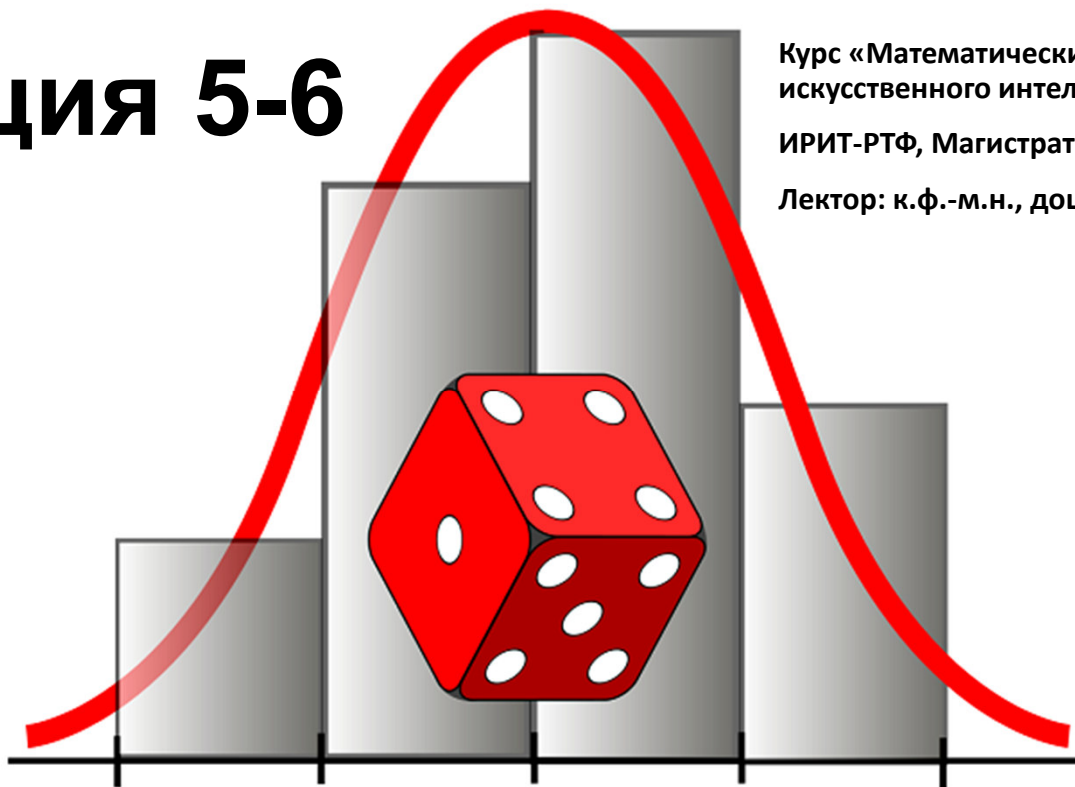


Лекция 5-6

Курс «Математические основы
искусственного интеллекта»

ИРИТ-РТФ, Магистратура (СпецВО)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.



Математические основы искусственного интеллекта Теория вероятностей

Лекция 5-6

Схема независимых испытаний Бернулли

1. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли
2. Приближенные формулы в схеме Бернулли.
3. Локальная теорема Лапласа.
4. Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра-Лапласа)
5. Формула Пуассона.

Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли

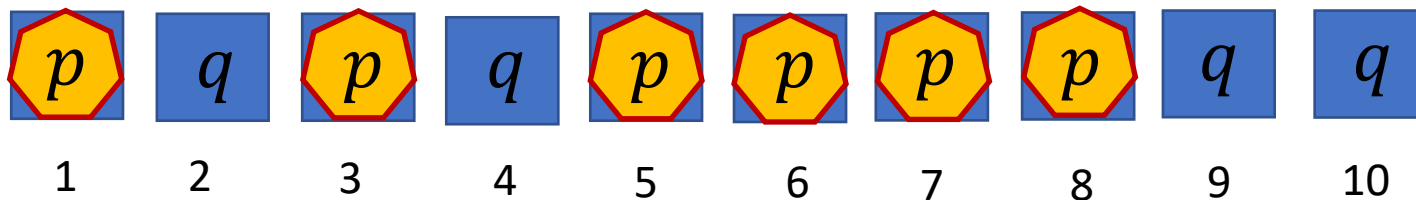
Пусть в каждом из n независимых испытаний некоторое событие A наступает с одной и той же вероятностью p и $q = 1 - p$.

