

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (2, -2, -1, 1)$, $a_2 = (5, -3, -2, -4)$, $a_3 = (3, -3, -2, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 1, -13, -3)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ заданных координатами в базисе } B: [a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top, [a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top. (2 \text{ балла})$$

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, 1)$, $a_2 = (5, -3, -2, -4)$, $a_3 = (4, -3, -2, -4)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 12 & 9 & -12 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

8. Привести уравнение квадрики $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла)

9. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(11 + 2t)x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_3^2 + (16 + 2t)x_1x_2 + (6 + 2t)x_1x_3 + 6x_2x_3$ положительно определена.

10. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в аффинном пространстве \mathbb{R}^5 , если в стандартном репере $A(3, 5, 3, 5, 3)$, $B(7, 5, 5, 5, 7)$, $C(6, 8, 6, 8, 6)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A .

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $a_2 = (2, 2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-8, -11, 10, 6)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ заданных}$$

координатами в базисе B : $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, 2)$, $a_2 = (2, 2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-4, -2, 1, 0)$, $e_3 = (-6, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти площадь треугольника ABC в аффинном пространстве \mathbb{R}^5 , если в стандартном репере $A(1, 3, 1, 3, 1)$, $B(5, 3, 3, 3, 5)$, $C(4, 6, 4, 6, 4)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A .

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 8x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к нормаль-

ному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(3 + 2t)x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - (4 + 2t)x_1x_2 - (2 + 2t)x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -3, 4, -2)$, $a_3 = (1, -2, 3, -2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5, 1, 9, 1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, -5, 1, 1)$, $a_2 = (1, -3, 4, -2)$, $a_3 = (1, -2, 3, -2)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 2, -1, 0)$, $e_3 = (0, -1, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти мат-

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Параллелепипед в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 построен на векторах $\vec{a}_1 = (0, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, 2, 5)$, отложенных от точки $p_0(3, 1, 0, 1)$. Проверить, лежит ли точка $q(4, 2, 1, 5)$ внутри или вне этого параллелепипеда.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(8 + 2t)x_1^2 + (7 - 2t)x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 - (8 + 2t)x_1x_3 + (8 - 2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 1, -2, 2)$, $a_2 = (2, 0, -3, 3)$, $a_3 = (3, -1, -4, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (6, -8, 2, 8)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 1, -7, 2)$, $a_2 = (2, 5, -3, 3)$, $a_3 = (3, -1, -4, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, -2, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Параллелотоп в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 построен на векторах $\vec{a}_1 = (0, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, 2, 5)$, отложенных от точки $p_0(3, 1, 0, 1)$. Найти длину высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора \vec{a}_4 на грань $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

рованном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $6x_1^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(24 + 2t)x_1^2 + (7 - 2t)x_2^2 + (3 + 2t)x_3^2 + 16x_1x_2 + 4tx_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, -1, 0, -1)$, $a_2 = (0, -2, -1, -4)$, $a_3 = (-3, -1, -2, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1, 1, 3, -5)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, 1, 1)$, $a_2 = (5, 3, -7, -4)$, $a_3 = (4, -3, -2, -1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, -1, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точку B , симметричную точке $A(7, 4, -10, 5)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(3, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_1 = (0, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 - 8x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла)

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(24 + 2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4 + 2t)x_3^2 + (2t - 8)x_1x_2 + (16 + 4t)x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 6

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $a_3 = (-1, 1, 1, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, 1, 0, 1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, -2, 2)$, $a_2 = (-2, 2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, -3, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, -6, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 пересечение двумерных плоскостей $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ и $x = q_0 + t_1\vec{a}_3 + t_2\vec{a}_4$, где $p_0(3, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $q_0(2, 1, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, 1, -1)$.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 11y^2 + 2z^2 - 16xy + 20xz + 4yz + 2x + 10y - 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(7-2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4-2t)x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 + (4t-8)x_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 2, -1, -1)$, $a_2 = (3, 0, -2, -5)$, $a_3 = (3, -2, -1, -7)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5, 1, 9, 1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 1, 1)$, $a_2 = (1, 3, 4, -2)$, $a_3 = (1, 2, 3, -2)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, -2, 0, 0)$, $e_2 = (0, 4, -1, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 расстояние от точки $A(7, 4, -10, 5)$ до гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(3, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_1 = (5, 3, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

