Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, -2, -1, 1),\ a_2 = (5, -3, -2, -4),\ a_3 = (3, -3, -2, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 1, -13, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, 1),\ a_2 = (5, -3, -2, -4),\ a_3 = (4, -3, -2, -4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-1, 1, 2, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 12 & 9 & -12 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

10. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(11+2t)x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_3^2 + (16+2t)x_1x_2 + (6+2t)x_1x_3 + 6x_2x_3$ положительно определена.

11. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

12. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

13. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, 2),\ a_2 = (2, 2, 3, 1),\ a_3 = (1, 1, 3, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-8, -11, 10, 6)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, 2),\ a_2 = (2, 2, 3, 1),\ a_3 = (1, 1, 3, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-4, -2, 1, 0),\ e_3 = (-6, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.35 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 8x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(3 + 2t)x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - (4 + 2t)x_1x_2 - (2 + 2t)x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -3, 4, -2)$, $a_3 = (1, -2, 3, -2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5, 1, 9, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, -5, 1, 1)$, $a_2 = (1, -3, 4, -2)$, $a_3 = (1, -2, 3, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 2, -1, 0)$, $e_3 = (0, -1, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(8+2t)x_1^2 + (7-2t)x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 - (8+2t)x_1x_3 + (8-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, -2, 2),\ a_2 = (2, 0, -3, 3),\ a_3 = (3, -1, -4, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (6, -8, 2, 8)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 1, -7, 2),\ a_2 = (2, 5, -3, 3),\ a_3 = (3, -1, -4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, -2, 0),\ e_2 = (-1, 1, 2, 0),\ e_3 = (0, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.35 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $6x_1^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(24 + 2t)x_1^2 + (7 - 2t)x_2^2 + (3 + 2t)x_3^2 + 16x_1x_2 + 4tx_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 6x_2 y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, -1, 0, -1),\ a_2 = (0, -2, -1, -4),\ a_3 = (-3, -1, -2, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1, 1, 3, -5)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, 1, 1),\ a_2 = (5, 3, -7, -4),\ a_3 = (4, -3, -2, -1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 2, 0),\ e_2 = (2, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, -1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 - 8x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(24+2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4+2t)x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 + (16+4t)x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 6

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $a_3 = (-1, 1, 1, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, 1, 0, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, -2, 2)$, $a_2 = (-2, 2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, -3, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, -6, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.75 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.65 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 11y^2 + 2z^2 - 16xy - 20xz + 4yz + 2x + 10y - 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(7-2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4-2t)x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 + (4t-8)x_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 2, -1, -1),\ a_2 = (3, 0, -2, -5),\ a_3 = (3, -2, -1, -7)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5, 1, 9, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 1, 1),\ a_2 = (1, 3, 4, -2),\ a_3 = (1, 2, 3, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -2, 0, 0),\ e_2 = (0, 4, -1, 0),\ e_3 = (0, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,05 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.45 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $x^2 + 10y^2 - 2z^2 - 20xy + 28xz + 8yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $7x_1^2 + 3x_2^2 + (4-2t)x_3^2 + (2t-6)x_1x_2 + (2t-4)x_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, 0, 1, 1),\ a_2 = (2, 0, 1, -4),\ a_3 = (2, 0, 1, -9)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (2, 1, 3, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 1, 7, 2),\ a_2 = (2, 5, 3, 3),\ a_3 = (3, -1, 4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, -1, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,15 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,45 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.15 & 0.5 \\ 0.25 & 0.35 & 0.15 \\ 0.3 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-7x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 4xy + 20xz + 16yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $18x_1^2 + 7x_2^2 + (4+2t)x_3^2 + (18+2t)x_1x_2 - (12+2t)tx_1x_3 - (8+2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, -2),\ a_2 = (2, -1, 1, -4),\ a_3 = (1, -1, 1, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (7, -13, 11, 3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, -1),\ a_2 = (5, -3, -2, 4),\ a_3 = (4, -3, -2, 4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-1, 1, 2, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,25 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,15 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.15 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 14y^2 - z^2 - 28xy + 32xz + 4yz + 2x - 2y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, -1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-1, 0, -1, 1),\ a_2 = (-2, 0, -1, 1),\ a_3 = (-3, 0, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-4, 1, 0, -1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, -2),\ a_2 = (2, 2, 3, -1),\ a_3 = (1, 1, 3, -1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -3, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,15 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.15 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $7x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 16yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 11