Тогда $P_n(m)$ — вероятность того, что в n испытаниях событие A появится m раз, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли

Пример. Пусть $n = 10, m = 6$.



$$P_{10}(6) = C_{10}^6 p^6 q^4$$

Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит

менее m раз равно $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1)$

более m раз равно $P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n)$

не менее m раз равно $P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n)$

не более m раз равно $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m)$

хотя бы 1 раз равно $1 - P_n(0)$

Схема Бернулли. Задача 1

Задача 1. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости 2 раза выпадет 2 очка?

Решение. $p = \frac{1}{6}, q = 1 - p = \frac{5}{6}$

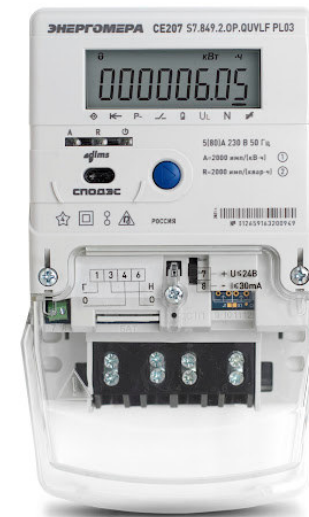


$$\begin{aligned} P_{10}(2) &= C_{10}^2 p^2 q^8 = \frac{10!}{8! 2!} p^2 q^8 = \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot \dots \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{8} \cdot \dots \cancel{2} \cdot 1 \cdot 2!} p^2 q^8 = \frac{10 \cdot 9}{2!} p^2 q^8 = \\ &= 45 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,29 \end{aligned}$$

Схема Бернулли. Упр.1

Упр. 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в течение одних суток не превышает нормы, равна 0,75. Найти вероятность, что ближайшую неделю расход не превысит нормы в течение четырёх суток.

Ответ: 0,173.



Этот слайд можно не конспектировать

Решение. $p = \frac{3}{4}, q = 1 - p = \frac{1}{4}$

$$P_7(4) = C_7^4 p^4 q^3 = \frac{7!}{4! 3!} p^4 q^3 =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} p^4 q^3 =$$

$$= 35 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0,173$$

Ответ: 0,173.

Схема Бернулли. Упр.2

Упр. 2. [Сотникова Н.Я. ПЗТВ] Том Сойер ставит свою дохлую крысу на веревочке против приятельского сломанного будильника, что при подбрасывании 6 монет выпадет 3 «орла». Том считает, что шансы получить или не получить загаданный результат равны. Прав ли он?

Ответ: нет: $\frac{5}{16}$ против $\frac{11}{16}$.



Этот слайд можно не конспектировать

Схема Бернулли. Задача 2

Задача 2. На самолете установлено 4 турбины. Вероятность исправности каждой из них – 0,99. Какова вероятность нормального полета, если он обеспечивается при 2-х работающих турбинах.



Схема Бернулли. Задача 2. Решение

Решение (I сп.). А: полет нормальный

$$p = 0,99, q = 0,01, n = 4$$

$$p(A) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) =$$

$$= C_4^2 p^2 q^2 + C_4^3 p^3 q^1 + C_4^1 p^4 q^0 =$$

$$= \frac{4!}{2! 2!} p^2 q^2 + \frac{4!}{3! 1!} p^3 q^1 + \frac{4!}{4! 0!} p^4 q^0 =$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2!} p^2 q^2 + \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{1!}} p^3 q^1 +$$
$$+ 1 \cdot p^4 q^0 =$$

