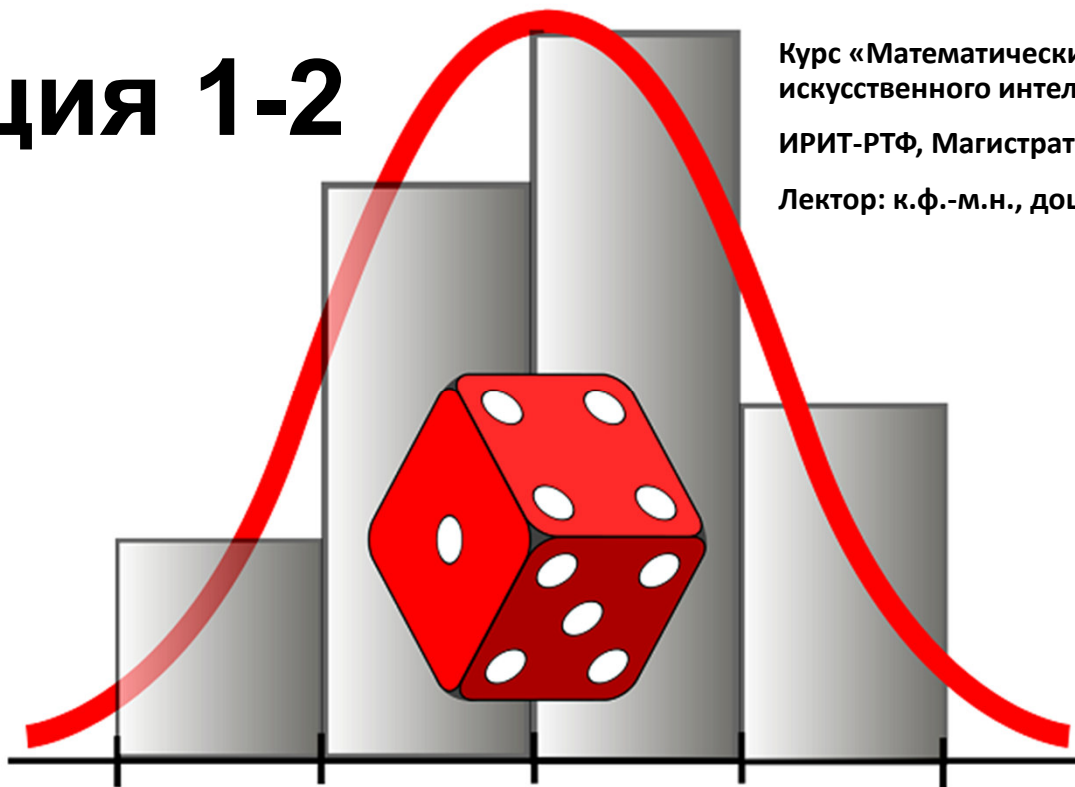


Лекция 1-2

Курс «Математические основы
искусственного интеллекта»

ИРИТ-РТФ, Магистратура (СпецВО)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.



Математические основы искусственного интеллекта Теория вероятностей

Лекция 1-2

Теория вероятностей

Основные понятия

1. Предмет теории вероятностей
2. Элементы комбинаторики
3. Случайное событие. Определение.
4. Три определения вероятностей:
 - классическое,
 - геометрическое,
 - статистическое.

Предмет теории вероятностей

- 1) **Теория вероятностей** изучает закономерности в случайных явлениях (**событиях**).
- 2) **Случайное событие** — такое событие, которое в результате данного опыта может появиться или не появиться (бросание монеты и выпадение орла или решки).

Предмет теории вероятностей

3) Закономерности в таких событиях проявляются только при большом числе независимых повторных **испытаний** — тогда **частота** появления случайного события стабилизируется и всё реже заметно уклоняется от **вероятности** его появления.

Предмет теории вероятностей

4) Если событие не удовлетворяет этому свойству **(статистической устойчивости)**, то оно не является предметом теории вероятностей.

Предмет теории вероятностей

- 5) Простейший вариант опыта, в котором проявляются случайные события, это такой опыт, в котором все возможные исходы **независимы и равновозможны**. Например, бросание монеты, кубика.
- 6) Вероятности случайных событий в таких опытах вычисляются с помощью понятий **комбинаторики**.

Элементы комбинаторики. Перестановки. Задача 1

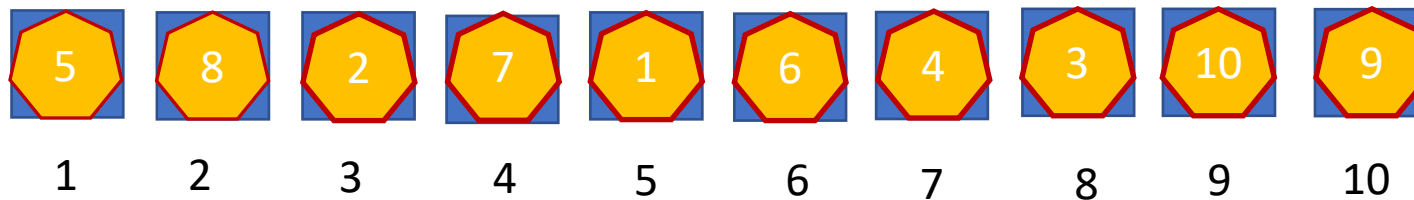
Задача 1. В пассажирском поезде 10 вагонов.
Сколькими способами можно распределить по
вагонам 10 проводников, если за каждым
вагоном закреплен один проводник?



