

Задача 1 из ИДЗ. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

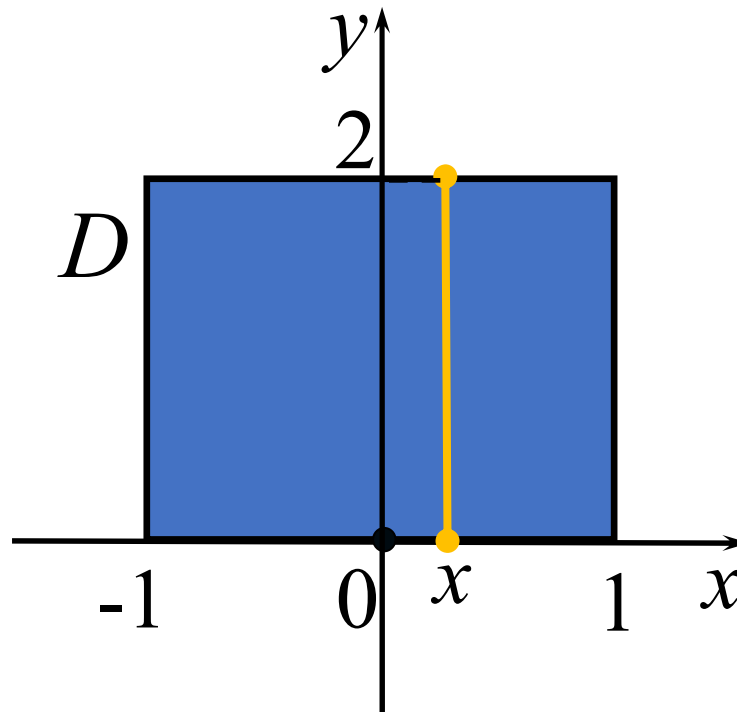
где $f(x, y) = x^2y - xy^3$ двумя способами по области

$$D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

Сделать чертеж.

Решение

I способ.



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 f(x, y) dy =$$

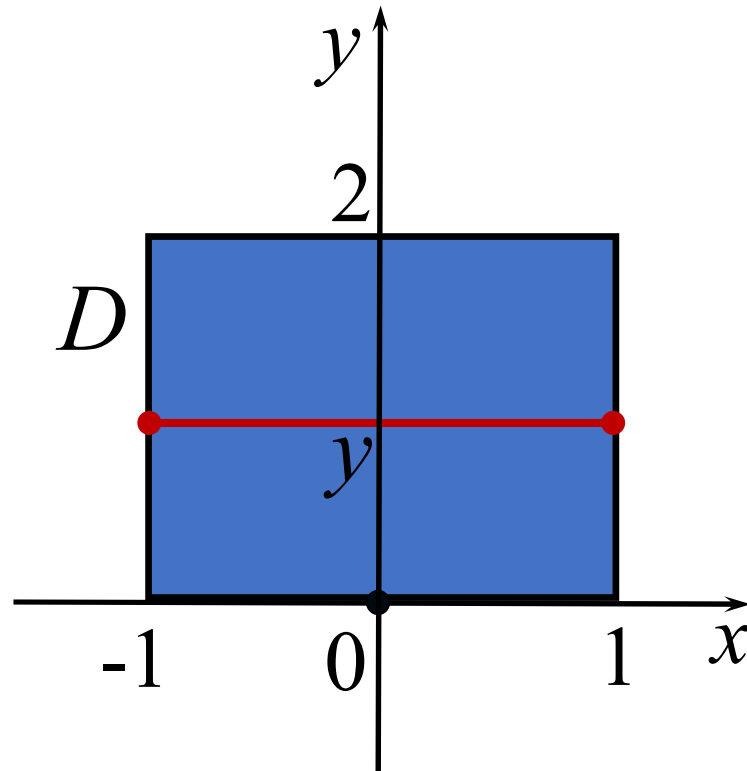
$$= \int_{-1}^1 dx \int_0^2 (x^2 y - xy^3) dy = \int_{-1}^1 dx \left(\int_0^2 x^2 y dy - \int_0^2 xy^3 dy \right) =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \left(x^2 \int_0^2 y dy - x \int_0^2 y^3 dy \right) =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \left(x^2 \left(y \Big|_0^2 \right) - x \left(\frac{y^4}{4} \Big|_0^2 \right) \right) = \int_{-1}^1 dx (2x^2 - 4x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 2x^2 dx - \int_{-1}^1 4x dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 - 4 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \\
&= \frac{2}{3} \left(1^3 - (-1)^3 \right) - 2 \left(1^2 - (-1)^2 \right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

II способ.



