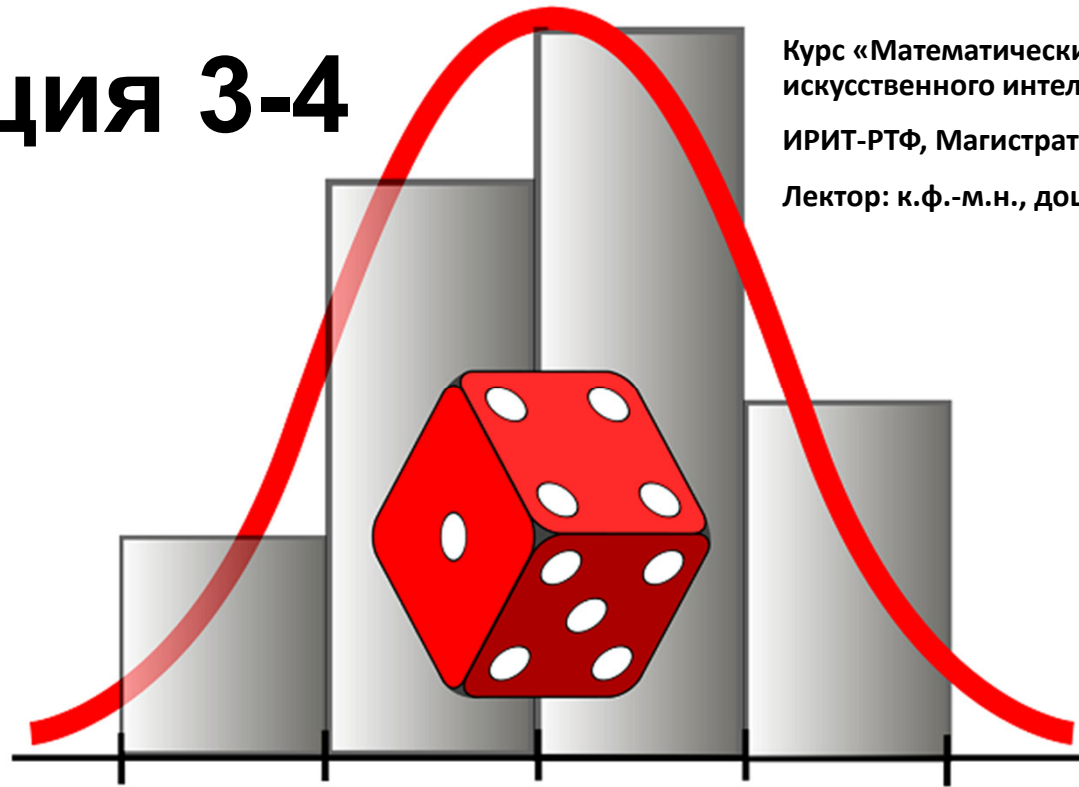


Лекция 3-4

Курс «Математические основы
искусственного интеллекта»

ИРИТ-РТФ, Магистратура (СпецВО)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.



Математические основы искусственного интеллекта Теория вероятностей

Лекция 3-4

Теоремы о вероятности суммы и произведения событий. ФПВ. ФБ

1. Алгебра событий.
2. Теоремы о вероятности суммы событий, противоположного события.
3. Условная вероятность. Теорема о вероятности произведения событий.
4. Формула полной вероятности.
5. Формула Байеса.

Виды событий

Опр. **Достоверное** событие – это событие, которое наступает в данном опыте всегда.

Невозможное событие – это событие, которое не наступает в данном опыте никогда.

Пример 1. Достоверное – монета упала на Г или Р.

Пример 2. Невозможное – «монета осталась висеть в воздухе»

Вероятность достоверного события равна 1.

Вероятность невозможного события равна 0.

Алгебра событий. Сложение (сумма) и произведение событий

Опр. **Сложением (суммой)** событий A и B называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B .

Опр. **Произведением** событий A и B называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события A и B .

Алгебра событий. Сложение (сумма) и произведение событий. Примеры

Пример 3. Монету бросают 2 раза. Событие A - выпадение Г в 1-й раз, событие B – выпадение Г 2-й раз.