Схема Бернулли. Задача 2. Решение

$$= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} p^2 q^2 + \frac{4}{1} p^3 q + 1 \cdot p^4 =$$

$$= 6p^2 q^2 + 4p^3 q + p^4 =$$

$$= 6 \cdot 0.99^2 \cdot 0.01^2 + 4 \cdot 0.99^3 \cdot 0.01 + 0.99^4 =$$

$$= 6 \cdot 0.99^2 \cdot 0.01^2 + 4 \cdot 0.99^3 \cdot 0.01 + 0.99^4 =$$

$$= 0.99999603$$

Схема Бернулли. Задача 2. Решение

Решение (II сп.). $\bar{A}$: полет ненормальный

$$\begin{aligned} p(\bar{A}) &= P_4(0) + P_4(1) = \\ &= C_4^0 p^0 q^4 + C_4^1 p^1 q^3 = \\ &= \frac{4!}{4! 0!} q^4 + \frac{4!}{3! 1!} p q^3 = q^4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} p q^3 = \\ &= q^4 + 4 p q^3 = 0.01^4 + 4 \cdot 0.99 \cdot 0.01^4 = \\ &= 0.00000397 \\ p(A) &= 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0.00000397 = \\ &= 0.99999603 \end{aligned}$$

Схема Бернулли. Задача 3

Задача 3. [Сотникова Н.Я. ПЗТВ] Самый правдивый человек на свете барон Мюнхаузен иногда все же любит несколько приукрасить действительность, и в одном случае из пяти грешит против истины. Какова вероятность того, что из четырех рассказанных им историй — про чудесную штопку коня, разрубленного пополам, про путешествие на ядре в неприятельский город, про оленя, подстреленного вишневым косточкой, и про жареных куропаток на шомполе — хотя бы одна абсолютно правдивая.



Схема Бернулли. Задача 3. Решение

Решение. A : хотя бы одна из 4-х историй – правда;

$\bar{A}$: все 4 истории – ложь.

$$p = \frac{1}{5}, q = 1 - p = \frac{4}{5}, n = 4$$

$$p(\bar{A}) = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = \frac{4!}{4! 0!} q^4 = q^4 =$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{256}{625} = \frac{369}{625} = 0.5904$$

Схема Бернулли. Упр. 3

Упр. 3. Вероятность выпуска отдельного сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сколько нужно купить сверл, чтобы вероятность обнаружить в покупке хотя бы одно бракованное сверло была не менее 0,99.

Ответ: не менее 228.

$$C_n^n p^n q^0 \geq 0.01 \Rightarrow$$
$$n \geq \log_{0.98} 0.01 = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.98} \approx 227.94$$

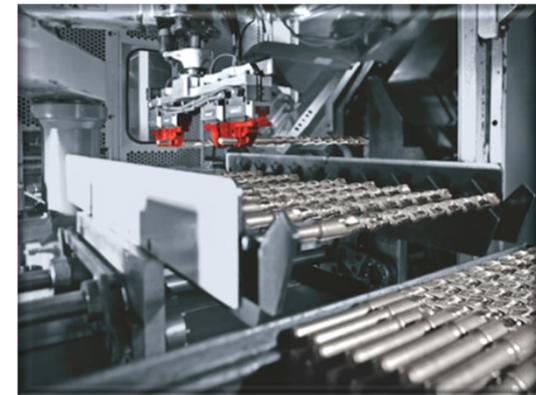


Схема Бернулли. Упр. 4

Упр. 4. [Сотникова Н.Я. ПЗТВ] Игрок Смит бросает 6 игральных костей и выигрывает, если выпадает хотя бы одна единица. Игрок Джонс бросает 12 игральных костей и выигрывает, если выпадает хотя бы две единицы. У кого больше шансов выиграть?

Ответ: У Смита: 0.665 ... против 0.618



Этот слайд можно не конспектировать

Приближенные формулы в схеме Бернулли

При больших n вычисление $P_n(m)$ затруднительно ввиду одновременного присутствия в формуле Бернулли и очень больших и очень маленьких чисел.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

$n!$ очень быстро растет, p^m и q^{n-m} быстро стремятся к 0 при $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$

Локальная теорема Лапласа

Локальная теорема Лапласа.

При $0.1 < p < 0.9$ и $n \geq 10$

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – плотность стандартного нормального распределения $N(0; 1)$ ($\varphi(-x) = \varphi(x)$),

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Локальная теорема Лапласа. Задача 4

Задача 4. В первые классы некоторой школы приняли 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения девочки равна 0,515.