Элементы комбинаторики

Перестановки

Решение.



$$P_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$$

Элементы комбинаторики

Перестановки

Опр. **Перестановка** из n элементов — это последовательность длины n элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$, все элементы которой различны.

Например, $(5, 8, 2, 7, 1, 6, 4, 3, 10, 9)$ — перестановка элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Число перестановок P_n множества A , содержащего n элементов, равно

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Элементы комбинаторики. Перестановки. Упр. 1

Упр. 1. У малыша имеется 5 различных кубиков. Сколькими способами он может из них сделать «башенку», ставя один кубик на другой?

Ответ: 120



Элементы комбинаторики.

Размещения. Задача 2

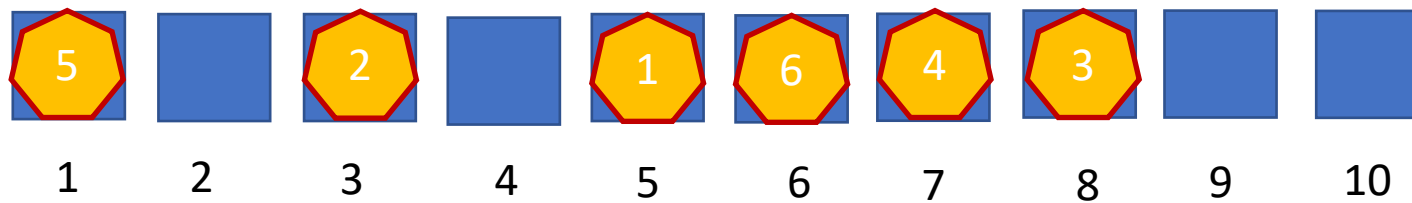
Задача 2. В коворкинг, в котором находится 10 стульев, пришли 6 студентов. Сколькими способами они могут сесть на эти стулья?



Элементы комбинаторики

Размещения

Решение.



$$A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$$

Элементы комбинаторики. Размещения

Опр. **Размещение (без повторений)** из n по k – это последовательность длины k элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$, все элементы которой различны.

Например, $(5, 3, 8, 7, 1, 6)$ – размещение из 10 по 6.

Число размещений из n по k равно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \left[\frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))(n-k) \cdot \cancel{\dots \cdot 2 \cdot 1}}{(n-k) \cdot \cancel{\dots \cdot 2 \cdot 1}} \right]$$

Элементы комбинаторики.

Размещения. Упр. 2

Упр. 2. В высшей лиге первенства по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?



Ответ: 4080

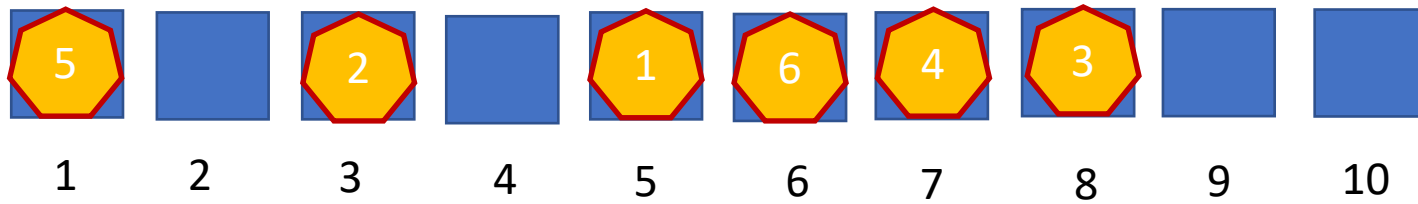
Элементы комбинаторики. Сочетания. Задача 3

Задача 3. Из 10 студентов, не набравших необходимое число баллов по лабораторному практикуму, случайным образом выбирают 6 человек для генеральной уборки в лаборатории. Сколькими способами можно это сделать?



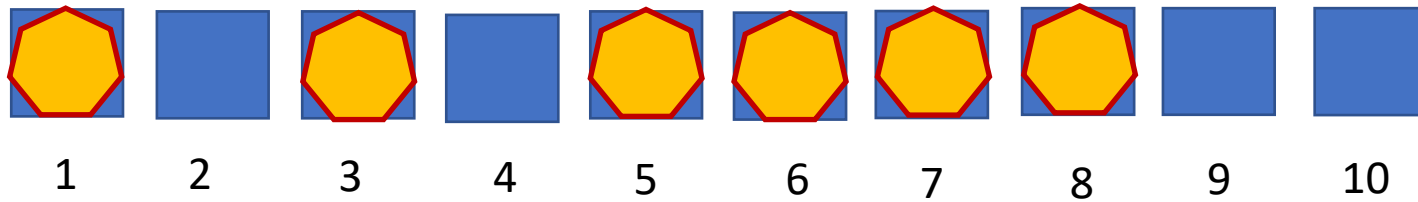
Элементы комбинаторики

Сочетания



Элементы комбинаторики

Сочетания



$$\{1, 3, 5, 6, 7, 8\} \quad C_{10}^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Элементы комбинаторики

Сочетания

Опр. **Сочетание (без повторений)** из n по k – (неупорядоченное) k -элементное подмножество множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Например, $\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$ – сочетание из 10 по 6.