$A + B$ – событие, состоящее в том, что хотя бы один раз выпадет Г.

$A \cdot B$ – событие, состоящее в том, что оба раза раз выпадет Г.

Алгебра событий. Противоположное событие

Опр. **Противоположное** событие к событию A — это событие, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A .

Пример 4. Монету бросают 1 раз. Событие A - выпадение Г.

$\bar{A}$ — выпадение Р.

Алгебра событий. Несовместные события

Опр. События называются **несовместные**, если они не могут наступить вместе.

Пример 5. События A и $\bar{A}$ — несовместны.

Пример 6. Брошен кубик, событие A — на кубике выпало четное число очков, B — на кубике выпало нечетное число очков. События A и B несовместимы.

Теорема о вероятности противоположного события

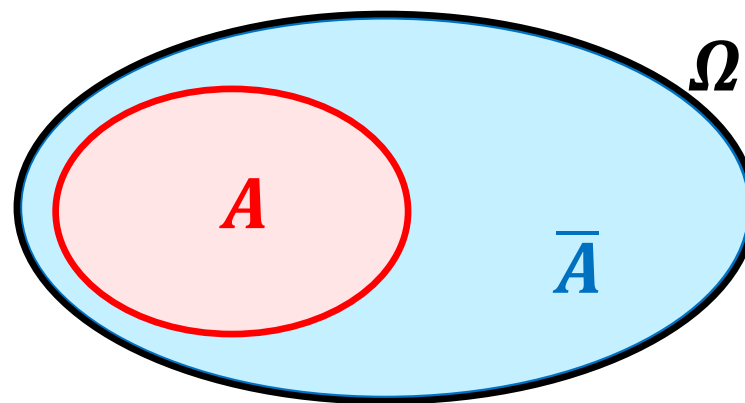
Теорема о вероятности противоположного события. Вероятность $p(\bar{A})$ противоположного события $\bar{A}$ события A равна

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Теорема о вероятности противоположного события. Док-во

Док-во (иллюстрация). Пусть Ω — множество всех исходов, тогда можно считать, что A — множество исходов из Ω , при которых наступает событие A .

Тогда дополнение $\bar{A}$ множества A — множество исходов, благоприятных событию $\bar{A}$.



Теорема о вероятности противоположного события. Док-во

Тогда n — число элементов во множестве Ω ;

m_A — число элементов во множестве A ;

$m_{\bar{A}}$ — число элементов во множестве $\bar{A}$.

Значит, $m_{\bar{A}} = n - m_A$.

Следовательно,

$$p(\bar{A}) = \frac{m_{\bar{A}}}{n} = \frac{n - m_A}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m_A}{n} = 1 - p(A). \blacksquare$$

Теорема о вероятности суммы событий

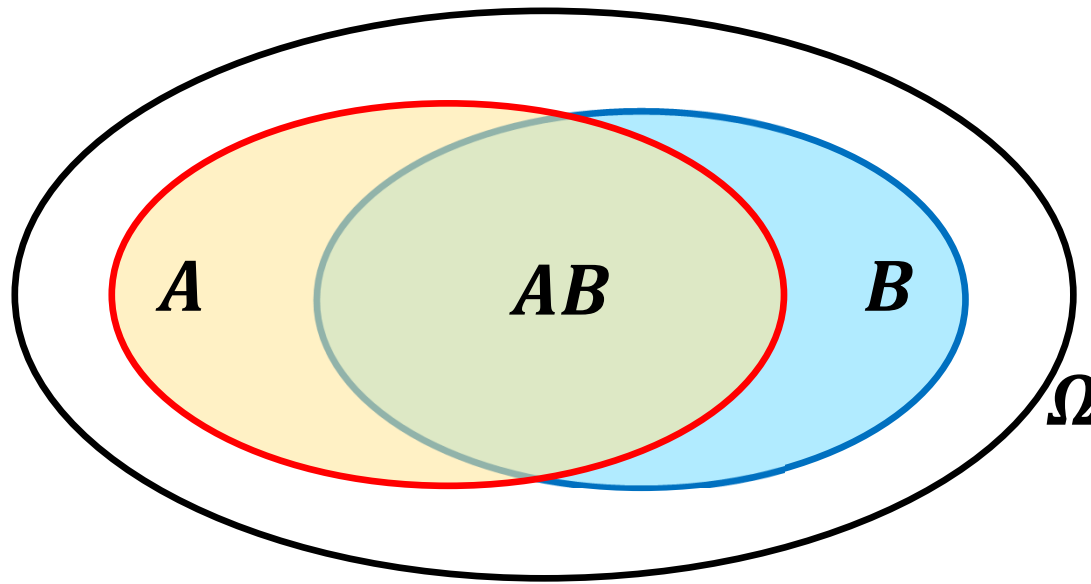
Теорема о вероятности суммы событий.