Локальная теорема Лапласа. Задача 4

Решение.

$$p = 0.515, q = 1 - p = 0.485, n = 200$$

$$0.1 < p < 0.9 \text{ и } n \geq 10$$

Следовательно, можно применить локальную теорему Лапласа для $m = 100$:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad P_n(m) = P_{200}(100)$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.515 \cdot 0.485} \approx 7$$

Локальная теорема Лапласа. Задача 4

$$np = 200 \cdot 0.515 = 103$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{100 - 103}{7} = -\frac{3}{7}$$

$$\varphi(x) = \varphi\left(-\frac{3}{7}\right) = \varphi\left(\frac{3}{7}\right) = \varphi(0.43) \approx 0.37$$

$$P_{200}(100) \approx \frac{1}{7} \cdot 0.37 = \mathbf{0.05}$$

Почему получилась такая маленькая вероятность?

Локальная теорема Лапласа. Упр. 5

Упр. 5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.



Ответ: ≈ 0.046 .

Этот слайд можно не конспектировать

Локальная теорема Лапласа. Упр 5

Решение.

$$p = 0.8, q = 1 - p = 0.2, n = 100$$

$$0.1 < p < 0.9 \text{ и } n \geq 10$$

Следовательно, можно применить локальную теорему Лапласа для $m = 75$:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad P_n(m) = P_{100}(75)$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 4$$

Локальная теорема Лапласа. Упр 5

$$np = 100 \cdot 0.8 = 80$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{75 - 80}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(-\frac{5}{4}\right) = \varphi\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \varphi(1.25) \approx 0.18264908\end{aligned}$$

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{4} \cdot 0.18264908 = 0.04566227$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа)

Теорема Муавра-Лапласа.

При $0.1 < p < 0.9$ и $n \geq 10$

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ – функция Лапласа),

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \Phi(0) = 0, \Phi(x) \approx \frac{1}{2} \text{ при } x \geq 5$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа)

Доказательство. Из локальной теоремы Лапласа следует:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right),$$

$$\text{где } x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для сокращения будем обозначать $x_{m_1} = x_1$, $x_{m_2} = x_2$. Тогда при $m_1 \leq m \leq m_2$ получаем равенство

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \approx$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Док-во

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right).$$

Легко проверить, что

$$x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Значит,

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_1}^{m_2} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right) (x_{m+1} - x_m)$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Док-во

По определению интеграла как предела интегральных сумм получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_1}^{m_2} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right) (x_{m+1} - x_m) \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Замечания

Замечания

- 1) Равенства из локальной и интегральной теорем будут тем точнее, чем больше n .
- 2) Кроме того, на точность влияет значение p – чем ближе p к 0.5, тем точнее равенства. Чем ближе p к 0 или 1, тем меньше точность.
- 3) Точность формул заметно увеличивается, если применять «поправку на непрерывность»:

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Замечания

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2 + 0.5) - \Phi(x_1 - 0.5)$$

4) При малых p , т.е. в схеме Бернулли с редким наступлением события, справедлива приближенная формула для $P_n(m)$ - формула Пуассона.

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Задача 5

Задача 5. Всхожесть семян пшеницы равна 0,8.
Найти вероятность того, что из 1000 посаженных
семян число проросших будет между 790 и 830.

Решение.

$$n = 1000, p = 0,9,$$

$$m_1 = 790, m_2 = 830$$

$$0.1 < p < 0.9 \text{ и } n \geq 10$$



Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Задача 5

По теореме Муавра-Лапласа

$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{790 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{\sqrt{10}}{4} \\ \approx -0,79$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{830 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{3\sqrt{10}}{4} \\ \approx 2,37$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Задача 5

$$\begin{aligned}\text{Тогда } \Phi(x_2) - \Phi(x_1) &= \\ &= \Phi(2,37) - \Phi(-0,79) = \\ &\approx 0,49 + 0,29 = \mathbf{0,74}\end{aligned}$$

Ответ: $\approx 0,74$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Задача 6

Задача 6. [\[Шапарь Ю.В. Сборник задач по ТВ, ч.1\]](#). В некоторой области имеется 16200 тракторов. Известно, что в течение сезона в среднем у одной трети тракторов выходит из строя деталь, которая требует замены. (1) Какова вероятность того, что 5400 деталей достаточно для обеспечения работы в течение сезона? (2) Сколько нужно заготовить деталей, чтобы с вероятностью 0,95 их было достаточно для обеспечения работы в течение сезона?