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, -1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 0, 2, 1),\ a_2 = (3, 2, 3, -1),\ a_3 = (3, 4, 4, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-3, -9, 9, -9)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (-1, -5, 1, 1),\ a_2 = (-1, -3, 4, -2),\ a_3 = (-1, -2, 3, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -4, -2, 0),\ e_2 = (1, -1, -1, 0)$, $e_3 = (0, 2, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,35 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 0,15 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.15 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $11x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 16xy - 4xz - 20yz + 2x + 10y - 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(11+2t)x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 + (16+2t)x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (0, 1, 1, -2)$, $a_2 = (1, 0, 1, -5)$, $a_3 = (1, 0, 0, -3)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (4, 0, 2, -2)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 2, -7, 2)$, $a_2 = (2, 4, -3, 3)$, $a_3 = (4, -1, -4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 4, -1, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,25 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,25 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.15 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $10x^2 + y^2 + 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(7-2t)x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 - 6tx_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -2, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, -2, 1, 1),\ a_2 = (1, -4, 1, 2),\ a_3 = (1, -2, -1, 3)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-3, 1, 5, 7)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -4, 1, 1),\ a_2 = (5, 3, -4, -4),\ a_3 = (4, -3, -4, -1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (1, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,25 & 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,45 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.08 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 - 4xy - 16xz - 20yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(11 - 4t)x_1^2 + (3 + 2t)x_2^2 + 3x_3^2 + (2t + 4)x_1x_2 + (2t - 10)x_1x_3 + (2t + 4)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.
368