Вероятность $p(A + B)$ суммы $A + B$ событий A и B равна

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$$

Теорема о вероятности суммы событий. Док-во

Док-во (иллюстрацию) проведем аналогично доказательству теоремы о противоположном событии (Ω — множество всех исходов, $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$)



Теорема о вероятности противоположного события. Док-во

n — число элементов во множестве Ω ;

m_A — число элементов во множестве A ;

m_B — число элементов во множестве B ;

m_{AB} — число элементов во множестве $A \cap B$;

m_{A+B} — число элементов во множестве $A \cup B$.

Тогда, $m_{A+B} = m_A + m_B - m_{AB}$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p(\bar{A}) &= \frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A + m_B - m_{AB}}{n} \\ &= \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n} = p(A) + p(B) - p(AB) \end{aligned}$$

■

Теорема о вероятности суммы несовместных событий

Теорема о вероятности суммы несовместных событий.

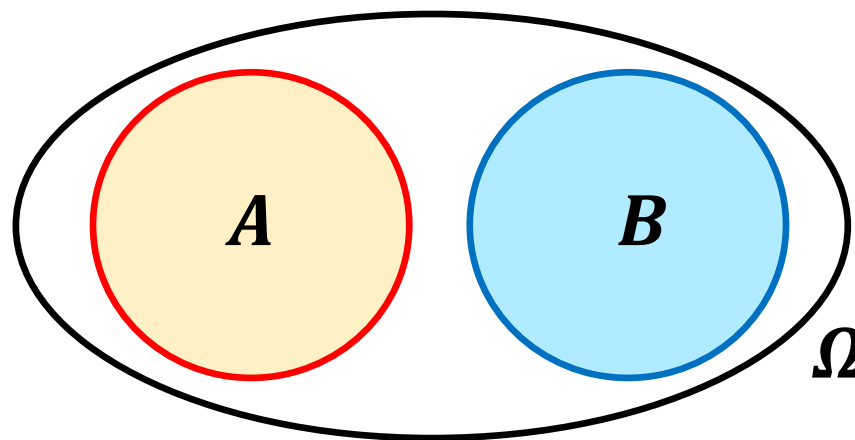
Вероятность $p(A + B)$ суммы $A + B$ несовместных событий A и B равна

$$p(A + B) = p(A) + p(B)$$

Теорема о вероятности суммы несовместных событий. Док-во

Доказательство. Поскольку события A и B — несовместны, событие AB — невозможное (т.е. $A \cap B = \emptyset$). Следовательно, $p(AB) = 0$.

Значит, $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB) = p(A) + p(B)$ ■



Формула включения-исключения (обобщение теоремы суммы событий)

Док-во (индукций по n) – упр.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Задача о расстроенной секретарше

Есть n писем и n подписанных конвертов.

Секретарша, будучи в расстроенных чувствах, случайным образом разложила письма в конверты по одному.

Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в предназначенный ему конверт.

Задача о расстроенной секретарше

Решение

Решение. Пусть событие $A_i, i = 1, \dots, n$, означает, что i -е письмо попало в свой конверт. Тогда

$$\begin{aligned} A &= \{\text{хотя бы одно письмо попало} \\ &\quad \text{в свой конверт}\} = \\ &= A_1 \cup \dots \cup A_n \end{aligned}$$

События $A_1, \dots, A_n$ совместны, поэтому используем формулу (1).

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

Вероятности всех событий A_i и их пересечений вычислим по классическому определению вероятности.

