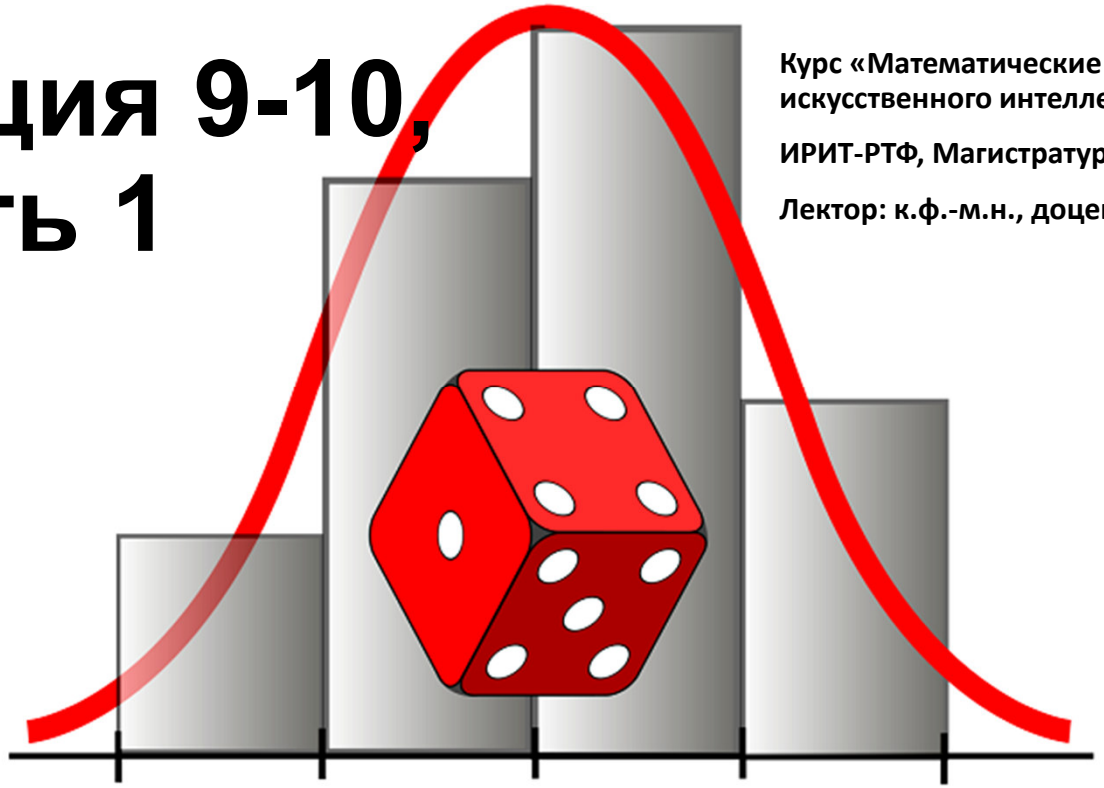
Лекция 9-10, часть 1



Курс «Математические основы искусственного интеллекта»

ИРИТ-РТФ, Магистратура (СпецВО)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.

Математические основы искусственного интеллекта

Теория вероятностей

Лекция 10, часть 1

Непрерывные случайные величины

1. Равномерное распределение.
2. Неравенство Чебышёва.
3. Нормальное распределение.

Понятие равномерного распределения
Задача 3

Задача 3. Пусть трамваи по некоторому маршруту в данное время ходят с интервалом 10 минут. Человек приходит в некоторый момент времени на остановку и видит, что трамвая нет. Найти функцию распределения $F(x)$ и плотность распределения $f(x)$ случайной величины X – времени ожидания трамвая. Найти среднее время ожидания трамвая и вероятность того, что время ожидания трамвая будет более 5 минут.



Задача 3. Решение

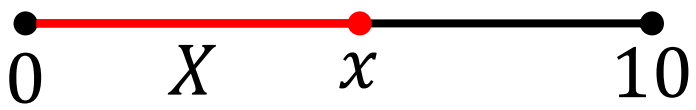
Решение. Найдем функцию распределения $F(x) = P(X < x)$.

Если $x \leq 0$, то, очевидно, $F(x) = 0$.

Если $x > 10$, то, $F(x) = 1$.

Если $0 < x \leq 10$, то, по опр. геометрической вероятности

$$F(x) = \frac{\text{длина отрезка } [0;x]}{\text{длина отрезка } [0;10]} = \frac{x}{10} \Rightarrow$$



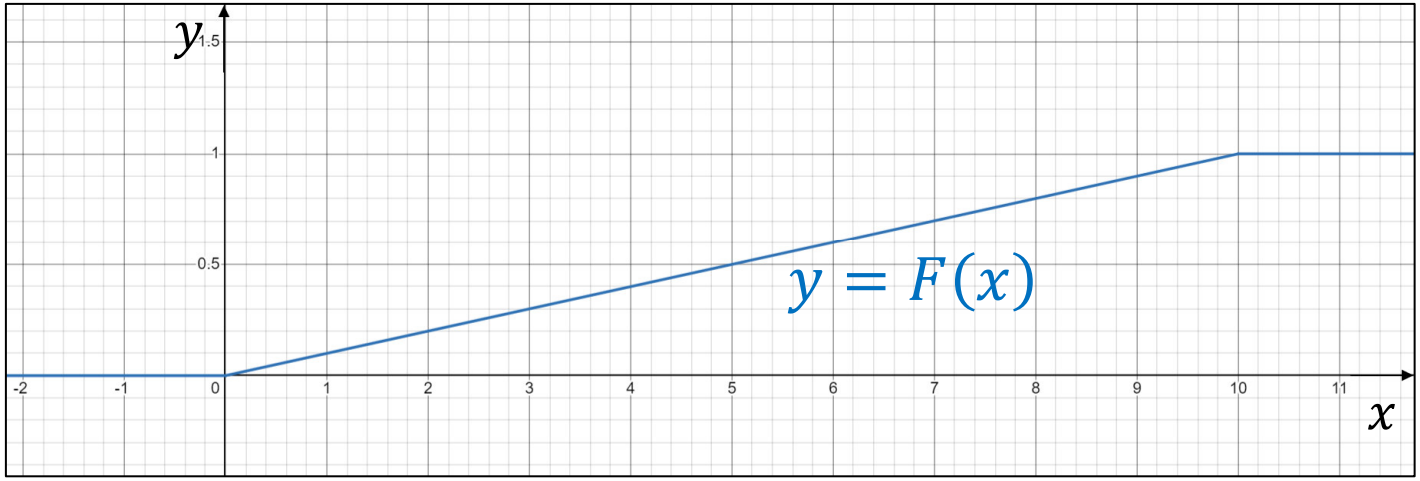
Задача 3. Решение (продолжение)