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 2, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-1, -1, 1, 1),\ a_2 = (-3, -1, 2, 2),\ a_3 = (-3, 1, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, 0, -2, 4)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (7, 3, -2, 2),\ a_2 = (-7, 2, 3, 1),\ a_3 = (7, 1, -3, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-3, 1, 0, 0),\ e_3 = (-1, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,55 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,15 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -11 & 10 & -2 \\ 10 & -14 & -8 \\ -2 & -8 & -20 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_4^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $14x^2 + 5y^2 - z^2 - 28xy - 4xz - 32yz - 6x + 6y + 6z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(19+4t)x_1^2+(3+2t)x_2^2+(7-2t)x_3^2+(6t+4)x_1x_2+(2t+8)x_1x_3-2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-1, 1, 0, 1),\ a_2 = (-1, 2, 1, 1),\ a_3 = (-1, 2, 1, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1, 3, -1, -1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 4, 1),\ a_2 = (1, 3, 7, -2),\ a_3 = (1, 2, 6, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (-1, 0, 2, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (-1, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,05 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,35 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,15 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 10x_2x_3 - 4x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy - 8xz + 8yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(19 + 4t)x_1^2 + (4 - 2t)x_2^2 + 7x_3^2 + (2t - 4)x_1x_2 + (4t + 18)x_1x_3 + (4 - 2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, -2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, 0, -1, 3),\ a_2 = (1, 0, -1, 5),\ a_3 = (4, 0, -3, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (6, 9, 1, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (4, 1, 7, 2),\ a_2 = (4, 5, 3, 3),\ a_3 = (3, -1, 4, 4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -6, -3, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 2, 1, -2),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,15 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,45 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 20xy - 4xz + 16yz + 6x - 6y - 6z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(7-2t)x_1^2+(4-2t)x_2^2+3x_3^2+(4t-8)x_1x_2+(2t-8)tx_1x_3+(4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (0, 1, 1, -1)$, $a_2 = (-1, 0, 0, -4)$, $a_3 = (-1, 0, -1, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (3, -1, -1, -5)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, -5, 1, 7)$, $a_2 = (1, -3, 4, -8)$, $a_3 = (1, -2, 3, -9)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-5, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,15 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,35 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$ Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-2x^2 + y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $7x_1^2 + (4 - 2t)x_2^2 + 3x_3^2 + (2t - 4)x_1x_2 + (2t - 6)x_1x_3 + (4 - 2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 8x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 3, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 2, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 2, 0, -3)$, $a_3 = (0, 1, 0, -2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1, 1, 1, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (9, 1, -7, 2)$, $a_2 = (8, 5, -3, 3)$, $a_3 = (7, -1, -4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 3, -2)$, $e_3 = (0, 0, -3, 2)$, $e_4 = (0, 0, -2, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,35 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,25 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 9 & 12 & -12 \\ 12 & 15 & 0 \\ -12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $6x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-4x^2 - 7y^2 + 2z^2 + 20xy - 16xz + 4yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $15x_1^2 + (4+2t)x_2^2 + 7x_3^2 + (4t+12)x_1x_2 - (4t+12)tx_1x_3 - (8+2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -3, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, 2, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $a_2 = (4, 1, 3, 4)$, $a_3 = (3, 1, 1, 2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (3, -5, 1, 5)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (6, -2, 1, 1)$, $a_2 = (9, 3, -7, -4)$, $a_3 = (8, -3, -2, -1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,25 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,45 & 0,15 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{30} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 32xy - 4xz + 28yz + 2x + 10y - 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-(11 + 2t)x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 - (16 + 2t)x_1x_2 - 10x_1x_3 - 8x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 8x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 3, 1, -2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 2, 1, -1),\ a_2 = (1, 5, 0, 0),\ a_3 = (1, 4, -1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 3, 11, 11)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, -7, 2),\ a_2 = (-2, 2, 3, 1),\ a_3 = (1, 1, -9, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-3, 1, -1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,05 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,15 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_4^2 - 10x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz + 2x + 10y + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(2t-7)x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + (8-2t)x_1x_2 + 6tx_1x_3 - 4x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 21

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, 3, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (4, 2, -3, -6),\ a_2 = (6, -2, -3, -12),\ a_3 = (3, -2, -1, -7)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (5, -1, -9, -1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 2, 1),\ a_2 = (1, 3, 3, -2),\ a_3 = (1, 2, 4, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -2, 0, 1),\ e_2 = (0, 4, -1, 0),\ e_3 = (0, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,05 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,55 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15} & \frac{7}{20} & \frac{11}{60} \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_4^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $2x^2 + 11y^2 + 5z^2 - 4xy + 20xz + 16yz + 6x - 6y - 6z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(4t-11)x_1^2 - (3+2t)x_2^2 - 3x_3^2 - (2t+4)x_1x_2 + (10-2t)x_1x_3 - (2t+4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, 1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (4, 0, 2, 1),\ a_2 = (6, 0, 3, -4),\ a_3 = (2, 0, 1, -9)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, -1, -3, 3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 9, 7, 2),\ a_2 = (2, 8, 3, 3),\ a_3 = (3, -7, 4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, -1, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 1, 1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,65 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,05 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{7} & \frac{11}{60} \\ \frac{2}{15} & \frac{11}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-2x^2 + 10y^2 + z^2 - 8xy + 28xz + 20yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-(19 + 4t)x_1^2 - (3 + 2t)x_2^2 + (2t - 7)x_3^2 - (6t + 4)x_1x_2 - (2t + 8)x_1x_3 + 2x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 8x_2 y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, -1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, 3, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, 0, 3, -6)$, $a_2 = (3, -2, 2, -8)$, $a_3 = (1, -1, 1, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-7, 13, -11, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -5, -1, -1)$, $a_2 = (5, -6, -2, 4)$, $a_3 = (4, -7, -2, 4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & =1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,05 & 0,45 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,05 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{18}{35} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15} & \frac{2}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 & -1 \\ 7 & -9 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -9 & 7 \\ -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-4x^2 + 2y^2 - 7z^2 - 16xy + 20xz + 4yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-(19 + 4t)x_1^2 + (2t - 4)x_2^2 - 7x_3^2 + (4 - 2t)x_1x_2 - (4t + 18)x_1x_3 + (2t - 4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 24