Элементарными исходами будут всевозможные размещения n писем по n конвертам. Их общее число равно $|\Omega| = n!$

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

Событию A_i благоприятны $(n - 1)!$ исходов, а именно, всевозможные размещения всех $n - 1$ писем, кроме i -го, которое остается лежать в своем конверте.

Поэтому

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ — одна и та же для всех } i.$$

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

Аналогично получаем:

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \text{ и т.д.}$$

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

Так как все вероятности одинаковы (не зависят от конкретных событий A_i , а только от количества сомножителей в произведении), то в каждом слагаемом формулы (1) под знаком суммы будет одно и то же число.

Поэтому чтобы вычислить $P(A)$ надо узнать количество слагаемых в каждой сумме в (1).

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

Например, число слагаемых в $\sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j)$ равно числу наборов (i, j) , $i, j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих неравенству $i < j$.

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

Это число равно C_n^2 , так как любую пару чисел (i, j) можно записать единственным образом так, чтобы выполнялось неравенство $i < j$.

Аналогично, в сумме $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k)$ будет равно C_n^3 слагаемых. И т.д.

Следовательно,

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

$$\begin{aligned} P(A) &= C_n^1 \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \\ &\quad + C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^n \cdot \frac{1}{n!} = \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Задача о расстроенной секретарше

Решение (продолжение)

Например, при $n = 2$, $P(A) = 1 - \frac{1}{2} = 0,5$, что вполне ожидаемо.

При $n = 3$ $P(A) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

При $n \rightarrow \infty$

$$P(A) \rightarrow 1 - e^{-1} \approx 0.632$$

Условная вероятность

Опр. **Условной вероятностью** события B называется вероятность событие B при условии, что произошло событие A .

Обозначение: $p(B|A)$ или $p_A(B)$.

Условная вероятность

Пример 7. Пусть из 25 экзаменационных билетов 10 «счастливых», а остальные – «несчастливые».

Пусть A – событие: студент, который брал билет первым, взял «счастливый» билет, а B – событие: студент, который брал билет вторым, тоже взял «счастливый» билет.

Тогда $\bar{A}$: студент, который брал билет первым, взял «несчастливый» билет. Тогда

$$p_A(B) = \frac{9}{24} = 0.375 \quad p_{\bar{A}}(B) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0.417$$

Теорема о вероятности произведения событий

Теорема о вероятности произведения событий
Вероятность $p(AB)$ произведения AB событий A и B равна

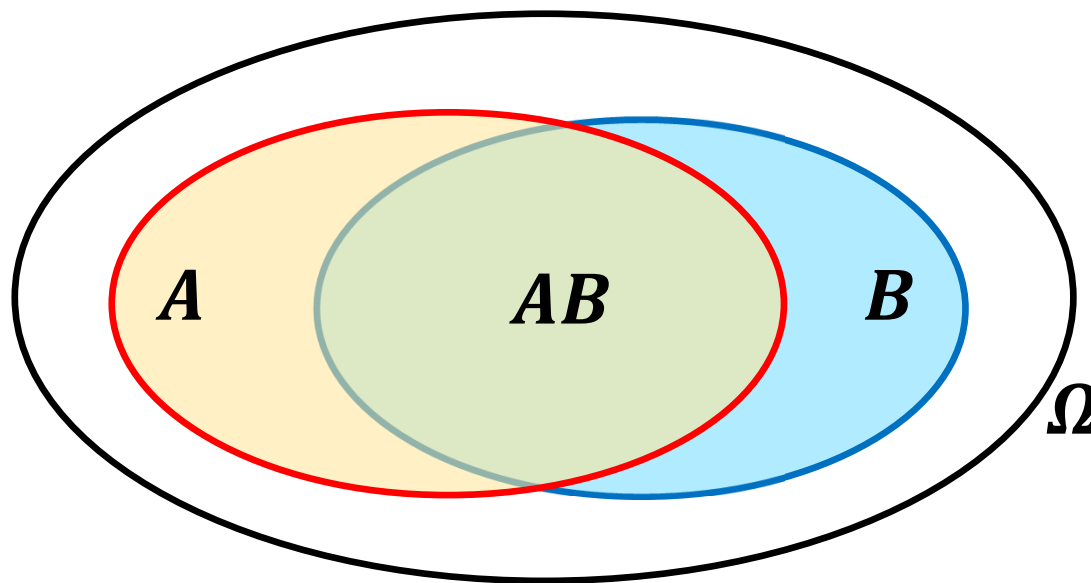
$$p(AB) = p(A)p_A(B)$$

$$p_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)}$$

Теорема о вероятности произведения событий. Доказательство

Док-во (иллюстрация).