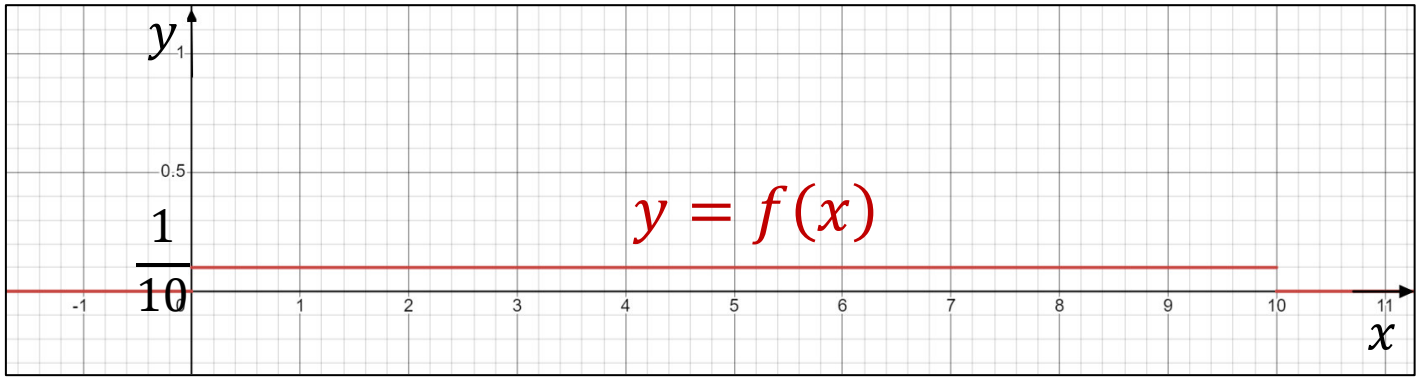
$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{10} \text{ при } 0 < x \leq 10, \\ 1 \text{ при } x > 10, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{10} \text{ при } 0 < x \leq 10, \\ 0 \text{ при } x > 10 \end{cases}$$

Такое распределение называется равномерным.

Задача 3. Решение (иллюстрация)





Задача 3. Решение (продолжение)

Тогда искомая вероятность равна

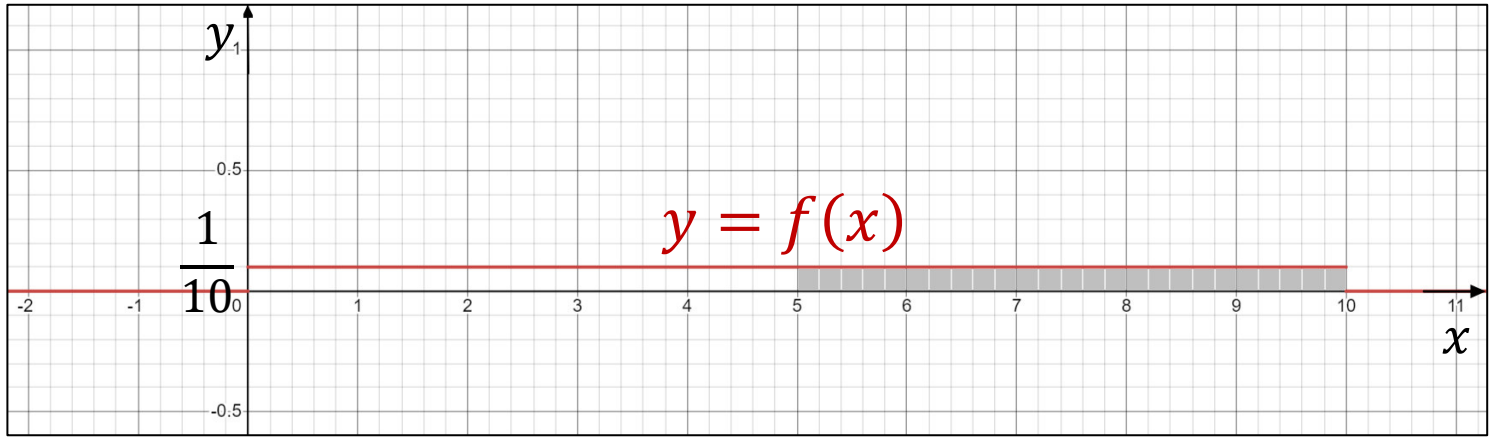
$$P(X > 5) = P(5 < X < +\infty) =$$

$$(I \text{ сп.}) = F(+\infty) - F(5) = 1 - \frac{5}{10} = 0.5$$

$$(II \text{сп.}) = \int_5^{+\infty} f(x)dx = \int_5^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{x}{10}\Big|_5^{10} =$$

$$= \frac{10}{10} - \frac{5}{10} = 0.5$$

Задача 3. Решение (иллюстрация)



Задача 3. Решение (продолжение)

Среднее значение - это матем. ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{10} xf(x)dx + \int_{10}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{10} x\frac{1}{10}dx + \int_{10}^{+\infty} 0dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{10}\int_{0}^{10} xdx + 0 =$$

Задача 2. Решение (продолжение)

$$= \frac{1}{10}\int_0^{10} x dx = \frac{1}{10}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10} = 5$$

Найдем $D(X)$ по (4) теоремы 5.

Для этого найдем

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x) dx +$$

$$+ \int_0^{10} x^2 f(x) dx + \int_{10}^{+\infty} x^2 f(x) dx =$$

Решение (окончание)

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{10} x^2 \frac{1}{10} dx + \int_{10}^{+\infty} 0 =$$

$$= \int_{0}^{10} x^2 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \frac{x^3}{3} \Big|_{0}^{10} = \frac{100}{3} \Rightarrow$$

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.89$$

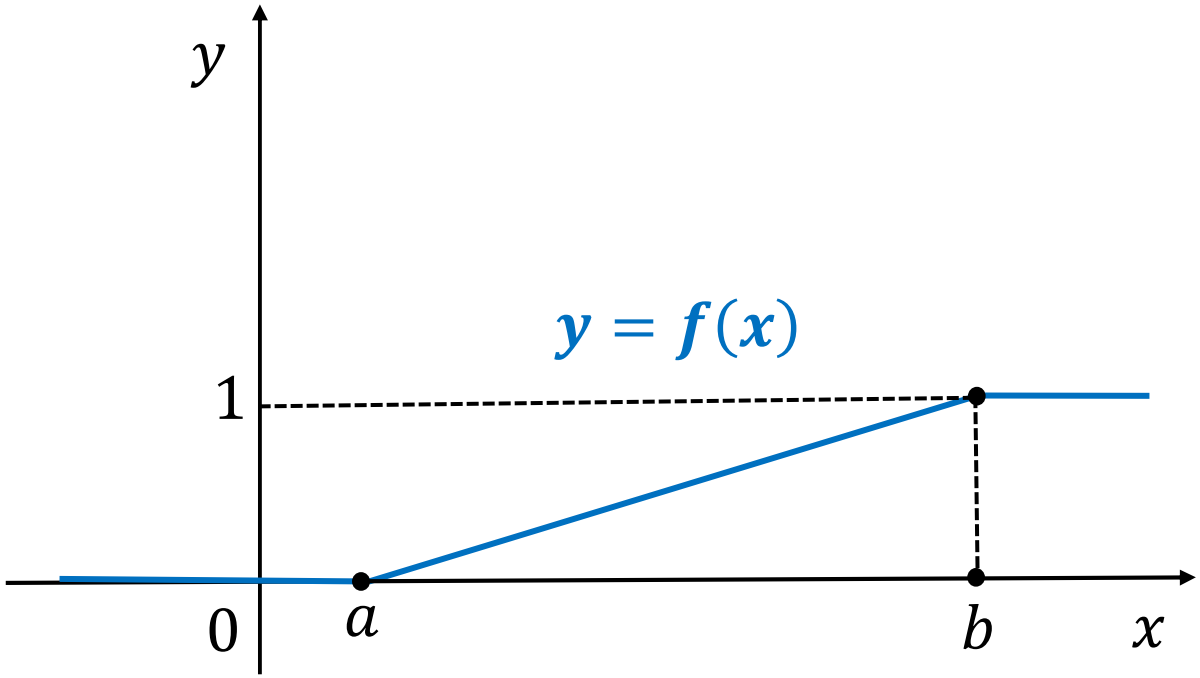
Равномерное распределение НСВ в общем случае

В общем случае равномерное распределение на отрезке $[a; b]$ непрерывной СВ X задается следующей функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x \leq b, \\ 1 \text{ при } x > b, \end{cases}$$

где $a < b$.