рованном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормаль-

ному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $x^2 + 10y^2 - 2z^2 - 20xy + 28xz + 8yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $7x_1^2 + 3x_2^2 + (4 - 2t)x_3^2 + (2t - 6)x_1x_2 + (2t - 4)x_1x_3 + (4 - 2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (2, 0, 1, 1)$, $a_2 = (2, 0, 1, -4)$, $a_3 = (2, 0, 1, -9)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (2, 1, 3, -3)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 1, 7, 2)$, $a_2 = (2, 5, 3, 3)$, $a_3 = (3, -1, 4, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, -1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точки пересечения сферы $|x - p| = 6$, где $p(13, 3, 7, 13)$ и прямой, проходящей через точки $A(1, 3, 1, 1)$, $B(5, 3, 3, 5)$.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $-7x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 4xy + 20xz + 16yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $18x_1^2 + 7x_2^2 + (4+2t)x_3^2 + (18+2t)x_1x_2 - (12+2t)x_1x_3 - (8+2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, -2)$, $a_2 = (2, -1, 1, -4)$, $a_3 = (1, -1, 1, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (7, -13, 11, 3)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ заданных}$$

координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, -1)$, $a_2 = (5, -3, -2, 4)$, $a_3 = (4, -3, -2, 4)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти матрицу}$$

Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Аффинное преобразование $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства \mathbb{R}^3 переводит точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 1, 3)$, $D(0, 1, 7)$ в точки $A'(2, 7, 6)$, $B'(1, 10, 8)$, $C'(-2, 4, 2)$, $D'(-5, 14, 8)$ соответственно. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти образ точки $q(2, -1, 4)$ при этом отображении.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 14y^2 - z^2 - 28xy + 32xz + 4yz + 2x - 2y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла)

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, -1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (-1, 0, -1, 1)$, $a_2 = (-2, 0, -1, 1)$, $a_3 = (-3, 0, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-4, 1, 0, -1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ заданных}$$

координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, -2)$, $a_2 = (2, 2, 3, -1)$, $a_3 = (1, 1, 3, -1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, -3, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора } \mathcal{A}^* \text{ в этом базисе. (2 балла)}$$

6. Изометрия $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства \mathbb{R}^2 , сохраняющая ориентацию, переводит точку $(1, 0)$ в точку $(0, 0)$, а точку $(0, 1)$ в точку $(\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти также неподвижную точку этой изометрии.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $7x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 16yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 11

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, -1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (3, 2, 3, -1)$, $a_3 = (3, 4, 4, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-3, -9, 9, -9)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (-1, -5, 1, 1)$, $a_2 = (-1, -3, 4, -2)$, $a_3 = (-1, -2, 3, -2)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, -4, -2, 0)$, $e_2 = (1, -1, -1, 0)$,

$$e_3 = (0, 2, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1) \text{ задан матрицей } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

$$\text{рованном базисе оператор } \mathcal{A} \text{ имеет матрицу } \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

8. Привести уравнение квадрики $11x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 16xy - 4xz - 20yz + 2x + 10y - 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

9. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(11+2t)x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 + (16+2t)x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3$ положительно определена.

10. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в аффинном пространстве \mathbb{R}^5 , если в стандартном репере $A(2, 3, 0, 1, -2)$, $B(6, 3, 2, 1, 2)$, $C(5, 6, 3, 4, 1)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A .

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (0, 1, 1, -2)$, $a_2 = (1, 0, 1, -5)$, $a_3 = (1, 0, 0, -3)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (4, 0, 2, -2)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 2, -7, 2)$, $a_2 = (2, 4, -3, 3)$, $a_3 = (4, -1, -4, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 4, -1, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти площадь треугольника ABC в аффинном пространстве \mathbb{R}^5 , если в стандартном репере $A(0, 1, -2, -1, -4)$, $B(4, 1, 0, -1, 0)$, $C(3, 4, 1, 2, -1)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A .