Пусть Ω — множество всех исходов, $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$.



Теорема о вероятности произведения событий. Док-во

Если событие B наступает при условии наступления события A , то в этом случае A — множество всех исходов, AB — множество всех благоприятных исходов.

Следовательно,

$$p_A(B) = \frac{m_{AB}}{m_A} = \frac{\frac{m_{AB}}{n}}{\frac{m_A}{n}} = \frac{p(AB)}{p(A)} \quad \blacksquare$$

Теорема о произведении конечного числа событий

Следующая теорема является обобщением предыдущей

Теорема. Для любых событий $A_1, \dots, A_n$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & P(A_1 \dots A_n) = \\ & = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}), \end{aligned}$$

если только все участвующие в этом равенстве условные вероятности определены.

Теорема о произведении конечного числа событий

Замечание. Легко понять, что эти условные вероятности определены тогда и только тогда, когда $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$.

При этом, если $P(A_1 \dots A_{n-1}) = 0$, то и $P(A_1 \dots A_n) = 0$.

Теорема о произведении конечного числа событий. Задача

Задача. В урне находится N шаров, из которых K — белые, а остальные $N - K$ — черные. Из урны по одному вынимают шары без возвращения. Найти вероятность того, что первые n шаров окажутся белыми ($n \leq K$).

Теорема о произведении конечного числа событий. Задача. Решение

Решение. Воспользуемся теоремой о вероятности произведения n событий. Пусть A_i — событие « i -й вынутый шар — белый» ($i = 1, 2, \dots, n$).

Теорема о произведении конечного числа событий. Задача. Решение

Тогда

$$P(A_1) = \frac{K}{N}, P(A_2|A_1) = \frac{K-1}{N-1}, P(A_3|A_1A_2) = \frac{K-2}{N-2},$$
$$P(A_i|A_1A_2 \dots A_{i-1}) = \frac{K-i+1}{N-i+1}.$$

Следовательно, $P(A) =$

$$= P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{K!/(K-n)!}{N!/(N-n)!} = \frac{C_K^n \cdot n!}{C_N^n \cdot n!} = \frac{C_K^n}{C_N^n}.$$

Теорема о вероятности произведения независимых событий

Теорема о вероятности произведения независимых событий.

Вероятность $p(AB)$ произведения AB независимых событий A и B (т. е. $p_A(B) = p(B)$) равна

$$p(AB) = p(A)p(B)$$

Теорема о вероятности произведения независимых событий

Док-во. Так как события A, B независимы,
 $p_A(B) = p(B)$.

Следовательно, по теореме о вероятности произведения

$$p(AB) = p(A)p_A(B) = p(A)p(B) \blacksquare$$

Теоремы о вероятностях суммы, произведения и противоположного событий. Задача 1

Задача 1. Вероятность потопить военный корабль при попадании одной торпеды равна $\frac{1}{2}$. Какова вероятность, что для потопления корабля понадобится 4 торпеды?



Теоремы о вероятностях суммы, произвед. и против. событий. Задача 1

Решение.

Пусть A — искомое событие,

A_i : i — й раз торпеда попала в цель;

$\overline{A_i}$: i — й раз торпеда промахнулась.

Тогда $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4$, $p(A_i) = p = \frac{1}{2}$ и
 $p(\overline{A_i}) = q = 1 - p(A_i) = 1 - p = \frac{1}{2}$

Так как события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, A_4$ независимы,

$$p(A) = p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(\overline{A_3})p(A_4) = q^3p = \frac{1}{16}$$

Теоремы о вероятностях суммы, произведения и противоположного событий. Задача 2

Задача 2. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна 0.7, а второго – 0.8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена.



Теоремы о вероятностях суммы, произвед. и против. событий. Задача 2

Решение. Пусть

A : мишень поражена;

B : 1-й стрелок попал в мишень;

C : 2-й стрелок попал в мишень.