Интегральная теорема Лапласа

Задача 6. Решение

Решение.

$$(1) n = 16200, p = \frac{1}{3}, m_1 = 0, m_2 = 5400$$
$$0.1 < p < 0.9 \text{ и } n \geq 10$$

Требуется найти вероятность

$$P_n(m \leq 5400) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$$

По теореме Муавра-Лапласа

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где}$$

Интегральная теорема Лапласа

Задача 6. Решение

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 16200 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{16200 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = -90$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = 0$$

Тогда $\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0) - \Phi(-90) =$

$$\Phi(0) + \Phi(90) \approx 0 + 0,5 = \mathbf{0,5}$$

Интегральная теорема Лапласа

Задача 6. Решение

$$(2) n = 16200, p = \frac{1}{3}, P_n(0 \leq m \leq k) \geq 0.95$$

Требуется найти k .

По теореме Муавра-Лапласа

$$P_n(0 \leq m \leq k) \approx \Phi(x) - \Phi(x_1), \text{ где}$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = -90, \Phi(x_1) \approx -0.5$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k - 16200 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{16200 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{k - 5400}{60}$$

Интегральная теорема Лапласа

Задача 6. Решение

$$\text{Значит, } \Phi\left(\frac{k-5400}{60}\right) - (-0.5) \geq 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{k-5400}{60}\right) \geq 0.45$$

$$\Phi\left(\frac{k-5400}{60}\right) \geq \Phi(1.65)$$

Функция $\Phi(x) \uparrow$ (почему?) $\Rightarrow$

$$\frac{k-5400}{60} \geq 1.65 \Rightarrow k-5400 \geq 99 \Rightarrow k \geq 5499$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Упр. 6

Упр. 6. Вероятность, что деталь не прошла проверку ОТК равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 100 случайно взятых деталей ОТК пройдут от 60 до 90.

Ответ: $\approx 0,9938$.



Этот слайд можно не конспектировать

Интегральная теорема Лапласа

Упр 6. Решение

Решение.

(1) $n = 100$, $q = 0.2$, $p = 1 - 0.2 = 0.8$, $m_1 = 60$, $m_2 = 90$

$0.1 < p < 0.9$ и $n \geq 10$

Требуется найти вероятность

$$P_{100}(60 \leq m \leq 90) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$$

По теореме Муавра-Лапласа

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где}$$

Интегральная теорема Лапласа

Упр 6. Решение

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{-20}{\sqrt{16}} = -5$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2.5$$

$$\text{Тогда } \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(2.5) - \Phi(-5) = \\ \Phi(2.5) + \Phi(5) \approx 0.0175283 + 1,48 * 10^{(-6)} \approx$$

$$\approx 0.01753$$

$$P_{100}(60 \leq m \leq 90) \approx \frac{0.01753}{4} \approx 0.0044$$

$$P = 1 - P_{100}(60 \leq m \leq 90) \approx 0,9938$$

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Упр. 7

Упр.7 [[Сотникова Н.Я. Первоапр. СЗ по ТВ](#)]. В передовой научной лаборатории удалось скрестить арбуз с дыней. К сожалению, саженцы столь перспективного растения плохо приживаются – из 10 начинает плодоносить только два. Юннаты их подшефного кружка помогают ученым в их выдающихся исследованиях. Ими высажено 400 удивительных растений. Найти вероятность того, что не меньше 100 из них будут в скором времени давать урожай.

Ответ: $\approx 0,006$.



Следствие из теоремы Муавра-Лапласа

Следствие из теорема Муавра-Лапласа.