Равномерное распределение НСВ в общем случае. График $y = F(x)$



Равномерное распределение НСВ в общем случае

Тогда, очевидно,

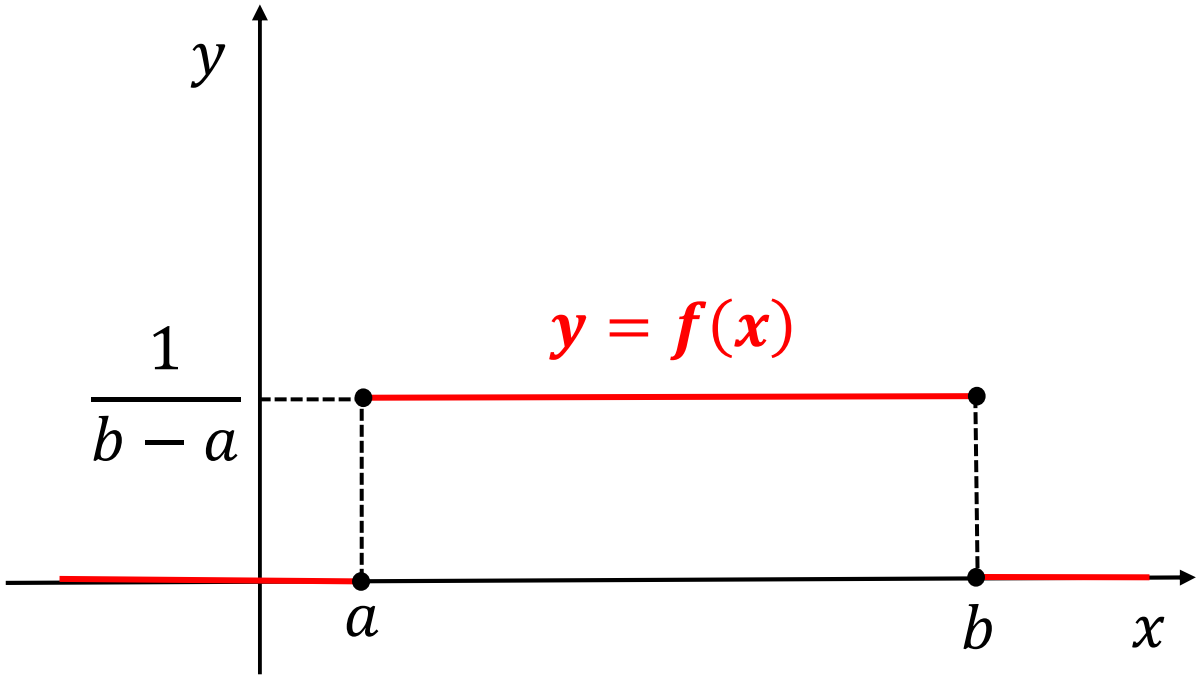
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a < x < b, \\ 0 \text{ при } x > b, \end{cases}$$

Упр. Доказать, что

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \qquad M(X^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Равномерное распределение НСВ в общем случае. График $y = f(x)$



Равномерное распределение. Упр. 4

Упр.4. Школьник меряет длину учебника при помощи линейки, округляя до ближайшего целого. Какова вероятность, что точность его измерений меньше или равна 0,1 см.

Указание: Использовать равномерно распределенную на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ случайную величину X – точность (абсолютную погрешность) его измерений.

Ответ: 0,2



Свойства моментов. Неравенство Чебышёва

Теорема **Неравенство Чебышёва**. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$\mathrm{P}(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Свойства моментов. Неравенство Чебышёва

Док-во. Пусть $X_1 \geq 0$, тогда $M(X_1) =$

$$= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} xf(x)\,dx \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)d = \varepsilon P(X$$

$$> \varepsilon) \Rightarrow \varepsilon P(X > \varepsilon) \leq \frac{M(X_1)}{\varepsilon} =$$

$$= \int_0^{+\infty} xf(x) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x) \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x) = \varepsilon P(X$$

$$> \varepsilon) \Rightarrow \varepsilon P(X > \varepsilon) \leq \frac{M(X_1)}{\varepsilon}$$ (неравенство Маркова)

Свойства моментов. Неравенство Чебышёва

Обозначим через $X_1 = \left(X - M(X)\right)^2$. Тогда

$$\mathrm{P}(X_1 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}(|X_1| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}(X_1 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \blacksquare$$

Свойства моментов. Неравенство Чебышёва

Следовательно, если у сл.в. X (произвольной!) существуют моменты второго порядка, то *почти все её значения* сосредоточены на отрезке

$$[M(X) - 3\sigma, M(X) + 3\sigma]:$$

$$\mathrm{P}(|X - M(X)| \geq 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9},$$

т.е.

$$\mathrm{P}(|X - M(X)| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} \approx 0.89.$$