Число сочетаний из n по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Элементы комбинаторики.

Перестановки. Упр. 3

Упр. 3. Вы выбираете 2 вида мороженого из 5-ти возможных видов. Сколькими способами Вы можете это сделать?



Ответ: 10.

Случайное событие. Определение

Опр. **Случайным событием** в данном опыте называется событие, которое может произойти или не произойти.

Случайное событие. Определение

Примеры

Пример 1

Опыт – бросание монеты.



Случайное событие A – выпадение «Герба» (G).

Случайное событие B – выпадение «Решки» (P).

Прочие исходы: монета улетала в космос, упала и осталась стоять ребром, зависла в воздухе и пр. не рассматриваются.

Случайное событие. Определение

Примеры

Пример 2

Опыт – бросание игральной кости.

Случайное событие B – выпадение пяти очков.

Случайное событие C – выпадение шести очков.



Случайное событие. Определение

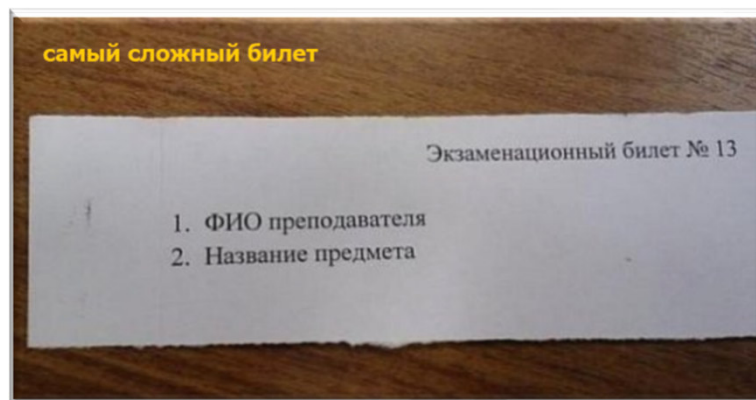
Примеры

Пример 3

Опыт — взять билет на экзамене.

Случайное событие D — взять «легкий» билет.

Случайное событие E — взять «трудный» билет.



Классическое определение вероятностей

Опр. **Вероятностью** $p(A)$ события A называется отношение числа благоприятных исходов к числу всех исходов

$$p(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число всех исходов}}$$

Классическое определение вероятностей.

Задача 4

Задача 4. Бросают монету. Какова вероятность, что выпадет Р.

Решение. Событие A — выпадение Р.

$$n = 2$$

$$m_A = 1$$

$$p(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$$



Классическое определение вероятностей

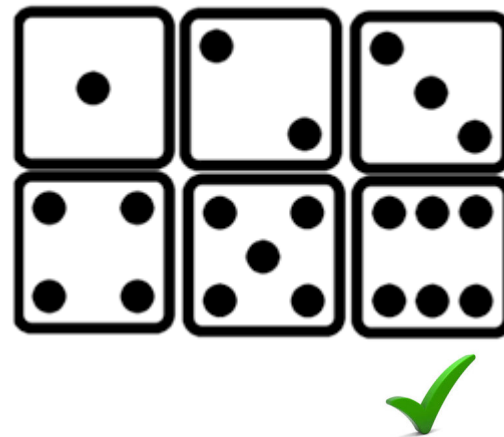
Задача 5

Задача 5. Бросают кубик. Какова вероятность, что выпадет шесть очков.

Решение. Событие A — выпадение шести очков.

$$n = 6, m_A = 1$$

$$p(A) = \frac{1}{6} \approx 0.07$$



Классическое определение вероятностей

Задача 6

Задача 6. Набирая номер, абонент забыл последние три цифры. И помня лишь, что эти три цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность, что абонент дозвонится.

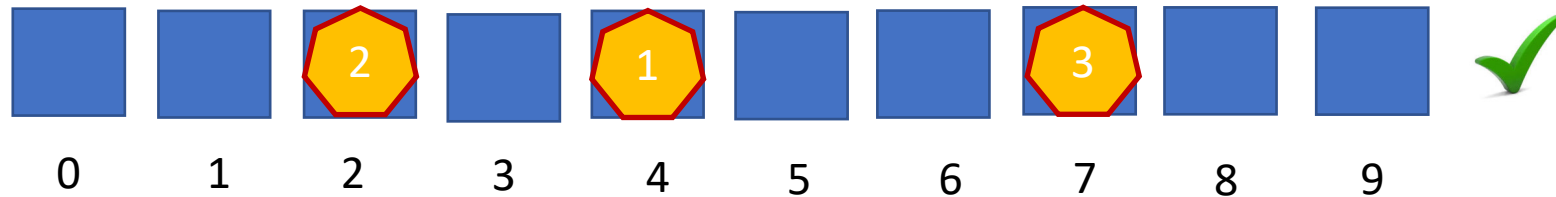
Решение.