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{-1}^1 f(x, y) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 dy \int_{-1}^1 (x^2 y - xy^3) dx = \\
&= \int_0^2 dy \left(\int_{-1}^1 x^2 y dx - \int_{-1}^1 xy^3 dx \right) = \\
&= \int_0^2 dy \left(y \int_{-1}^1 x^2 dx - y^3 \int_{-1}^1 x dx \right) = \\
&= \int_0^2 dx \left(y \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) - y^3 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 dx \left(\frac{y}{3} (1^3 - (-1)^3) - \frac{y^3}{2} (1^2 - (-1)^2) \right) = \\
&= \int_0^2 dy \left(\frac{2}{3} y - 0 \cdot y^3 \right) = \frac{2}{3} \int_0^2 y dy = \frac{2}{3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = \\
&= \frac{1}{3} \cdot y^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{3} (2^2 - 0^2) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Задача 2 из ИДЗ. В двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

расставить двумя способами пределы интегрирования (перейти к повторным интегралам), если область D ограничена кривыми

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad x = -1, \quad x \leq -1.$$

Сделать чертеж.

Решение

I способ: фиксируем x , потом y .

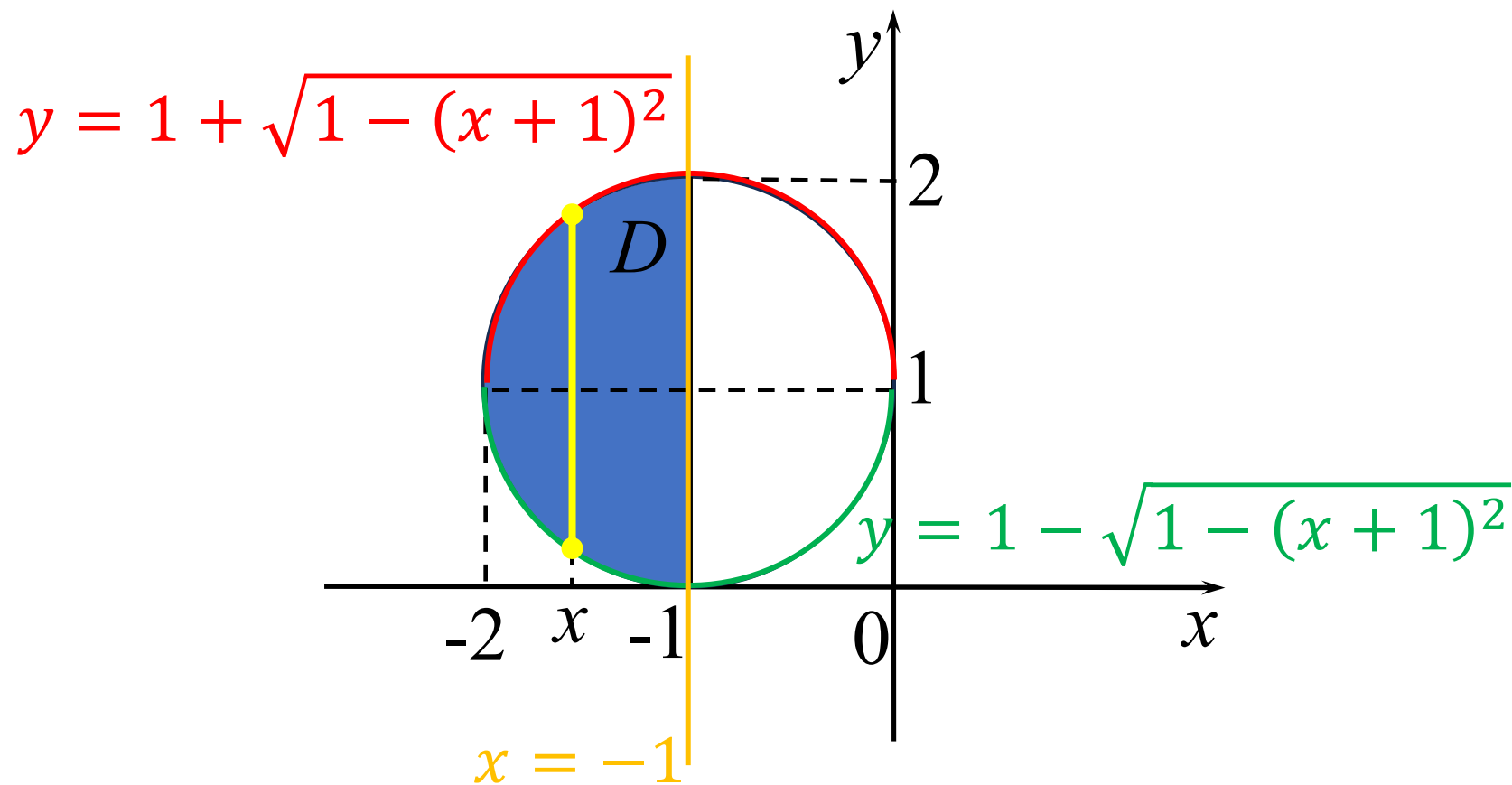
Выразим y через x для тех кривых, где можно это сделать:

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$(y - 1)^2 = 1 - (x + 1)^2$$

$$y - 1 = \pm \sqrt{1 - (x + 1)^2}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - (x + 1)^2}$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{1 - \sqrt{1 - (x+1)^2}}^{1 + \sqrt{1 - (x+1)^2}} f(x, y) dy$$

II способ: фиксируем y , потом x .