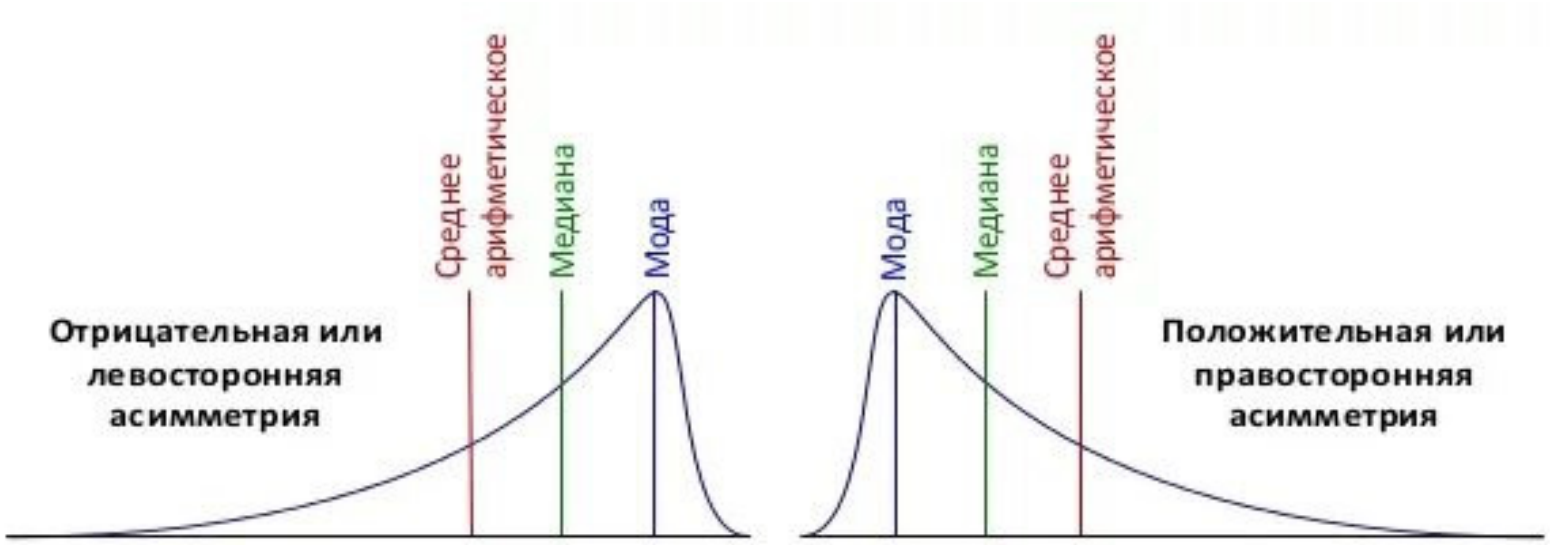
Основные средние

Мода НСВ: $Mod(X) = \arg\max f(x)$

Медианой $Med(X)$ НСВ X называется такое её значение, которое “делит” распределение по вероятности, т.е.

$$P\big(X < Med(X)\big) = P\big(X \geq Med(X)\big) = \frac{1}{2}$$

Основные средние. Иллюстрация



Нормальное распределение НСВ

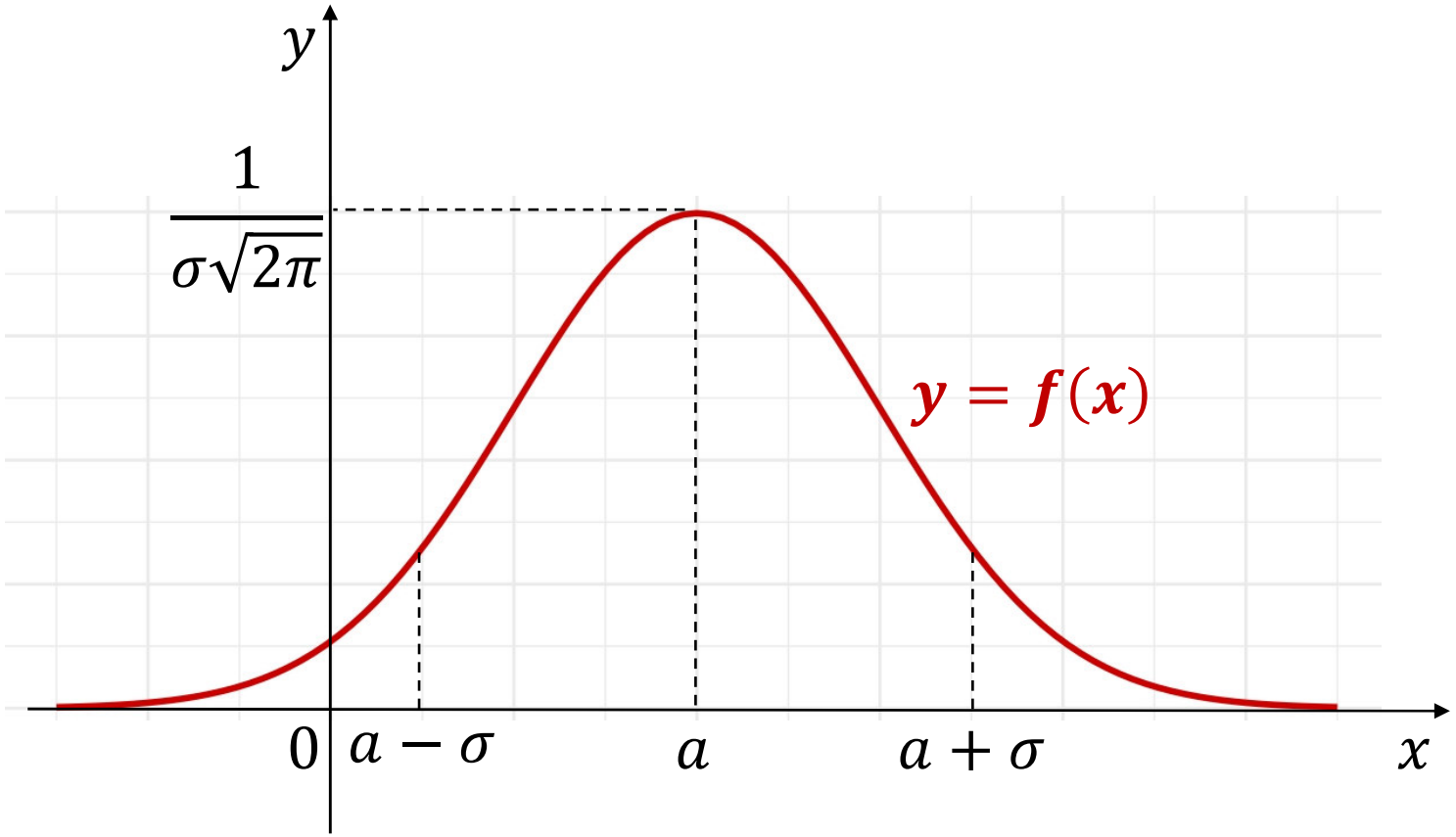
Самым распространенным в практических приложениях является нормальное распределение.

Опр. Нормальное распределение (распределение Гаусса) НСВ – это распределение с плотностью