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 9x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, -1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-3, 0, -2, 2),\ a_2 = (-2, 0, -1, 1),\ a_3 = (-3, 0, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (4, -1, 0, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, -9),\ a_2 = (2, 2, 3, -5),\ a_3 = (1, 1, 3, -6)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -3, 0, 0),\ e_2 = (1, -2, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 1),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,15 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,1 & 0,45 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,45 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_3 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{60} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $7x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-x^2 + 14y^2 + 5z^2 - 4xy + 32xz + 28yz + 2x - 2y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(2t-7)x_1^2 + (2t-4)x_2^2 - 3x_3^2 + (8-4t)x_1x_2 + (8-2t)tx_1x_3 + (2t-4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 25

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3, 1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, -1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (4, 2, 5, 0),\ a_2 = (6, 6, 7, -6),\ a_3 = (3, 4, 4, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 3, -3, 3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (-1, -5, 3, 1),\ a_2 = (-1, -3, 5, -2),\ a_3 = (-1, -2, 7, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -4, -2, 0),\ e_2 = (1, -1, -1, 0),\ e_3 = (0, 2, 1, 0),\ e_4 = (1, -1, -1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,25 & 0,15 & 0,1 & 0,4 \\ 0,15 & 0,45 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.375 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.225 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $11x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 16xz - 20yz + 2x - 2y + 10z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-7x_1^2 + (2t-4)x_2^2 - 3x_3^2 + (4-2t)x_1x_2 + (6-2t)x_1x_3 + (2t-4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 26

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, 3, 1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, -1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, -7)$, $a_2 = (1, 0, 1, -5)$, $a_3 = (1, 1, 1, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, 0, -1, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^{\top}$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (9, 2, -7, 2)$, $a_2 = (7, 4, -3, 3)$, $a_3 = (5, -1, -4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (1, 4, -1, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,25 \\ 0,2 & 0,15 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,45 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.225 & 0 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 & -1 \\ 7 & -9 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -9 & 7 \\ -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 7x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $10x^2 - 2y^2 + z^2 - 8xy - 20xz - 28yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-15x_1^2 - (4+2t)x_2^2 - 7x_3^2 - (4t+12)x_1x_2 + (4t+12)tx_1x_3 + (8+2t)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 27

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, -3, 1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, 1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, -2, 1, 1)$, $a_2 = (1, -4, 1, 2)$, $a_3 = (1, -2, -1, 3)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (3, -1, -5, -7)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -3, 1, 1)$, $a_2 = (5, 5, -4, -4)$, $a_3 = (4, -7, -4, -1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,35 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,35 \\ 0,4 & 0,3 & 0,15 & 0,15 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.135 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0.45 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 8x_2^2 + 5x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $20x^2 + 14y^2 + 11z^2 - 16xy - 4xz - 20yz + 8x + 4y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-(8+2t)x_1^2 + (2t-7)x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_2 + (8+2t)x_1x_3 + (2t-8)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 28