При $0.1 < p < 0.9$ и $n \geq 10$ для любого $\varepsilon > 0$ вероятность отклонения частоты $\frac{m}{n}$ появления события A от теоретической вероятности p этого события не более, чем на ε равна

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \approx 2\Phi \left(\sqrt{\frac{n}{pq}} \varepsilon \right)$$

Следствие из теоремы Муавра-Лапласа

При любом $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n

$$x = \sqrt{\frac{n}{pq}} \varepsilon > 5 \Rightarrow \Phi(x) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 1,$$

т.е. с большой вероятностью частота $\frac{m}{n} \approx p$

Следствие из теоремы Муавра-Лапласа

Доказательство.

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{m - np}{n}\right| < \varepsilon\right) = \\ &= P(|m - np| < n\varepsilon) \\ &= P(\underbrace{np - n\varepsilon}_{m_1} < m < \underbrace{np + n\varepsilon}_{m_2}) = \\ &= \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \\ &= \left[x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \right] \end{aligned}$$

Следствие из теоремы Муавра-Лапласа

Доказательство

Доказательство.

$$= \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(np - n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}, \\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(np + n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \end{array} \right] =$$

$$= \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

■

Следствие из теоремы Муавра-Лапласа

Доказательство

Доказательство.

$$= \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(np - n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}, \\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(np + n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \end{array} \right] =$$

$$= \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \quad \blacksquare$$

Следствие из теоремы Муавра-Лапласа

Задача 7

Задача 7. Сколько нужно произвести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать отклонение частоты выпадения Γ от теоретической вероятности 0,5 на абсолютную величину, меньшую, чем 0,1.

Решение. $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, \varepsilon = 0.01$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0,01\right) \geq 0,92$$

Следствие из теоремы Муавра-Лапласа

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0,01\right) \geq 0,92$$

$$2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} 0,01\right) \geq 0,92 \quad \Phi(0,02\sqrt{n}) \geq 0,46$$

$$\Phi(0,02\sqrt{n}) \geq \Phi(0,46)$$

$$0,02\sqrt{n} \geq 1,75$$

$$\sqrt{n} \geq 87,5$$

$$n \geq 7656.25$$

Ответ: $n \geq 7657$.

Интегральная теорема Лапласа (теорема Муавра –Лапласа). Упр. 8

Упр. 8. Вероятность, того, что прибор выдержит гарантийный срок работы равна 0,8. Для партии из 1000 закупленных приборов найти границы, в которых с вероятностью 0,9955 заключено число приборов, выдержавших гарантийный срок службы.

Указание: Найти и представить ответ в виде
$$p - \varepsilon < \frac{m}{n} < p + \varepsilon.$$

Ответ: $0,76 < \frac{m}{n} < 0,84.$



Редкие события. Формула Пуассона

Для редких событий справедлива

Формула Пуассона.

При $p < 0.1$ и $\lambda = np$ т.ч. $0 \leq \lambda \leq 10$

$$P_n(m) \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

Здесь значение $\lambda = np$ — есть среднее число наступления редкого события A при n -кратном повторении.

Формула Пуассона. Доказательство

Доказательство

Вообще, теорема Пуассона, как и теоремы Лапласа, имеет предельный характер, т.е. показывает, к какому распределению сходится биномиальное распределение при определенных условиях.

В данном случае будем предполагать, что $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$, но так, что при этом $np \rightarrow \lambda$.

Формула Пуассона. Доказательство

Фактически

это условие означает, что вероятность p зависит от n ,

$p = p_n$, причем $np_n \rightarrow \lambda$.

Но для простоты можно оставить исходные обозначения.

По формуле Бернулли мы знаем, что

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

Формула Пуассона. Доказательство

Из условия $np \rightarrow \lambda$ следует, что

$$p = \frac{\lambda}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \alpha_n \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_n(m) &= \frac{n!}{(n-m)! m!} p^m (1-p)^{n-m} = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n} + \frac{\alpha_n}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n} \right)^{n-m} \end{aligned}$$

Формула Пуассона. Доказательство

Имеем:

$$\left(\frac{\lambda}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^m \text{ и}$$
$$\left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-m} = \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{-m},$$

причем $\left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{-m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, а $\left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{\lambda + \alpha_n}{n}\right) =$$
$$= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(-\frac{\lambda + \alpha_n}{n}\right) = e^{-\lambda}.$$