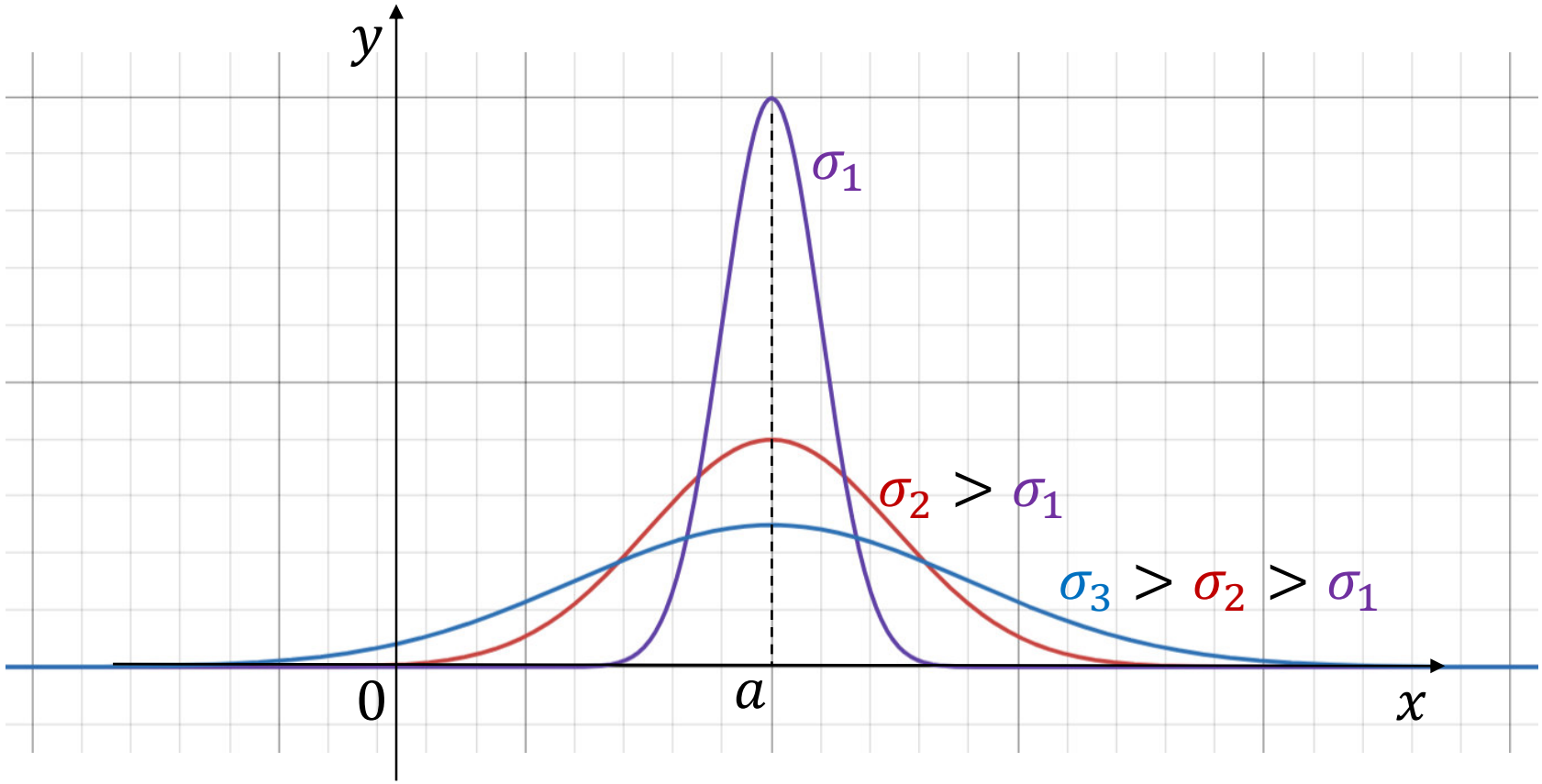
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

При этом заметим, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$

Нормальное распределение
График $y = f(x)$



Нормальное распределение
График $y = f(x)$ для разных сигм



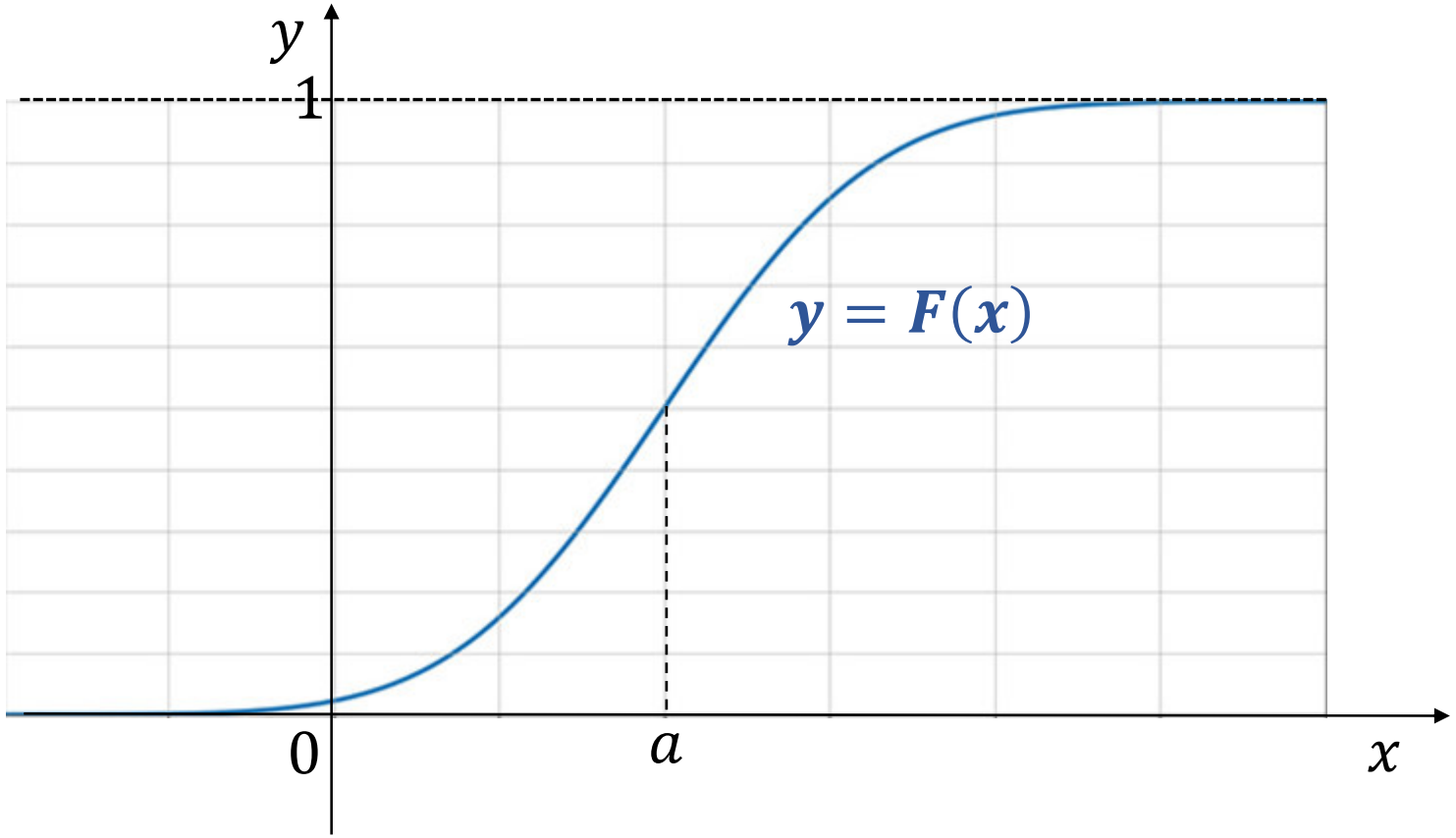
Нормальное распределение НСВ
Функция распределения

Функция распределения нормального распределения по (2) теоремы 3 (часть I лекции) тогда равна

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Обозначение для нормального распределения: $N(a, \sigma)$.