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $10x^2 + y^2 + 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(7 - 2t)x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + (2t - 8)x_1x_2 - 6tx_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -2, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, -2, 1, 1)$, $a_2 = (1, -4, 1, 2)$, $a_3 = (1, -2, -1, 3)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-3, 1, 5, 7)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -4, 1, 1)$, $a_2 = (5, 3, -4, -4)$, $a_3 = (4, -3, -4, -1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Параллелепипед в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 построен на векторах $\vec{a}_1 = (1, 4, 1, 5)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 3, 7)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, 2, 5)$, отложенных от точки $p_0(4, 3, 3, 5)$. Проверить, лежит ли точка $q(5, 4, 4, 9)$ внутри или вне этого параллелепипеда.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 - 4xy - 16xz - 20yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла)

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(11 - 4t)x_1^2 + (3 + 2t)x_2^2 + 3x_3^2 + (2t + 4)x_1x_2 + (2t - 10)x_1x_3 + (2t + 4)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 2, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (-1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (-3, -1, 2, 2)$, $a_3 = (-3, 1, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, 0, -2, 4)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (7, 3, -2, 2)$, $a_2 = (-7, 2, 3, 1)$, $a_3 = (7, 1, -3, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Параллелотоп в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 построен на векторах $\vec{a}_1 = (1, 4, 1, 5)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 3, 7)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, 2, 5)$, отложенных от точки $p_0(4, 3, 3, 5)$. Найти длину высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора \vec{a}_4 на грань $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -11 & 10 & -2 \\ 10 & -14 & -8 \\ -2 & -8 & -20 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_4^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $14x^2 + 5y^2 - z^2 - 28xy - 4xz - 32yz - 6x + 6y + 6z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(19+4t)x_1^2 + (3+2t)x_2^2 + (7-2t)x_3^2 + (6t+4)x_1x_2 + (2t+8)x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (-1, 1, 0, 1)$, $a_2 = (-1, 2, 1, 1)$, $a_3 = (-1, 2, 1, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1, 3, -1, -1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 4, 1)$, $a_2 = (1, 3, 7, -2)$, $a_3 = (1, 2, 6, -2)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (-1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точку B , симметричную точке $A(8, 5, -9, 6)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(4, 2, 1, 2)$, $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 4)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, 2, 2, 3)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

рованном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 10x_2x_3 - 4x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy - 8xz + 8yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(19 + 4t)x_1^2 + (4 - 2t)x_2^2 + 7x_3^2 + (2t - 4)x_1x_2 + (4t + 18)x_1x_3 + (4 - 2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, -2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (2, 0, -1, 3)$, $a_2 = (1, 0, -1, 5)$, $a_3 = (4, 0, -3, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (6, 9, 1, 1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (4, 1, 7, 2)$, $a_2 = (4, 5, 3, 3)$, $a_3 = (3, -1, 4, 4)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, -6, -3, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 2, 1, -2)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 пересечение двумерных плоскостей $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ и $x = q_0 + t_1\vec{a}_3 + t_2\vec{a}_4$, где $p_0 = (1, 1, 3, 1)$, $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $q_0 = (2, 3, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, 1, 0)$.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 20xy - 4xz + 16yz + 6x - 6y - 6z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(7-2t)x_1^2 + (4-2t)x_2^2 + 3x_3^2 + (4t-8)x_1x_2 + (2t-8)tx_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (0, 1, 1, -1)$, $a_2 = (-1, 0, 0, -4)$, $a_3 = (-1, 0, -1, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (3, -1, -1, -5)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ заданных}$$

координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, -5, 1, 7)$, $a_2 = (1, -3, 4, -8)$, $a_3 = (1, -2, 3, -9)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-5, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти матрицу}$$

Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 расстояние от точки $A(8, 5, -9, 6)$ до гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(4, 2, 1, 2)$, $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 4)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, 2, 2, 3)$.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $-2x^2 + y^2 + 10z^2 - 4xy + 8xz + 4yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $7x_1^2 + (4 - 2t)x_2^2 + 3x_3^2 + (2t - 4)x_1x_2 + (2t - 6)x_1x_3 + (4 - 2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 3, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 2, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 2, 0, -3)$, $a_3 = (0, 1, 0, -2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1, 1, 1, -3)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ заданных}$$

координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (9, 1, -7, 2)$, $a_2 = (8, 5, -3, 3)$, $a_3 = (7, -1, -4, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 3, -2)$, $e_3 = (0, 0, -3, 2)$, $e_4 = (0, 0, -2, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точки пересечения сферы $|x - p| = 6$, где $p(5, 3, 3, 5)$ и прямой, проходящей через точки $A(-3, 3, -1, -3)$, $B(17, 3, 9, 17)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & -12 \\ 12 & 15 & 0 \\ -12 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $6x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $-4x^2 - 7y^2 + 2z^2 + 20xy - 16xz + 4yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $15x_1^2 + (4+2t)x_2^2 + 7x_3^2 + (4t+12)x_1x_2 - (4t+12)x_1x_3 - (8+2t)x_2x_3$ положительно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -3, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, 2, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $a_2 = (4, 1, 3, 4)$, $a_3 = (3, 1, 1, 2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (3, -5, 1, 5)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (6, -2, 1, 1)$, $a_2 = (9, 3, -7, -4)$, $a_3 = (8, -3, -2, -1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Аффинное преобразование $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства \mathbb{R}^3 переводит точки $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 3)$, $C(-1, 1, 3)$, $D(0, 1, 7)$ в точки $A'(0, 6, 12)$, $B'(1, 9, 13)$, $C'(-3, 5, 5)$, $D'(-6, 14, 11)$ соответственно. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти образ точки $q(2, -1, 3)$ при этом отображении.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

рованном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $-x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 32xy - 4xz + 28yz + 2x + 10y - 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла)

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-(11 + 2t)x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 - (16 + 2t)x_1x_2 - 10x_1x_3 - 8x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 3, 1, -2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 1, 2, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 2, 1, -1)$, $a_2 = (1, 5, 0, 0)$, $a_3 = (1, 4, -1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 3, 11, 11)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, -7, 2)$, $a_2 = (-2, 2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, -9, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-3, 1, -1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Найти матри-$$

цу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Изометрия $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства \mathbb{R}^2 , сохраняющая ориентацию, переводит точку $(13, 0)$ в точку $(0, 0)$, а точку $(0, 13)$ в точку $(7, 17)$. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти также неподвижную точку этой изометрии.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_4^2 - 10x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz + 2x + 10y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(2t - 7)x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + (8 - 2t)x_1x_2 + 6tx_1x_3 - 4x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 21

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, 3, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (4, 2, -3, -6)$, $a_2 = (6, -2, -3, -12)$, $a_3 = (3, -2, -1, -7)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (5, -1, -9, -1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 2, 1)$, $a_2 = (1, 3, 3, -2)$, $a_3 = (1, 2, 4, -2)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, -2, 0, 1)$, $e_2 = (0, 4, -1, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

7. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_4^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

8. Привести уравнение квадрики $2x^2 + 11y^2 + 5z^2 - 4xy + 20xz + 16yz + 6x - 6y - 6z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

9. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(4t - 11)x_1^2 - (3 + 2t)x_2^2 - 3x_3^2 - (2t + 4)x_1x_2 + (10 - 2t)x_1x_3 - (2t + 4)x_2x_3$ отрицательно определена.

10. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в аффинном пространстве \mathbb{R}^5 , если в стандартном репере $A(-1, 1, 0, 3, 2)$, $B(2, 1, 2, 3, 6)$, $C(1, 4, 3, 6, 5)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A .

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, 1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (4, 0, 2, 1)$, $a_2 = (6, 0, 3, -4)$, $a_3 = (2, 0, 1, -9)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, -1, -3, 3)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 9, 7, 2)$, $a_2 = (2, 8, 3, 3)$, $a_3 = (3, -7, 4, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, -1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 1, 1, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти площадь треугольника ABC в аффинном пространстве \mathbb{R}^5 , если в стандартном репере $A(-4, -1, -2, 2, 0)$, $B(0, -1, 0, 1, 4)$, $C(-1, 2, 1, 4, 3)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A .