Тогда $A = B + C$ и $p(B) = 0.7, p(C) = 0.8$.

Следовательно, $p(A) = p(B) + p(C) - p(BC)$

Так как события B и C независимы,

$$p(BC) = p(B)p(C) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$$

Следовательно, $p(A) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$

Теоремы о вероятностях суммы, произведения и противоположного событий. Задача 3

Задача 3. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если 45% всей продукции является браком, а 75% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.



Теоремы о вероятностях суммы, произвед. и против. событий. Задача 3

Решение. Пусть

A : изделие небракованное;

$\bar{A}$: изделие бракованное.

B : изделие первого сорта;

Тогда AB — искомое событие и требуется найти $p(AB)$.

Кроме того, $p(\bar{A}) = 0.45$, $p(A) = 1 - 0,45 = 0,55$

$p_A(B) = 0,75$.

$p(AB) = p(A)p_A(B) = 0,55 \cdot 0,75 = 0,4125$

Теоремы о вероятностях суммы, произведения и противоположного событий. Упр. 1

Упр 1. Вероятность для спортсмена улучшить свой результат в каждой попытке равна 0,3. Определить вероятность того, что спортсмен улучшит свой результат, если разрешается сделать 3 попытки.



Ответ: 0.657

Этот слайд можно не конспектировать

Теоремы о вероятностях суммы, произведения и противоположного событий. Упр. 2

Упр 2. Вероятность попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0.8. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0.4.

Ответ: $\frac{2}{3}$



Этот слайд можно не конспектировать

Гипотезы. Определение

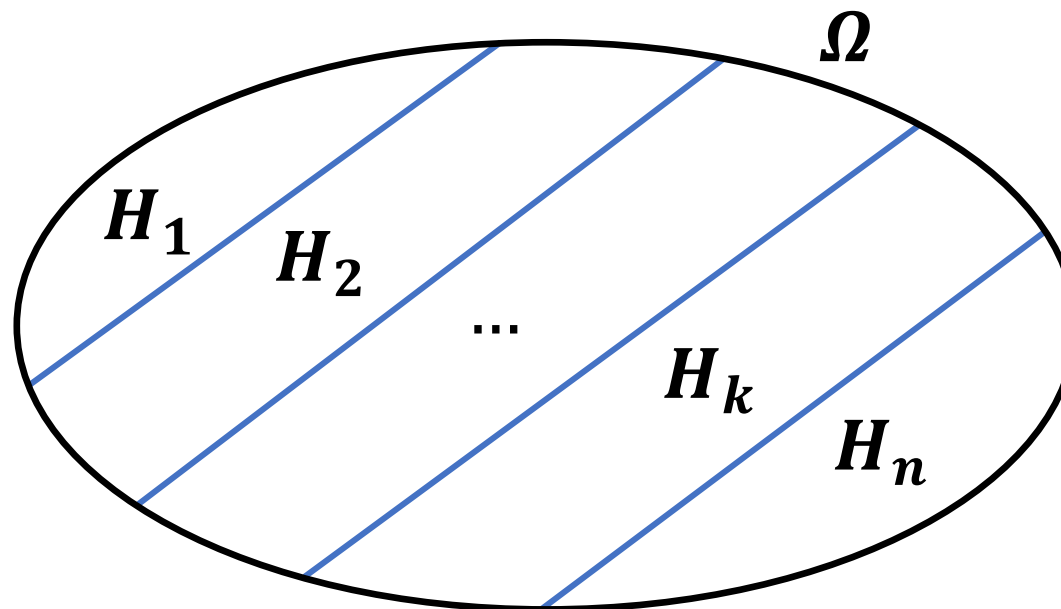
Опр. Пусть Ω — множество всех исходов.

Система подмножеств $H_1, H_2, \dots, H_n$ множества Ω называются **системой гипотез**, если

(1) $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно *несовместны* (т.е. $H_i \cap H_j = \emptyset$ для $i \neq j$);

(2) $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$.

Гипотезы. Определение



Это значит, что в каждом опыте наступает ровно одна из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Гипотезы. Определение. Примеры

Пример 8. При подбрасывании монеты гипотеза H_1 — выпал Г, гипотеза H_2 — выпала Р.