Событие A — последние три цифры набраны верно.



Классическое определение вероятностей

Задача 6



$$n = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

$$m_A = 1$$

$$p(A) = \frac{1}{720} \approx 0.08$$

Классическое определение вероятностей

Задача 7

Задача 7. В группе из 25 студентов, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов на концерт. Какова вероятность, что среди обладателей билетов окажутся все девушки?

Решение.

Событие A — среди обладателей окажутся все девушки.



Классическое определение вероятностей

Задача 7

$n = C_{25}^5$ — число выбрать 5 студентов из 25, чтобы вручить им билет.

$m_A = C_{10}^5$ — число выбрать 5 студентов из 10 девушек, чтоб вручить им билет.

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{C_{10}^5}{C_{25}^5} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!}}{\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5!}} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} = \frac{30240}{6375600} \approx 0.005 \end{aligned}$$

Классическое определение вероятностей

Упр. 4

Упр. 4. [Сотникова Н.Я. Первоапрельский сборник по теории вероятностей]

Когда Костя Сидоров, ученик 6 «б» класса, наконец-то обнаружил в буфете кулек с конфетами, он услышал, как отворилась входная дверь. Это пришла из магазина бабушка Пелагея Марковна. Времени на выбор не было, и Костя, запустив руку в кулек, едва успел переместить к себе в карман одну конфету. Какова вероятность того, что ему достался «Мишка на Севере», если в кульке было 7 конфет с помадкой, 6 соевых батончиков и 8 «Мишек на Севере»?

Ответ: примерно 0,38.



Этот слайд можно не конспектировать

Классическое определение вероятностей

Упр. 5

Упр. 5. [Сотникова Н.Я. Первоапрельский сборник по теории вероятностей]

Пустые горшочки с медом Винни-Пух ставит на полочку вместе с полными для того, чтобы вид уменьшающегося числа горшков не слишком портил ему настроение. В настоящий момент в Пуховом буфете попеременно стоят 5 горшочков с медом и 6 абсолютно пустых. Какова вероятность того, что в двух взятых на ужин горшочках окажется мед?

Ответ: $\frac{2}{11}$.

Указание: решение принимается только по формуле классической вероятности.

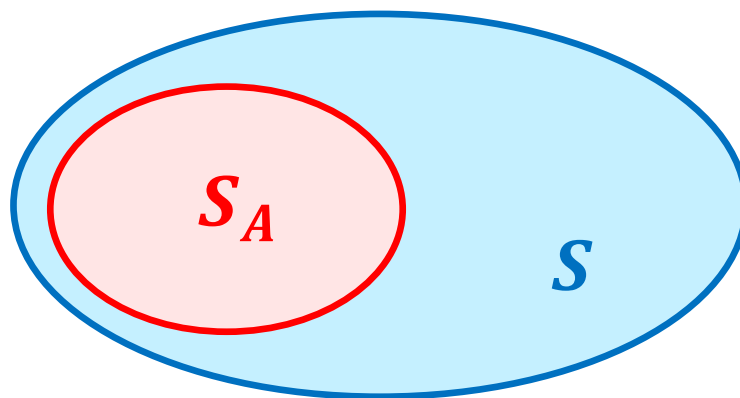


Этот слайд можно не конспектировать

Геометрическое определение вероятностей

Опр. **Вероятностью** $p(A)$ события A называется отношение площади множества благоприятных исходов к площади множества всех исходов

$$p(A) = \frac{S_A}{S} = \frac{\text{площадь множества благоприятных исходов}}{\text{площадь множества всех исходов}}$$



Геометрическое определение вероятностей. Задача 8

Задача 8. Маша назначила свидание Мише между 12:00 и 13:00. Если Маша приходит до Миши, она обижается и уходит. Если Миша приходит раньше Маши, он ждет полчаса и, обидевшись, уходит. С какой вероятностью произойдет свидание?



Решение. Пусть x — время прихода Миши, y — время прихода Маши. Тогда $x, y \in [0; 1]$.