Нормальное распределение НСВ
График $y = F(x)$



Стандартное нормальное распределение

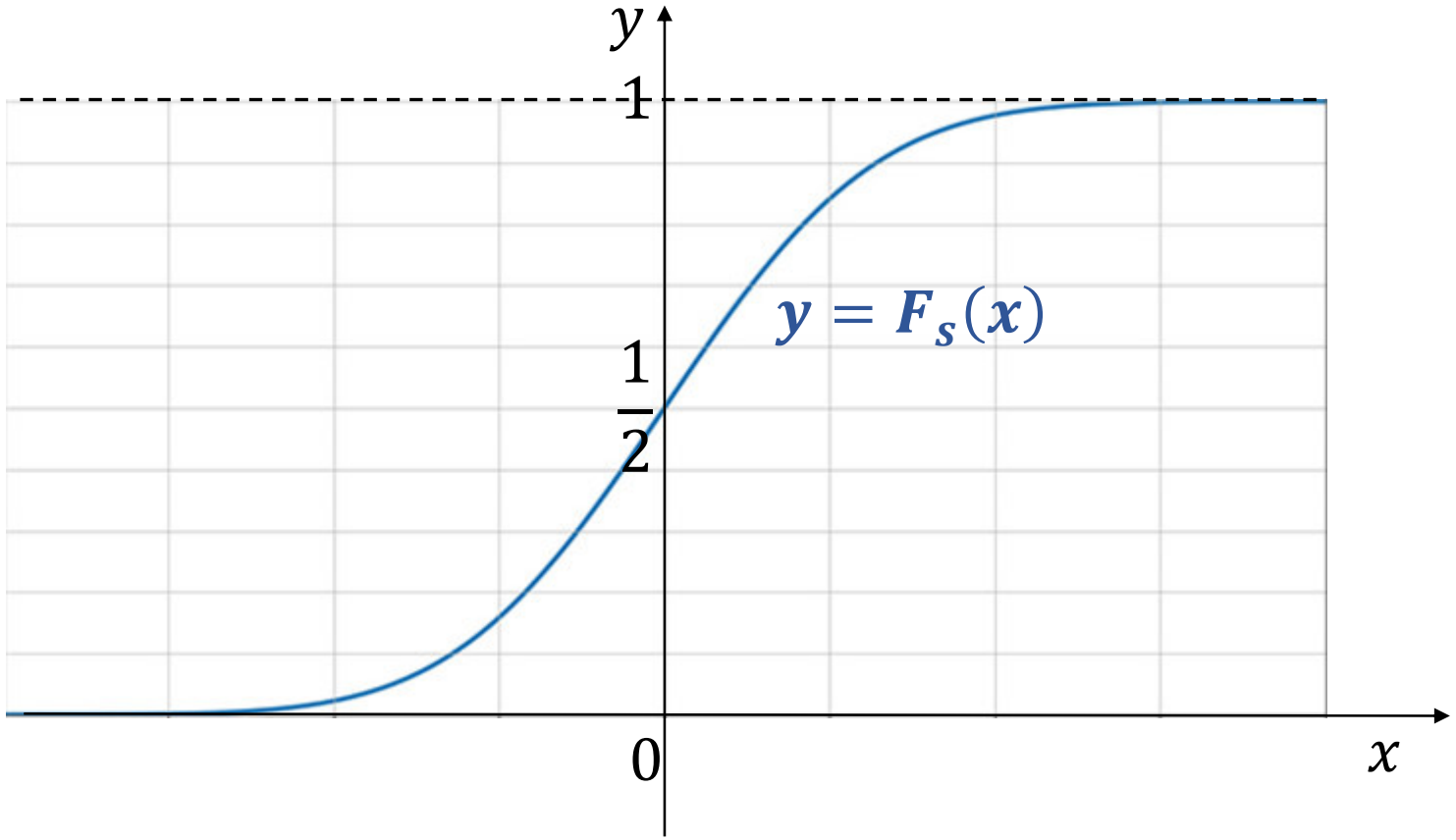
Опр. Если $a = 0, \sigma = 1$, то нормальное распределение называется стандартным.

Тогда функция плотности и функция распределения соответственно равны

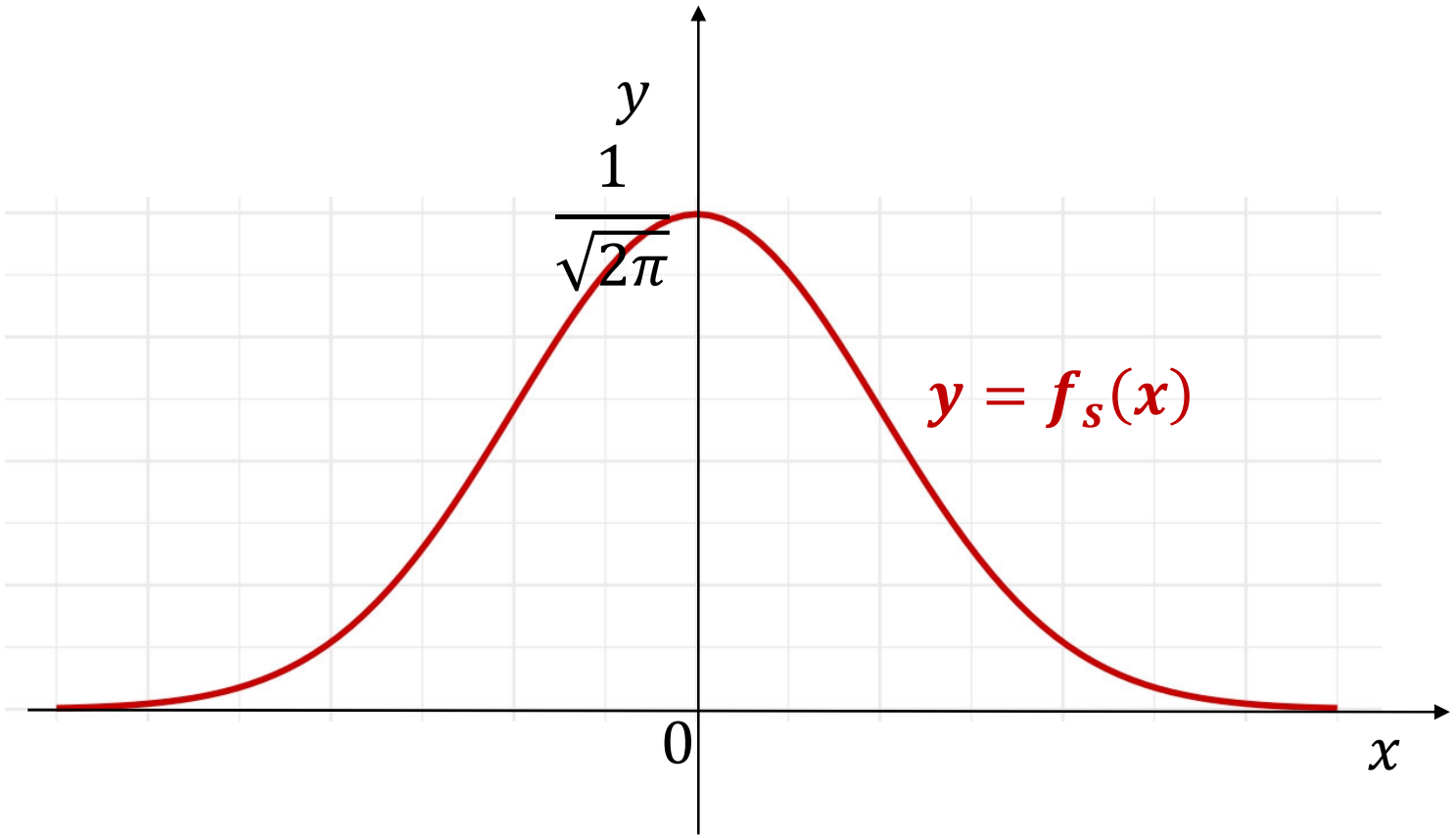
$$f_s(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Стандартное нормальное распределение
График $y = F_s(x)$