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $-2x^2 + 10y^2 + z^2 - 8xy + 28xz + 20yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-(19 + 4t)x_1^2 - (3 + 2t)x_2^2 + (2t - 7)x_3^2 - (6t + 4)x_1x_2 - (2t + 8)x_1x_3 + 2x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, -1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, 3, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (2, 0, 3, -6)$, $a_2 = (3, -2, 2, -8)$, $a_3 = (1, -1, 1, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-7, 13, -11, -3)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -5, -1, -1)$, $a_2 = (5, -6, -2, 4)$, $a_3 = (4, -7, -2, 4)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Параллелепипед в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 построен на векторах $\vec{a}_1 = (2, 4, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 0, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, 2, 1)$, отложенных от точки $p_0(2, 1, 4, 1)$. Проверить, лежит ли точка $q(4, 2, 1, 5)$ внутри или вне этого параллелепипеда.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 & -1 \\ 7 & -9 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -9 & 7 \\ -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $-4x^2 + 2y^2 - 7z^2 - 16xy + 20xz + 4yz + 10y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла)

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-(19 + 4t)x_1^2 + (2t - 4)x_2^2 - 7x_3^2 + (4 - 2t)x_1x_2 - (4t + 18)x_1x_3 + (2t - 4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 24

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, -1, 3)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3, 1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (-3, 0, -2, 2)$, $a_2 = (-2, 0, -1, 1)$, $a_3 = (-3, 0, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (4, -1, 0, 1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, 1, 3, 1)^\top$, $[a_2]_B = (2, -2, 2, -3)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, -9)$, $a_2 = (2, 2, 3, -5)$, $a_3 = (1, 1, 3, -6)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, -3, 0, 0)$, $e_2 = (1, -2, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Параллелограмм в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 построен на векторах $\vec{a}_1 = (2, 4, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 0, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, 2, 1)$, отложенных от точки $p_0(2, 1, 4, 1)$. Найти длину высоты этого параллелограмма, опущенной из конца вектора \vec{a}_4 на грань $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $7x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $-x^2 + 14y^2 + 5z^2 - 4xy - 8xz + 32yz + 28x + 2y - 2z + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $(2t-7)x_1^2 + (2t-4)x_2^2 - 3x_3^2 + (8-4t)x_1x_2 + (8-2t)tx_1x_3 + (2t-4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 25

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3, 1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, -1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (4, 2, 5, 0)$, $a_2 = (6, 6, 7, -6)$, $a_3 = (3, 4, 4, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 3, -3, 3)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (-1, -5, 3, 1)$, $a_2 = (-1, -3, 5, -2)$, $a_3 = (-1, -2, 7, -2)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, -4, -2, 0)$, $e_2 = (1, -1, -1, 0)$, $e_3 = (0, 2, 1, 0)$, $e_4 = (1, -1, -1, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точку B , симметричную точке $A(-2, -2, 12, -3)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(2, 1, 2, 1)$, $\vec{a}_1 = (0, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 0)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

рованном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $11x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 16xz - 20yz + 2x - 2y + 10z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-7x_1^2 + (2t - 4)x_2^2 - 3x_3^2 + (4 - 2t)x_1x_2 + (6 - 2t)x_1x_3 + (2t - 4)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 26

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, 3, 1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, -1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, 1, 2, -7)$, $a_2 = (1, 0, 1, -5)$, $a_3 = (1, 1, 1, -5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2, 0, -1, 1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (9, 2, -7, 2)$, $a_2 = (7, 4, -3, 3)$, $a_3 = (5, -1, -4, 1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (1, 4, -1, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 пересечение двумерных плоскостей $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ и $x = q_0 + t_1\vec{a}_3 + t_2\vec{a}_4$, где $p_0(3, 1, 2, 1)$, $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $q_0(2, -1, -1, 3)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (0, -1, 1, -1)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