Выразим x через y для тех кривых, где можно это сделать :

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

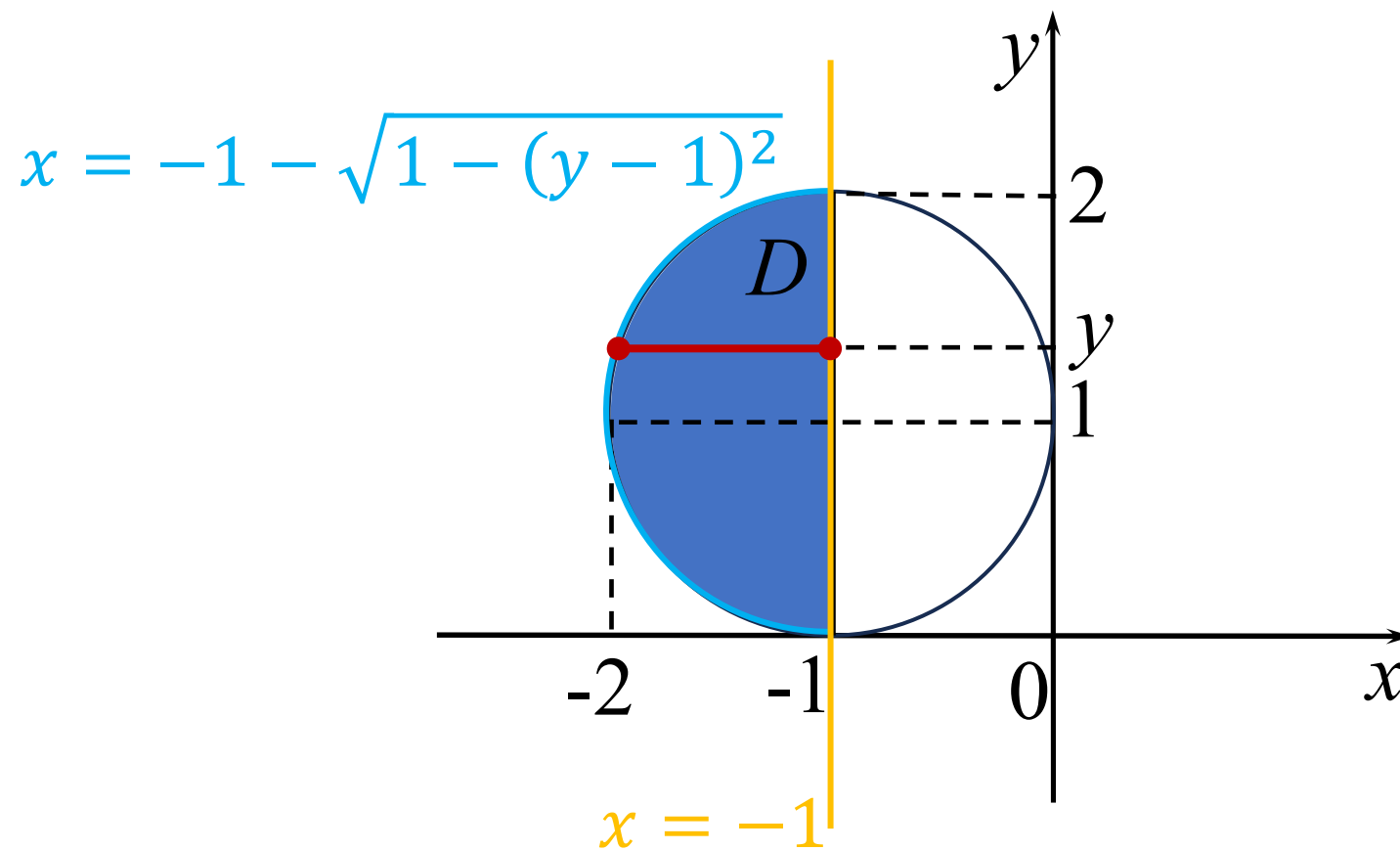
$$(x + 1)^2 = 1 - (y - 1)^2$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{1 - (y - 1)^2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - (y - 1)^2}$$

Поскольку $x \leq -1$, имеем:

$$x = -1 - \sqrt{1 - (y - 1)^2}$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{-1 - \sqrt{1 - (y-1)^2}}^{-1} f(x, y) dx$$

Ответ:

$$1) \int_{-2}^{-1} dx \int_{1-\sqrt{1-(x+1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x, y) dy;$$

$$2) \int_0^2 dy \int_{-1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{-1} f(x, y) dx$$