Теперь рассмотрим коэффициент

Формула Пуассона. Доказательство

Имеем:

$$\left(\frac{\lambda}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^m \text{ и}$$
$$\left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-m} = \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{-m},$$

причем

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{-m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ а } \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda},$$

Формула Пуассона. Доказательство

Т.К.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\alpha_n}{n} \right)^n &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{\lambda + \alpha_n}{n} \right) = \\ &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(-\frac{\lambda + \alpha_n}{n} \right) = e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Формула Пуассона. Доказательство

Теперь рассмотрим коэффициент

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{1}{n^m} = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m} \cdot \frac{1}{m!} = \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-m+1}{n} \cdot \frac{1}{m!} \rightarrow \frac{1}{m!} \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Формула Пуассона. Доказательство

Собирая все сомножители, получаем:

$$P_n(m) = \frac{n!}{(n-m)! m!} p^m (1-p)^{n-m} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Замечание. Можно доказать, что

$$\left| P_n(m_1 \leq m \leq m_2) - \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \right| \leq np^2 = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Редкие события. Формула Пуассона

Задача 8

Задача 8. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0.004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.



Редкие события. Формула Пуассона

Задача 8. Решение

Решение. $n = 1000, p = 0.004, \lambda = np = 4,$
 $\lambda = 4$ — среднее число обрыва нити на 1000 веретенах.

$$p < 0.1, 0 \leq \lambda \leq 10$$

Следовательно, можно применить формулу Пуассона для $m = 5$:

$$\begin{aligned} P_n(5) &\approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} = \frac{e^{-4} 4^5}{4!} = \frac{e^{-4} 4^5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{e^{-4} 4^4}{6} \approx 0.1786 \end{aligned}$$

Редкие события. Формула Пуассона

Задача 9

Задача. 9 Вероятность повреждения аппаратуры спутника при попадании в него высоко-энергетической частицы равно 0,002. За год эксплуатации в спутник попало 1000 частиц. Найти вероятность ремонта спутника, если его починка производится при не менее 3-х попаданий частиц.



Редкие события. Формула Пуассона

Задача 9. Решение

Решение. $n = 1000, p = 0.002, \lambda = np = 2,$
 $\lambda = 2$ — среднее число из 1000 частиц, при попадании в спутник которых приводит к ремонту оборудования.

$$p < 0.1, 0 \leq \lambda \leq 10$$

Следовательно, можно применить формулу Пуассона для $t \geq 3$:

Редкие события. Формула Пуассона

Задача 9. Решение

$$\begin{aligned}P_n(m \geq 3) &= 1 - P_n(m < 3) = \\&= 1 - (P_n(0) + P_n(1) + P_n(2)) = \\&= 1 - \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} \right) = \\&= 1 - \frac{1}{e^\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right) = \\&= 1 - \frac{1}{e^2} \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} \right) = 1 - \frac{5}{e^2} \approx \mathbf{0.32}\end{aligned}$$

Редкие события. Формула Пуассона

Упр. 9

Упр. 9. В партии из 1000 изделий есть некоторое количество бракованных. Вероятность брака равна $p = 0.001$. Найти вероятность того, что в партии

- a) нет бракованных изделий;
- b) есть ровно одно бракованное изделие;
- c) есть ровно два бракованных изделия;
- d) есть хотя бы одно бракованное изделие;
- e) есть хотя бы два бракованных изделий.



Ответ: a) ≈ 0.38 ; b) ≈ 0.38 ; c) ≈ 0.18 ;
d) ≈ 0.62 ; e) ≈ 0.45 .

Этот слайд можно не конспектировать

Редкие события. Формула Пуассона

Упр. 10

Упр. 10. В среднем 4% студентов носит очки. Какова вероятность, что среди 100 студентов, присутствующих на лекции, не менее трех будут в очках.



Ответ: $\approx 0,76$.

Этот слайд можно не конспектировать

Редкие события. Формула Пуассона

Упр. 11

Упр. 11. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка разобьется равна 0,002. Найти вероятность, что хотя бы одна бутылка будет разбита.



Ответ: $\approx 0,73$.

Этот слайд можно не конспектировать