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 9x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3, -1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, -1, 1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-4, -4, 3, 3),\ a_2 = (-3, -1, 2, 2),\ a_3 = (-3, 1, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 0, 1, -2)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (7, 3, -2, 9),\ a_2 = (-7, 2, 3, 7),\ a_3 = (7, 1, -3, 5)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-4, 1, 1, 0),\ e_3 = (-1, 0, 1, 1),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,25 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,25 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы
$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.92 & 0 & 0.2 \\ 0.0625 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 0 & 0.76 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -9 & 5 & -3 & -1 \\ 5 & -9 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -9 & 5 \\ -1 & -3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $7x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_4^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $3x^2 + 6y^2 - 9z^2 - 36xy + 24xz - 12yz + 8x + 4y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-(24 + 2t)x_1^2 + (2t - 7)x_2^2 - (3 + 2t)x_3^2 - 16x_1x_2 - 4tx_1x_3 + 2x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 29

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 3, 4)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 2, 1, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-2, 3, 1, 2),\ a_2 = (-1, 2, 1, 1),\ a_3 = (-2, 4, 2, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, -3, 1, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 4, 8),\ a_2 = (1, 3, 7, -6),\ a_3 = (1, 2, 6, -4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (-1, 0, 2, 1),\ e_2 = (0, 1, 0, 1),\ e_3 = (-1, 0, 1, 1),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0,25 & 0,3 \\ 0,25 & 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,45 & 0,2 & 0,15 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0.1 \\ 0.375 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $7x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 10x_2x_3 - 4x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $14x^2 - y^2 + 5z^2 - 4xy - 28xz - 32yz + 6x - 6y - 6z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $-(24+2t)x_1^2 - 3x_2^2 - (4+2t)x_3^2 + (8-2t)x_1x_2 - (16+4t)x_1x_3 - 2tx_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 30

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, -3, 4)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(3, 2, 1, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (3, 0, -2, 8)$, $a_2 = (5, 0, -4, 6)$, $a_3 = (4, 0, -3, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (12, 18, 2, 2)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (4, 9, 7, 2)$, $a_2 = (4, 7, 3, 3)$, $a_3 = (3, -5, 4, 4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -5, -3, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 2, 1, -2)$, $e_4 = (0, 1, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,15 \\ 0,1 & 0,55 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,15 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,7 & 0,25 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.2 \\ 1.575 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.75 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -12 & 12 & 0 \\ 12 & -18 & -12 \\ 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $8x_1^2 - 7x_2^2 - 4x_3^2 + 3x_4^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $2x^2 - 4y^2 - 7z^2 - 16xy - 4xz - 20yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(2t-7)x_1^2 - 3x_2^2 + (2t-4)x_3^2 + (8-2t)x_1x_2 + (8-4t)x_1x_3 + (2t-4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 31

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, -2, -1, 1)$, $a_2 = (5, -3, -2, -4)$, $a_3 = (3, -3, -2, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 1, -13, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, 1)$, $a_2 = (5, -3, -2, -4)$, $a_3 = (4, -3, -2, -4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,05 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,35 & 0,15 \\ 0,2 & 0,2 & 0,15 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 & 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 12 & 9 & -12 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(11 + 2t)x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_3^2 + (16 + 2t)x_1x_2 + (6 + 2t)x_1x_3 + 6x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 32

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, 2),\ a_2 = (2, 2, 3, 1),\ a_3 = (1, 1, 3, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-8, -11, 10, 6)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, 2),\ a_2 = (2, 2, 3, 1),\ a_3 = (1, 1, 3, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-4, -2, 1, 0),\ e_3 = (-6, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} 0,15 & 0,15 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,45 & 0,1 & 0,3 \\ 0,25 & 0,2 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы
$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.47 & 0 & 0.2 \\ 2.475 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.37 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 8x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(3 + 2t)x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - (4 + 2t)x_1x_2 - (2 + 2t)x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 33

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -3, 4, -2)$, $a_3 = (1, -2, 3, -2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5, 1, 9, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, -5, 1, 1)$, $a_2 = (1, -3, 4, -2)$, $a_3 = (1, -2, 3, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 2, -1, 0)$, $e_3 = (0, -1, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.55 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 1.575 & 0 & 0.45 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(8+2t)x_1^2 + (7-2t)x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 - (8+2t)x_1x_3 + (8-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 34