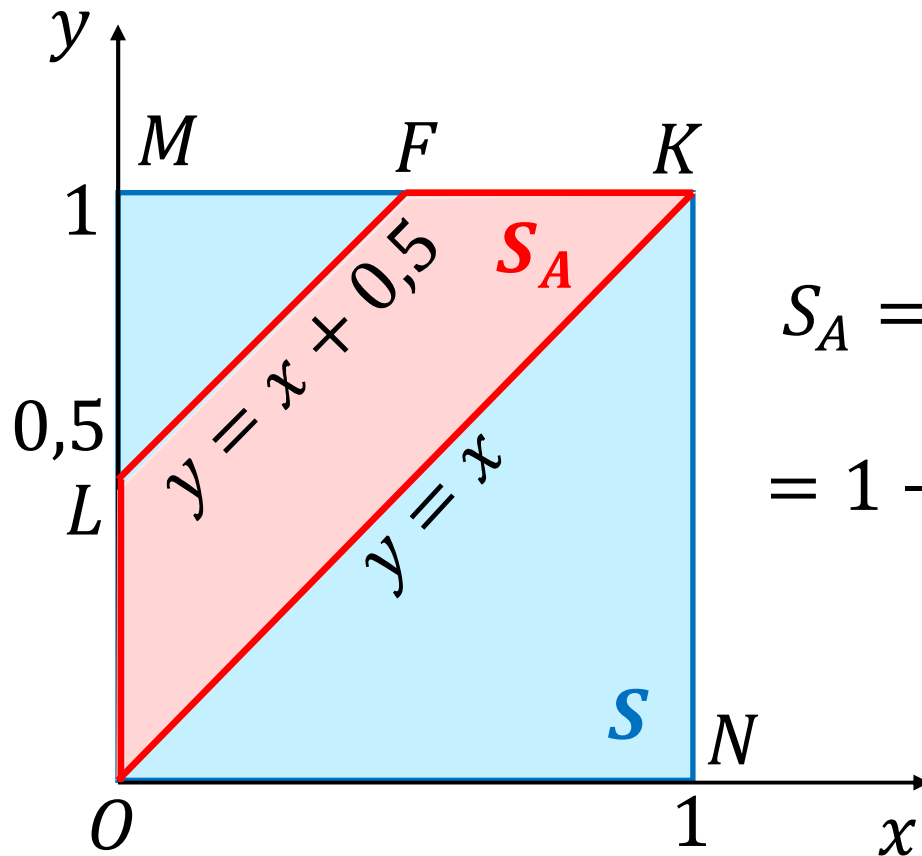
Геометрическое определение вероятностей. Задача 8

Пусть событие A — свидание произойдет.

Тогда $y \geq x$ и $y - x \leq 0,5$, т.е. $x \leq y \leq x + 0,5$.

Изобразим множество благоприятных исходов и множество всех исходов и вычислим площади этих множеств S_A и S соответственно.

Геометрическое определение вероятностей. Задача 8



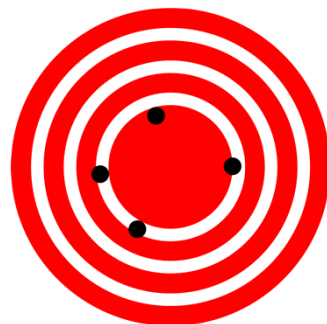
$$S = S_{OMKN} = 1$$

$$\begin{aligned} S_A &= S_{OMKN} - S_{LMF} - S_{OKN} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,25 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,375 \end{aligned}$$

$$p(A) = \frac{S_A}{S} = 0,375$$

Геометрическое определение вероятностей. Упр. 6

Упр. 6. В круглую мишень попала пуля. Найдите вероятность того, что расстояние от центра мишени до пробоины меньше половины радиуса мишени.



Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача Бюффона (1733 г.)

Плоскость расчерчена сеткой параллельных прямых, расстояние между которыми равно a . На эту плоскость бросают один раз «тонкую иглу» (фактически отрезок) длины $l < a$.

Найти вероятность того, что эта игла пересечёт одну из параллельных линий сетки.

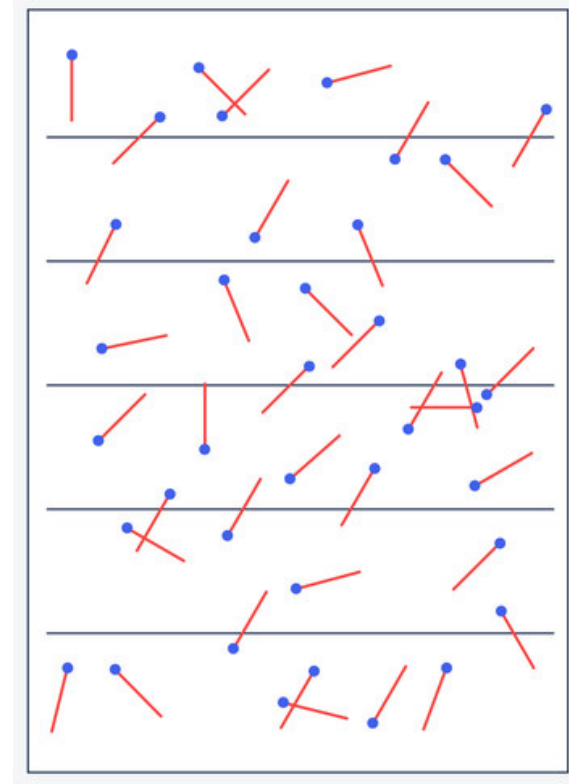


Жорж Луи Бюффон (1707–1788) —
французский натуралист, биолог, математик,
естествоиспытатель и писатель

Задача Бюффона. Комментарии

1) В силу условия $l < a$ игла может пересечь не более одной из параллельных линий сетки;

2) не имеет значения, с какой именно прямой будет пересечение или как именно брошена игла;



этот слайд можно не конспектировать

Задача Бюффона. Комментарии

3) пересечет ли игла прямую сетки, зависит от того, где (по отношению к сетке линий) расположена середина иглы и каков угол между иглой и перпендикуляром, опущенным из середины иглы на ближайшую прямую;

4) поэтому в задаче можно предполагать, что фиксированы две соседних параллельных прямых сетки: MN и M_1N_1 (рис.1).