Пример 9. При бросании кубика гипотеза H_1 — выпало 1 очко, гипотеза H_2 — выпало 2 очка, ..., H_6 — выпало 6 очков.

Пример 10. При сдаче НТК по математике студентом гипотеза H_1 — студент сдал экзамен на «2», гипотеза H_2 — на «3», H_3 — на «4», H_4 — на «5».

Формула полной вероятности (ФПВ)

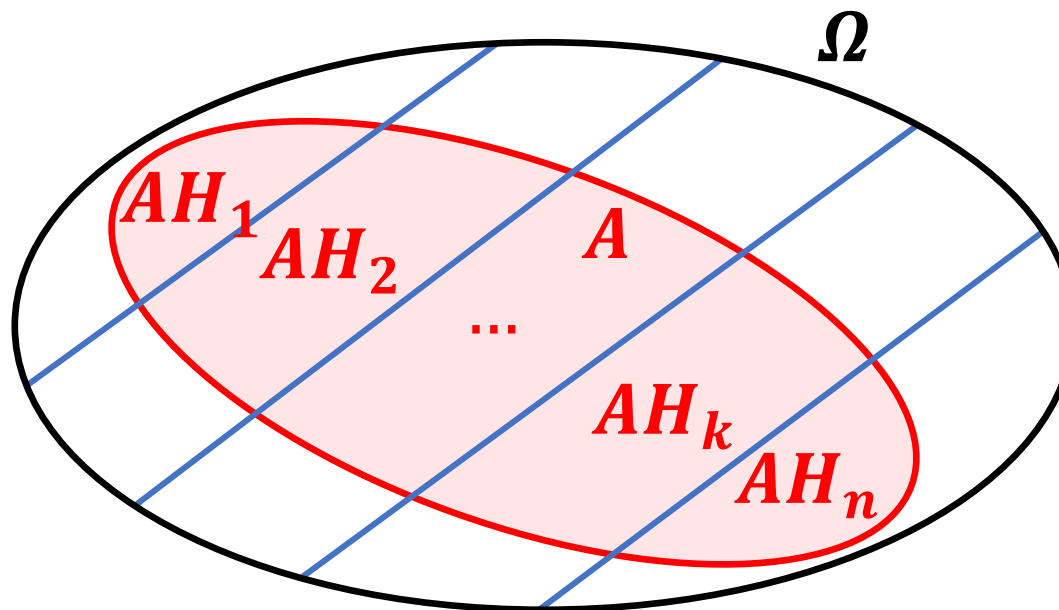
Формула полной вероятностей (ФПВ).

Если в данном опыте имеется n несовместных исходов $H_1, H_2, \dots, H_n$ (гипотез) и A — некоторое событие, которое может произойти в этом опыте, то его вероятность равна

$$p(A) = p_{H_1}(A)p(H_1) + p_{H_2}(A)p(H_2) + \dots + p_{H_n}(A)p(H_n)$$

Формула полной вероятности. Док-во

Док-во. Так как гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно несовместны, события $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ тоже попарно несовместны.



Формула полной вероятности. Док-во

Следовательно, по теореме о вероятности суммы несовместных событий

$$p(A) = p(AH_1) + p(AH_2) + \dots + p(AH_n)$$

По теореме о вероятности произведения, получаем требуемое

$$p(A) = p_{H_1}(A)p(H_1) + p_{H_2}(A)p(H_2) + \dots + p_{H_n}(A)p(H_n) \blacksquare$$

Формула полной вероятности. Задача 4

Задача 4. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим работы наблюдается в 70% случаев, форсированный – в 20%, а недогруженный – в 10%. Вероятность выхода прибора из строя при работе в нормальном режиме равно 0.2, в форсированном – 0.5, а в недогруженном – 0.1. Найти полную вероятность выхода прибора из строя.



Формула полной вероятности. Задача 4

Решение. A : прибор вышел из строя.