Стандартное нормальное распределение
График $y = f_s(x)$



Стандартное нормальное распределение

Из условия нормальности

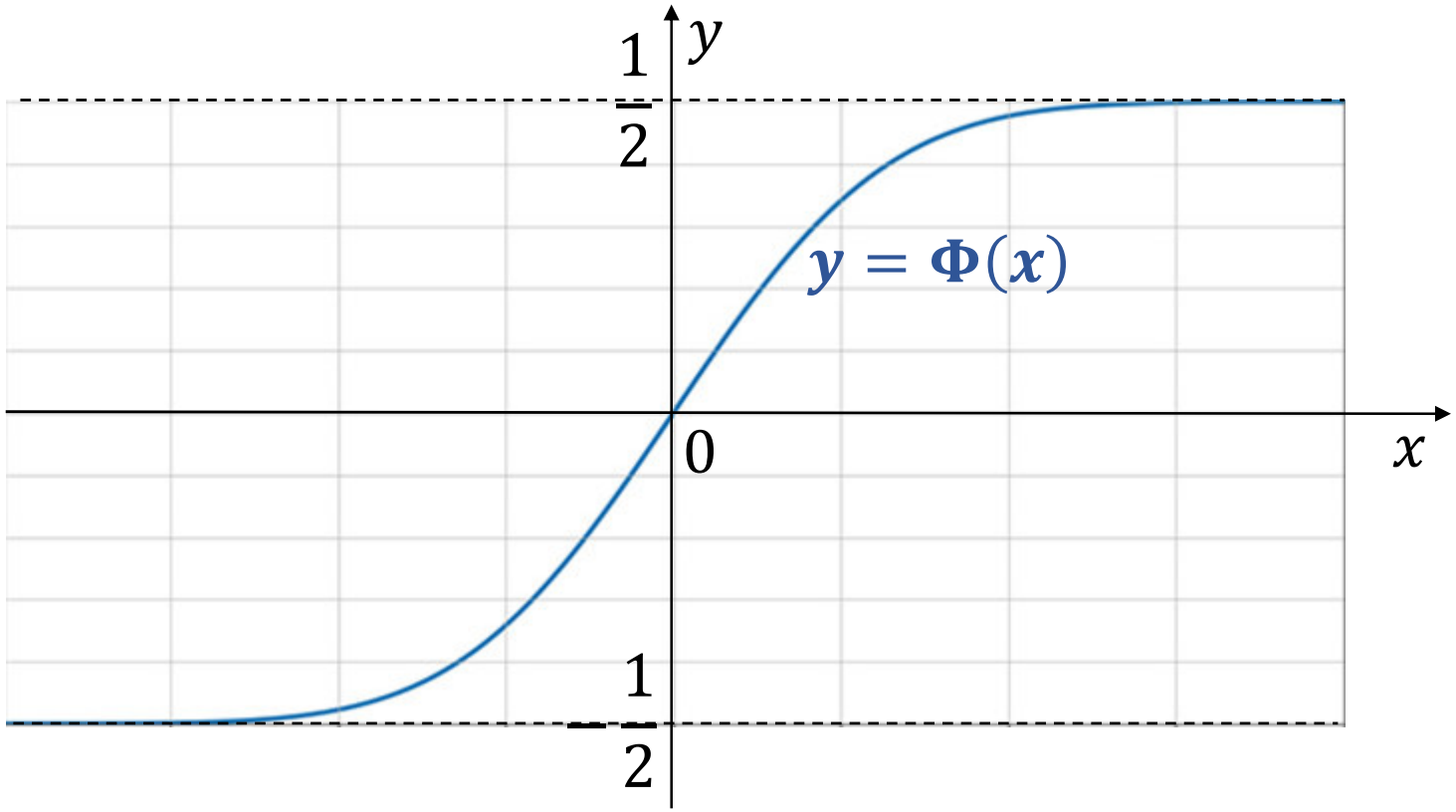
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F_s\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi(x), \text{ где } \Phi(x) - \text{функция Лапласа}$$

Стандартное нормальное распределение
График $y = \Phi(x)$



Теорема о числовых характеристиках нормального распределения

Теорема 6. Пусть НСВ X распределено нормально с параметрами a и σ.

Тогда $\boxed{M(X) = a, D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma}$

Док-во равенства $M(X) = a$ для простоты проведем для $N(0;1)$. Остальные - без док-ва.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{нечетная функция}\,dx = 0 = a$$

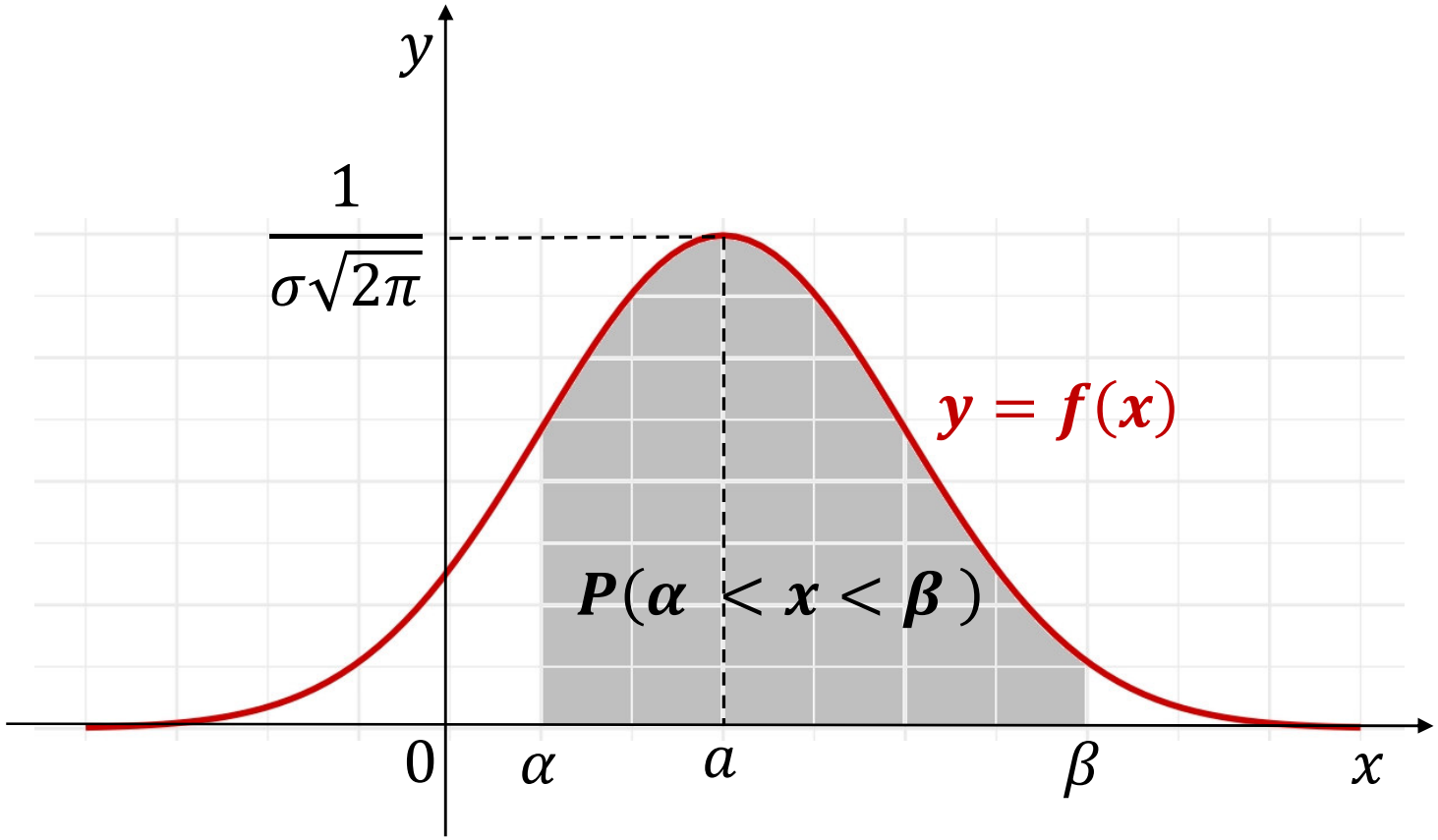
Нормальное распределение. Теорема о вычисление вероятности