рованном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 & -1 \\ 7 & -9 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -9 & 7 \\ -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 7x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $10x^2 - 2y^2 + z^2 - 8xy - 20xz - 28yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-15x_1^2 - (4+2t)x_2^2 - 7x_3^2 - (4t+12)x_1x_2 + (4t+12)tx_1x_3 + (8+2t)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 27

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, -3, 1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, 1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (1, -2, 1, 1)$, $a_2 = (1, -4, 1, 2)$, $a_3 = (1, -2, -1, 3)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (3, -1, -5, -7)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -3, 1, 1)$, $a_2 = (5, 5, -4, -4)$, $a_3 = (4, -7, -4, -1)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 расстояние от точки $A(-2, -2, 12, -3)$ до гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(2, 1, 2, 1)$, $\vec{a}_1 = (0, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 0)$.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе

оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 8x_2^2 + 5x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $20x^2 + 14y^2 + 11z^2 - 16xy - 4xz - 20yz + 8x + 4y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла)

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-(8 + 2t)x_1^2 + (2t - 7)x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_2 + (8 + 2t)x_1x_3 + (2t - 8)x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 28

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3, -1)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, -1, 1, 3)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (-4, -4, 3, 3)$, $a_2 = (-3, -1, 2, 2)$, $a_3 = (-3, 1, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 0, 1, -2)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (7, 3, -2, 9)$, $a_2 = (-7, 2, 3, 7)$, $a_3 = (7, 1, -3, 5)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-4, 1, 1, 0)$, $e_3 = (-1, 0, 1, 1)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти мат-}$$

рицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точки пересечения сферы $|x - p| = 6$, где $p(1, 3, 1, 1)$ и прямой, проходящей через точки $A(-3, 3, -1, -1)$, $B(21, 3, 11, 21)$.

7. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонорми-

рованном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -9 & 5 & -3 & -1 \\ 5 & -9 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -9 & 5 \\ -1 & -3 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $7x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_4^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $3x^2 + 6y^2 - 9z^2 - 36xy + 24xz - 12yz + 8x + 4y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-(24 + 2t)x_1^2 + (2t - 7)x_2^2 - (3 + 2t)x_3^2 - 16x_1x_2 - 4tx_1x_3 + 2x_2x_3$ отрицательно определена.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 29

1. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 3, 4)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, 2, 1, -1)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства \mathbb{R}^4 .

2. Дано подпространство U , линейного пространства \mathbb{R}^4 порожденное векторами $a_1 = (-2, 3, 1, 2)$, $a_2 = (-1, 2, 1, 1)$, $a_3 = (-2, 4, 2, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U .

б) Найти базис ортогонального дополнения U^\perp .

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, -3, 1, 1)$ относительно подпространства U .

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U . (2 балла)

3. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама

$$G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Ортогонализировать систему векторов } a_1, a_2, \text{ за-}$$

данных координатами в базисе B : $[a_1]_B = (3, -1, 3, -1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -2, 3, -4)^\top$. (2 балла)

4. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 4, 8)$, $a_2 = (1, 3, 7, -6)$, $a_3 = (1, 2, 6, -4)$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $e_1 = (-1, 0, 2, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 1)$, $e_3 = (-1, 0, 1, 1)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора \mathcal{A}^* в этом базисе. (2 балла)

6. Аффинное преобразование $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства \mathbb{R}^3 переводит точки $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 3)$, $C(-1, 1, 3)$, $D(0, 1, 7)$ в точки $A'(0, 4, 8)$, $B'(0, 7, 11)$, $C'(-4, 3, 3)$, $D'(-11, 12, 9)$ соответственно. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти образ точки $q(2, -1, 4)$ при этом отображении.

7. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора \mathcal{A} в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $7x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 10x_2x_3 - 4x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к

нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

9. Привести уравнение квадрики $14x^2 - y^2 + 5z^2 - 4xy - 28xz - 32yz + 6x - 6y - 6z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t . (2 балла).

10. Найти все значения параметра t , при которых квадратичная форма $-(24+2t)x_1^2 - 3x_2^2 - (4+2t)x_3^2 + (8-2t)x_1x_2 - (16+4t)x_1x_3 - 2tx_2x_3$ отрицательно определена.