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, -2, 2),\ a_2 = (2, 0, -3, 3),\ a_3 = (3, -1, -4, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (6, -8, 2, 8)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 1, -7, 2),\ a_2 = (2, 5, -3, 3),\ a_3 = (3, -1, -4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, -2, 0),\ e_2 = (-1, 1, 2, 0),\ e_3 = (0, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.65 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0 & 0.2 \\ 1.5 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0 & 0.75 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $6x_1^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(24 + 2t)x_1^2 + (7 - 2t)x_2^2 + (3 + 2t)x_3^2 + 16x_1x_2 + 4tx_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 35

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, -1, 0, -1)$, $a_2 = (0, -2, -1, -4)$, $a_3 = (-3, -1, -2, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1, 1, 3, -5)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, 1, 1)$, $a_2 = (5, 3, -7, -4)$, $a_3 = (4, -3, -2, -1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, -1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы
$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.55 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 - 8x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(24+2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4+2t)x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 + (16+4t)x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 36

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $a_3 = (-1, 1, 1, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, 1, 0, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, -2, 2)$, $a_2 = (-2, 2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, -3, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, -6, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы
$A = \begin{pmatrix} 0.85 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0 & 0.2 \\ 1.5 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0 & 0.65 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 11y^2 + 2z^2 - 16xy - 20xz + 4yz + 2x + 10y - 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(7-2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4-2t)x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 + (4t-8)x_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 37

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 2, -1, -1),\ a_2 = (3, 0, -2, -5),\ a_3 = (3, -2, -1, -7)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5, 1, 9, 1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 1, 1),\ a_2 = (1, 3, 4, -2),\ a_3 = (1, 2, 3, -2)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -2, 0, 0),\ e_2 = (0, 4, -1, 0),\ e_3 = (0, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы
$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.225 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.175 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $x^2 + 10y^2 - 2z^2 - 20xy + 28xz + 8yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $7x_1^2 + 3x_2^2 + (4-2t)x_3^2 + (2t-6)x_1x_2 + (2t-4)x_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 38

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, 0, 1, 1),\ a_2 = (2, 0, 1, -4),\ a_3 = (2, 0, 1, -9)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^{\perp}$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (2, 1, 3, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^{\top}$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^{\top}$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 1, 7, 2),\ a_2 = (2, 5, 3, 3),\ a_3 = (3, -1, 4, 1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, -1, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{11}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.5 \\ 0.15 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.135 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $-7x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 4xy + 20xz + 16yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $18x_1^2 + 7x_2^2 + (4+2t)x_3^2 + (18+2t)x_1x_2 - (12+2t)tx_1x_3 - (8+2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 39

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, -2),\ a_2 = (2, -1, 1, -4),\ a_3 = (1, -1, 1, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (7, -13, 11, 3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, -1),\ a_2 = (5, -3, -2, 4),\ a_3 = (4, -3, -2, 4)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-1, 1, 2, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{18}{35} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.75 \\ 0.125 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 14y^2 - z^2 - 28xy + 32xz + 4yz + 2x - 2y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t.

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 40

1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

2. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, -1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

3. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-1, 0, -1, 1),\ a_2 = (-2, 0, -1, 1),\ a_3 = (-3, 0, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-4, 1, 0, -1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U.

4. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$.

5. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, -2),\ a_2 = (2, 2, 3, -1),\ a_3 = (1, 1, 3, -1)$.

6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -3, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

7. Будет ли матрица $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{17}{60} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ матрицей обмена? Если да, то найти неотрицательный собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению 1.

8. Найти спектральный радиус $\rho(A)$ и матрицу $(E_4 - A)^{-1}$ для матрицы
$A = \begin{pmatrix} 0.35 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 2.475 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. Будет ли матрица A продуктивной?

9. Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

11. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

12. Привести уравнение квадрики $7x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 16yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. .

13. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.