этот слайд можно не конспектировать

Задача Бюффона (1733 г.). Рис. 1

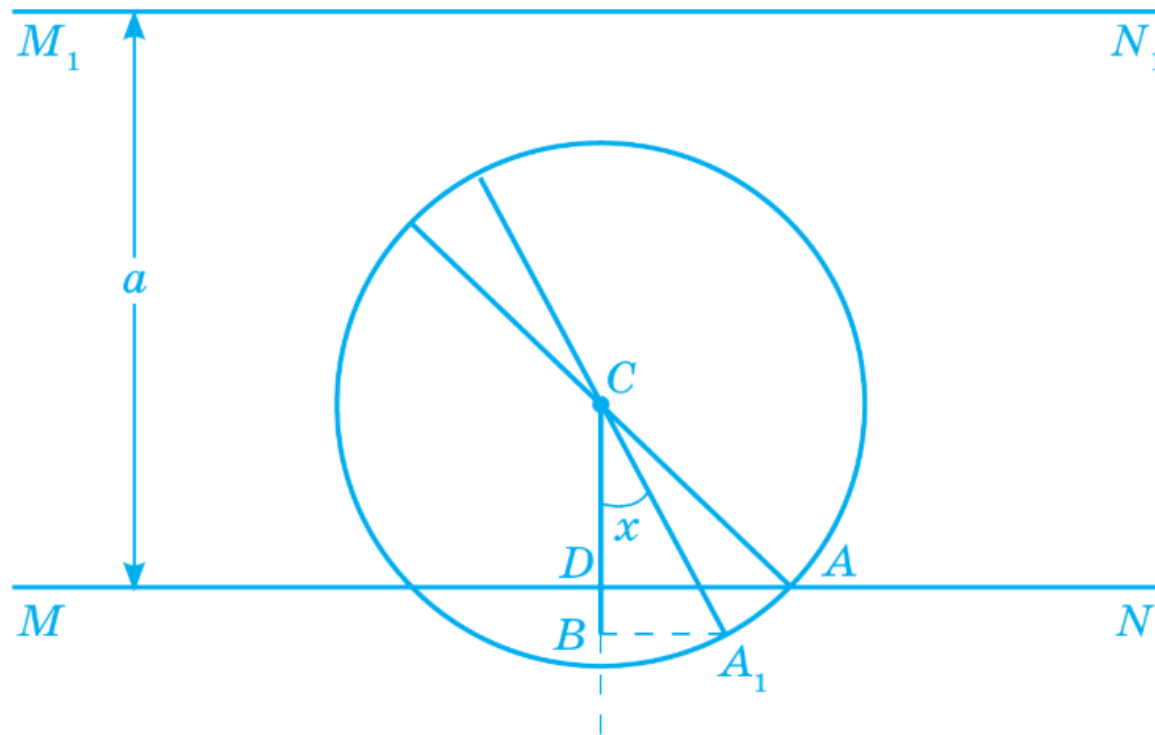


Рис. 1

Задача Бюффона (1733 г.). Комментарии

5) середина иглы, — точка C , лежит ближе к прямой MN ;

6) CD — перпендикуляр, опущенный из т. C на прямую MN ;

7) т. A , определяющая крайнее положение иглы, при котором она ещё пересекается с прямой MN , выбрана расположенной справа от перпендикуляра CD (рис. 1).

Задача Бюффона (1733 г.). Решение

Обозначим для сокращения: $x = \angle DCA_1, y = |CD|$

Тогда

числа x, y можно считать координатами точки на плоскости, причем в силу сделанных предположений при любом положении иглы относительно прямой MN выполняются условия:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{a}{2}.$$

Задача Бюффона (1733 г.). Решение

Иначе говоря, множество всех исходов можно представить прямоугольником $OKLF$ (рис. 2), где

$$OF = \frac{\pi}{2}, OK = \frac{a}{2}.$$

Тогда площадь этого прямоугольника, представляющего множество всех возможных положений иглы относительно прямой MN , равна

