит,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Задача 2. График $y = f(x)$



Свойства функции распределения и плотности вероятностей. Упр. 2

Упр.2. [Шапарь Ю.В. СЗ по ТВ] Дана функция $F(x)$ распределения некоторой НСВ X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ ax + b & \text{при } -1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти константы a и b , плотность распределения $f(x)$, вероятность $P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Изобразить графики $y = f(x)$, $y = F(x)$.

Ответ: $a = b = \frac{1}{3}$

Свойства функции распределения и плотности вероятностей. Упр. 3

Упр.3. [Гмурман В.Е. СЗ по ТВ] Дана функция $f(x)$ плотности распределения некоторой НСВ X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ C e^{-x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Найти константу C , функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
Изобразить графики $y = f(x)$, $y = F(x)$.

Ответ: $C = 1$