На коллоквиуме будут предложены 1 теоретический вопрос (максимум 40 баллов) и 2 задачи (максимум 15 баллов).

Список теоретических вопросов.

1. Сформулировать и доказать теорему Крамера для системы с n неизвестными.

2. Определение определителя порядка n. Сформулировать и доказать свойство однородности определителя порядка n по строке.

3. Определение определителя порядка n. Сформулировать и доказать свойство аддитивности определителя порядка n по строке.

4. Определение полураспавшейся матрицы. Сформулировать и доказать теорему об определителе полураспавшейся матрицы.

5. Сформулировать и доказать теорему об определителе произведения матриц.

6. Сформулировать и доказать лемму об определителе со строкой, в которой не более одного ненулевого элемента.

7. Сформулировать и доказать свойство определителя матрицы с лвумя совпадающими строками.

8. Сформулировать и доказать свойство определителя матрицы, связанное с перестановкой двух строк.

9. Сформулировать и доказать свойство определителя транспонированной матрицы.

10. Сформулировать условия на размеры матриц A, B, C, чтобы равенство $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ имело смысл, и доказать его в общем случае.

11. Сформулировать условия на размеры матриц A, B, C, чтобы равенство $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ имело смысл, и доказать его в общем случае.

12. Сформулировать условия на размеры матриц A, B, C, чтобы равенство $A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$ имело смысл, и доказать его в общем случае.

13. Сформулировать условия на размеры матриц A, B, C, чтобы равенство $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ имело смысл, и доказать его в общем случае.

14. Сформулировать условия на размеры матриц A, B, C, чтобы равенство $(B - C) \cdot A = B \cdot A - C \cdot A$ имело смысл, и доказать его в общем случае.

15. Сформулировать условия на размеры матриц A, B, чтобы равенство $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ имело смысл, и доказать его в общем случае.

16. Доказать, что любая система уравнений над полем $\mathbb{R}$ либо несовместная, либо определенная, либо имеет бесконечное множество решений.

17. Перестановки и подстановки. Сформулировать и доказать теорему о расположении всех перестановок чисел от 1 до n.

18. Перестановки и подстановки. Сформулировать и доказать теорему об изменении четности перстановки при одной транспозиции.

19. Доказать формулу для определителя Вандермонда.

20. Доказать, что если вектор a_j встречается с ненулевым коэффициентом в линейной комбинации системы векторов $(a_1, \dots, a_n)$, равной нулевому вектору, то a_j линейно выражается через остальные векторы этой системы.

21. Доказать, что если к линейно независимой системе векторов приписать слева произвольный вектор, то не более чем один вектор полученной системы будет линейно выражаться через предыдущие векторы этой системы.

22. Доказать, что если к линейно независимой системе векторов приписать справа произвольный вектор, то не более чем один вектор полученной системы будет линейно выражаться через последующие векторы этой системы.

23. Доказать, что любая система из $m+1$ векторов, принадлежащих $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, является линейно зависимой.

24. Доказать, что если вектор a_j линейно выражается через остальные векторы системы $(a_1, \dots, a_n)$, то эта система линейно зависима.

25. Сформулировать и доказать следствия из аксиом сложения векторного пространства (кроме следствия ассоциативности).

26. Сформулировать и доказать следствие из аксиомы ассоциативности сложения векторного пространства.

27. Доказать, что $0x = 0_V$ и $\lambda 0_V = 0_V$ для любых скаляров λ и векторов x.

28. Доказать, что $(-1)x = -x$ и $\lambda(-x) = -(\lambda x)$ для любых скаляров λ и векторов x.

29. Доказать, что если система векторов $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ линейно выражается через систему $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, а система $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ линейно выражается через систему $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, то система $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ линейно выражается через систему $(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

30. Доказать, что для любых систем векторов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ справедливо утверждение $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle \iff (b_1, b_2, \dots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \dots, a_k)$.

31. Доказать, что для любой системы векторов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и любого вектора b справедливо утверждение $(a_1, a_2, \dots, a_k) \vdash b \iff \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, b \rangle$.

32. Доказать, что если система векторов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ линейно независима, а система $(a_1, a_2, \dots, a_k, b)$ линейно зависима, то $(a_1, a_2, \dots, a_k) \vdash b$.

33. Доказать, что если для систем векторов имеет место $(a_1, a_2, \dots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \dots, b_m)$ и $k < m$, то система $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ линейно зависима.

34. Доказать, что для произвольной системы векторов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, содержащей ненулевой вектор, существует такая линейно независимая подсистема $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p})$ этой системы, что $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p} \rangle$.

35. Доказать, что система всех ненулевых строк ступенчатой по строкам матрицы $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$ линейно независима.

36. Сформулировать и доказать критерий обратимости матрицы.

37. Сформулировать и доказать свойства обратимости матриц, связанные с умножением на число и транспонированием.

38. Объяснить, как решать матричные уравнения вида $A \cdot X = B$ и $Y \cdot A = B$ в общем случае.

39. Сформулировать и доказать утверждение о решении матричных уравнений $A \cdot X = B$ и $Y \cdot A = B$ в случае обратимой матрицы A.

40. При каком условии произведение двух квадратных матриц одного и того же порядка является обратимой матрицей? Как в этом случае вычисляется матрица $(A \cdot B)^{-1}$?

Задачи по матрицам, определителям и линейным пространствам (темы 1-5).