$$S = \frac{\pi a}{4}$$

Задача Бюффона (1733 г.). Рис. 2

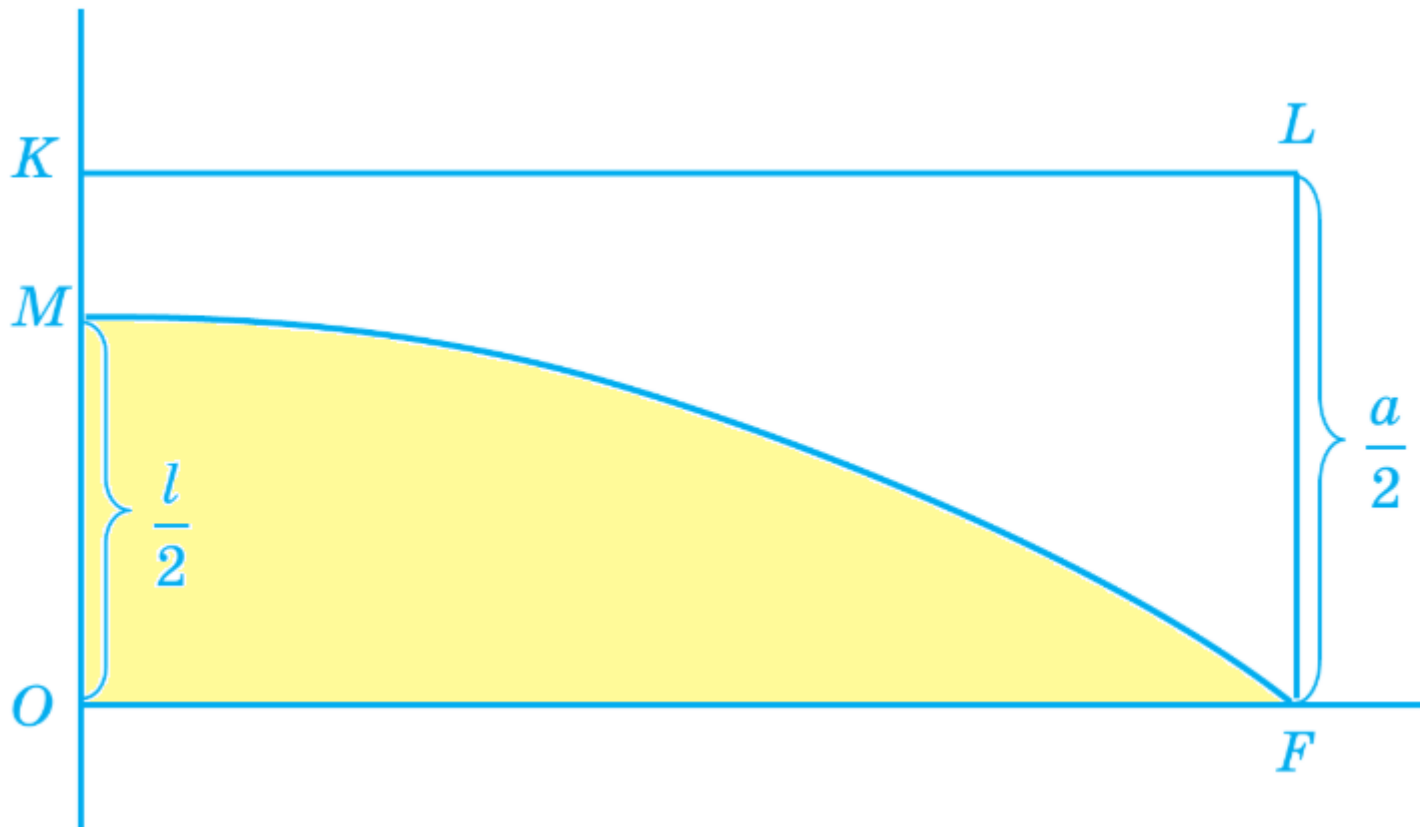


Рис. 2

Задача Бюффона (1733 г.). Решение

Найдем геометрическое место тех точек в прямоугольнике $OKLF$, которые представляют событие пересечения иглы с прямой MN .

Из рис.1 следует, что если

$$CD \leq CB$$

т.е.

$$y \leq \frac{l}{2} \cos x$$

Задача Бюффона (1733 г.). Решение

Следовательно, в системе координат xOy

получаем следующее представление множества всех возможных положений иглы — это прямоугольник $OKLF$

и множество точек, при которых имеет место пересечение иглы и прямой MN , — криволинейная трапеция OMF , ограниченная сверху графиком функции

$$y = \frac{l}{2} \cos x$$

Задача Бюффона (1733 г.). Решение

Как мы видели выше, искомую вероятность мы находим как отношение площадей:

$$p = \frac{S_{OMF}}{S_{OKLF}}$$

При этом $S_{OKLF} = \frac{\pi a}{4}$ и

$$S_{OMF} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos x dx = \frac{l}{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2}$$

Задача Бюффона (1733 г.). Ответ

Значит,

$$p = \frac{2l}{\pi a}$$

Из формулы вероятности для опыта Бюффона следует, что

$$\pi = \frac{2l}{pa}$$

Задача Бюффона. Забавные факты

Было несколько попыток проверить возможность вычисления числа π с помощью опыта Бюффона:

R. Volf (середина XIX в.) бросал иглу ($l = 36$ мм) 5000 раз на сетку с $a = 45$ мм.

Игла пересекла линии сетки 2532 раза, что дало частоту этого события (0.5064) достаточно близкую к точному значению (0.5093).

Приближенное значение числа π в этом эксперименте оказалось равным 3,159.

этот слайд можно не конспектировать

Задача Бюффона. Забавные факты

М.А. Smith (1855 г.): 3204 бросания, $\pi \approx 3,1553$.

Fox (1894 г.): 1120 бросаний, $\pi \approx 3,1419$

М. Lazzarini (1901 год). Провёл 34 080 бросаний
иглы и получил значение
 $\pi \approx 3,1415929$.