H_1 : прибор работал в нормальном режиме

H_2 : прибор работал в форсированном режиме

H_3 : прибор работал в недогруженном режиме

$$p(H_1) = 0.7, p(H_2) = 0.2, p(H_3) = 0.1$$

$$p_{H_1}(A) = 0.2, p_{H_2}(A) = 0.5, p_{H_3}(A) = 0.1$$

$$\begin{aligned} p(A) &= p_{H_1}(A)p(H_1) + p_{H_2}(A)p(H_2) + \\ &\quad + p_{H_3}(A)p(H_3) = \\ &= 0.2 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.1 = 0,25 \end{aligned}$$

Формула полной вероятности. Упр. 3

Упр. 3. [Сотникова Н.Я. Первоапрельский сборник по теории вероятностей]

Симпатичная студентка Люся знает к экзамену только 15 вопросов из 30. Она считает, что если пойдет отвечать вторая, то ее шансы вытянуть «счастливый» билет увеличатся. Права ли она?

Указание: найти вероятности вытянуть «счастливый» билет, если идти первой и если идти второй. Для второй вероятности использовать ФПВ:

H_1 : тот, кто взял билет первым, взял «счастл.» билет.

H_2 : тот, кто взял билет первым, взял «несчастл.» билет.

Ответ: нет: и в том, и другом случае вероятность $\frac{1}{2}$.

Этот слайд можно не конспектировать

Формула Байеса (ФБ)

Формула Байеса (ФБ). Пусть в условиях ФПВ событие A произошло. Тогда эта информация позволяет найти новые вероятности гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$

$$p_A(H_k) = \frac{p(AH_k)}{p(A)} = \frac{p_{H_k}(A)p(H_k)}{p(A)} =$$
$$= \frac{p_{H_k}(A)p(H_k)}{p_{H_1}(A)p(H_1) + p_{H_2}(A)p(H_2) + \dots + p_{H_n}(A)p(H_n)}$$

Формула Байеса. Задача 5

Задача 5. Отношение грузовых машин к легковым машинам, проезжающим по шоссе равно 3:2.

Вероятность того, что грузовая машина поедет на заправку равна 0.1, а легковая – 0.2. Найти отношение грузовых заправляющихся машин к легковым.

Решение.

A — машина подъехала к заправке.

H_1 : по шоссе проезжала грузовая машина

H_2 : по шоссе проезжала легковая машина



Формула Байеса. Задача 5

Необходимо найти отношение $\frac{p_{H_1}(A)}{p_{H_2}(A)}$

$$p(H_1) = \frac{3}{5}, p(H_2) = \frac{2}{5}$$

$$p_{H_1}(A) = 0.1, p_{H_2}(A) = 0.2$$

$$\frac{p_{H_1}(A)}{p_{H_2}(A)} = \frac{\frac{p_{H_1}(A)p(H_1)}{p(A)}}{\frac{p_{H_2}(A)p(H_2)}{p(A)}} = \frac{p_{H_1}(A)p(H_1)}{p_{H_2}(A)p(H_2)} = \frac{0.1 \cdot \frac{3}{5}}{0.2 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$$

Ответ: 3:4

Формула Байеса. Упр. 4

Упр.4 В среднем 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 страдают дальтонизмом. Наугад выбранное лицо является дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Указание:

A : это дальтоник.

H_1 : это мужчина.

H_2 : это женщина.

Необходимо найти $p_{H_1}(A)$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.



Этот слайд можно не конспектировать

Формула Байеса. Упр. 4

Упр.4 В среднем 5 мужчин из 10000 и 25 женщин из 10000 страдают дальтонизмом. Наугад выбранное лицо является дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Указание:

A : это дальтоник.

H_1 : это мужчина.

H_2 : это женщина.

Необходимо найти $p_{H_1}(A)$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.



Этот слайд можно не конспектировать

Формула Байеса. Упр. 5

Упр.5 Три сестры: Алиса, Бетти и Шарлотта поочередно моют посуду. Вероятность разбить тарелку для Алисы – 0.05, для Бетти – 0.03, для Шарлотты – 0.01. Какова вероятность того, что Алиса мыла посуду, если родители услышали звон разбитой тарелки?

Указание:

A : тарелка разбита;

H_1 : это Алиса; H_2 : это Бетти;

H_3 : это Шарлотта.



Необходимо найти $p_{H_1}(A)$.

Ответ: $\frac{5}{9}$.

Этот слайд можно не конспектировать