Теорема 7. Пусть НСВ X имеет нормальное распределение $N(a;\sigma)$.

Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Нормальное распределение. Теорема о вычисление вероятности Геометрическая иллюстрация



Теорема о вычислении вероятностей
Доказательство

Доказательство. По (3) теоремы 3

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \dfrac{x-a}{\sigma}, dt = \dfrac{dx}{\sigma} \\ dx = \sigma dt \\ x = \alpha \to t = \dfrac{\alpha - a}{\sigma} \\ x = \beta \to t = \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{bmatrix} =$$

Теорема о вычислении вероятностей
Доказательство

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} f_s(t)\, dt =$$

$$= F_s\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - F_s\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \left(\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\right) - \left(\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Следствие 1 из теоремы о вычислении вероятностей

Следствие 1. Пусть НСВ X имеет нормальное распределение.

Тогда

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$P(|X-a|<\varepsilon)=P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=$$
$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм

Следствие 2 (правило трех сигм). Пусть НСВ X имеет нормальное распределение $N(a;\sigma)$.

Тогда отклонение X от a более, чем на 3σ маловероятно (практически невозможно), т.е.

$$P(|X-a| \geq 3\sigma) \approx 0$$

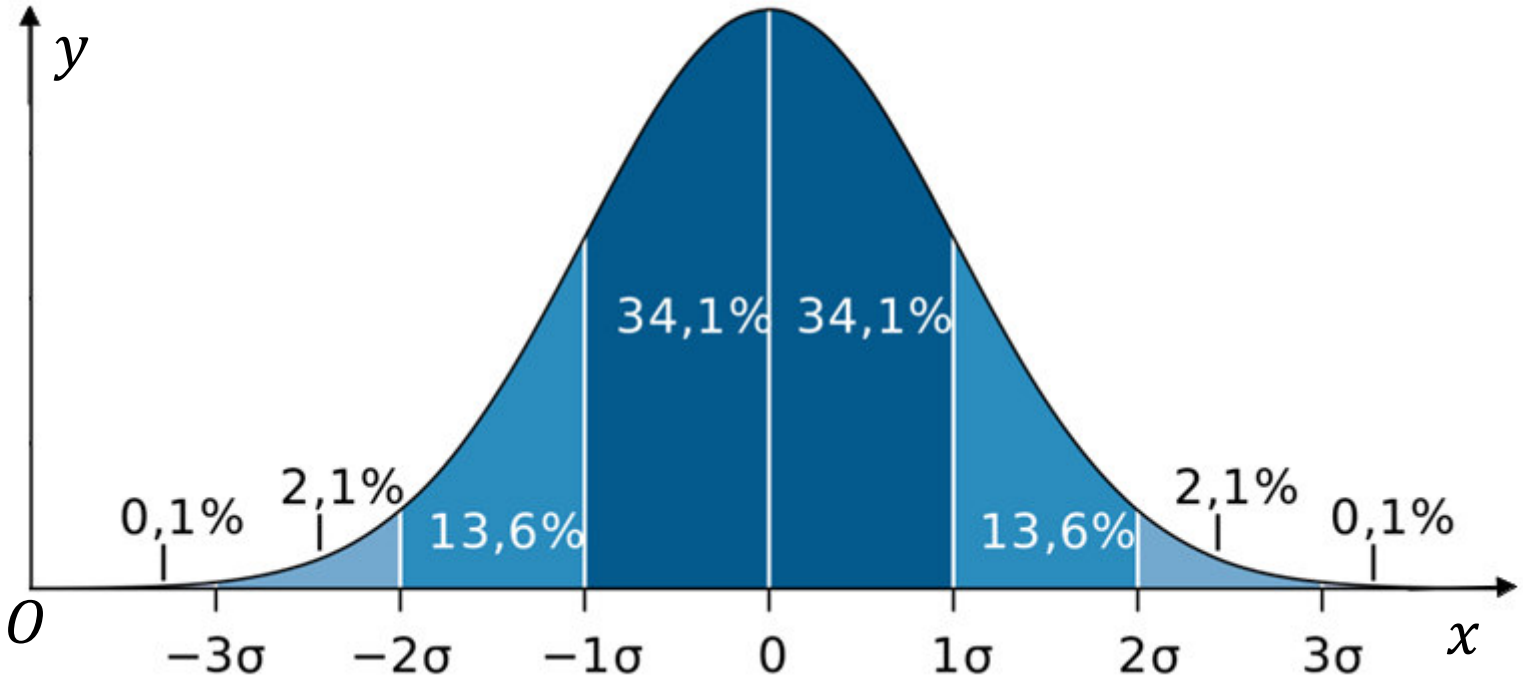
Доказательство.

$$P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 0.9973$$

$$\Rightarrow P(|X-a| \geq 3\sigma) =$$

$$= 1 - P(|X-a| \geq 3\sigma) \leq 0.0027 \blacksquare$$

Правило трех сигм. Геометрическая иллюстрация



Нормальное распределение. Задача 4

Коробки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1.06 кг. Найти вероятность того, что коробка имеет массу меньше 1кг, если масса коробок распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 0,03 кг.



Нормальное распределение
Задача 4. Решение

Решение.

$X -$ масса коробок - имеет нормальное распределение.

$a = 1.06;\ \sigma = 0{,}03$

$P(X < 1) =?$

По теореме 7

$$P(X < 1) = P(-\infty < X < 1) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1 - 1.06}{0.03}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 1.06}{0.03}\right) =$$

Нормальное распределение
Задача 4. Решение (продолжение)

$$\Phi\left(\frac{-0.06}{0.03}\right) - \Phi(-\infty) = -\Phi(2) + \Phi(+\infty) =$$

$$= [\text{по свойствам } \Phi(x)] =$$

$$= -\Phi(2) + 0.5 \approx -0.48 + 0.5 = 0.02$$

Нормальное распределение. Упр 5.

Упр.5. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X его диаметра от проектного размера по абсолютной величине меньше 0.7 мм. Считая, что случайная величина X нормально распределена с $a = 0$ (случайная ошибка) и $\sigma = 0.4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков из 100 случайно выбранных?

Указание: найти $100 \cdot P$, где $P = P(|X - a| < \varepsilon)$.



Ответ: ≈ 92 шт.