этот слайд можно не конспектировать

Геометрическое определение вероятности

Упр 7. Вернувшись из отпуска, Иван обнаружил, что часы давно остановились. Найдите вероятность того, что время, которое показывают часы, отличается от действительного времени, не больше, чем на 30 мин.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

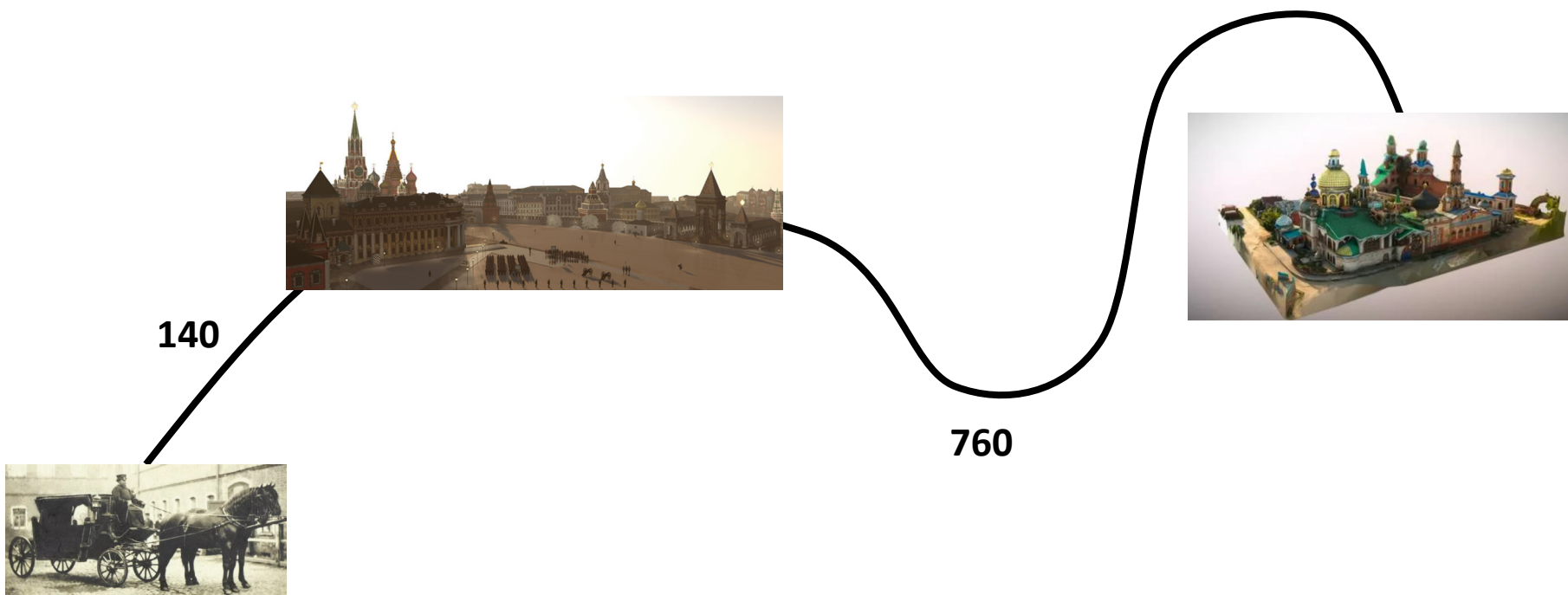


Геометрическое определение вероятности

Упр 8. В самом начале поэмы Н. В. Гоголя «Мёртвые души» два мужика спорят относительно того, как далеко доедет колесо в экипаже Чичикова: «...Два русских мужика, стоявшие у дверей кабака против гостиницы, сделали кое-какие замечания, относившиеся впрочем более к экипажу, чем к сидевшему в нём. «Вишь ты», сказал один другому: «вон какое колесо! Что ты думаешь, доедет то колесо, если б случилось, в Москву, или не доедет?» – «Доедет», – отвечал другой. «А в Казань-то, я думаю, не доедет?» – «В Казань не доедет», – отвечал другой».

Предположим, что путь от упомянутой гостиницы в Казань ведёт через Москву и что до Москвы 140 вёрст, а от Москвы до Казани ещё 760 вёрст. Будем считать, что колесо обязательно сломается, причём это может случиться в любой момент на пути от гостиницы до Казани. Найдите вероятность того, что колесо до Москвы не доедет.

Геометрическое определение вероятности



Ответ: $\frac{7}{45}$.

Статистическое определение вероятности

Опр. **Вероятность** $p(A)$ события A при многократном повторении опыта приближенно равна **частоте** наступления события A .

$$p(A) \approx w_A = \frac{m}{n} =$$
$$= \frac{\text{число опытов, в которых событие } A \text{ наступило}}{\text{число повторений опыта}}$$

Статистическое определение вероятности. Задача 9

Задача 9.[\[Решу ОГЭ\]](#)

Известно, что в некотором регионе вероятность того, что родившийся младенец окажется мальчиком, равна 0,512. В 2010 г. в этом регионе на 1000 родившихся младенцев в среднем пришлось 477 девочек. На сколько частота рождения девочек в 2010 г. в этом регионе отличалась от вероятности этого события?

Статистическое определение вероятности. Задача 9. Решение

Решение.

Пусть событие A – рождение девочки.

Тогда $p(A) = 1 - 0,512 = 0,488$

$n = 1000, m = 477$

$$w_A = \frac{m}{n} = \frac{477}{1000} = 0,477$$

$$|w_A - p(A)| = 0,011$$

