

Пример 2 отыскания условного экстремума для Ф2П (из ИДЗ)

Задача. Исследовать на условный локальный экстремум функцию

$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2$ при условии $\varphi(x, y) = 3x + 4y - 19$.

Решение

1) Напишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) = \\ &= x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2 + \lambda(3x + 4y - 19) = \end{aligned}$$

1) Найдем стационарные точки $N(x_0, y_0; \lambda)$ функции Лагранжа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 4 + 3\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{4 - 3\lambda}{2} = 2 - \frac{3}{2}\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 6 + 4\lambda = 0 \Rightarrow y = -\frac{6 + 4\lambda}{2} = -3 - 2\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(3x + 4y - 19) = 0 \Rightarrow 3\left(2 - \frac{3}{2}\lambda\right) + 4(-3 - 2\lambda) - 19 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{25}{2}\lambda - 25 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = -2 \quad x = 5 \quad y = 1$$

$N(5, 1; -2)$ – стационарная точка
функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$

2) Установим тип экстремума (не обязательно, по желанию*).

2.1) Вычислим вторые частные производные
функции Лагранжа по x и по y :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$$

2.2) Вычислим эти производные в полученной точке

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right|_N = 2, \quad \left. \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \right|_N = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right|_N = 2$$

2.3) Найдем второй дифференциал функции Лагранжа в полученной точке:

$$\begin{aligned} d^2 L \Big|_N &= \left. \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right|_N dx^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \right|_N dx dy + \left. \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right|_N dy^2 = \\ &= 2dx^2 + 2dy^2 \end{aligned}$$

2.4) Найдем связь дифференциалов из условия связи: $3x + 4y - 19 = 0$:

$$d(3x + 4y - 19) = 0$$

$$(3x + 4y - 19)'_x dx + (3x + 4y - 19)'_y dy = 0$$

$$3dx + 4dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{3}{4}dx$$

2.5) Подставим dy в $dL|_N$:

$$d^2L|_N = 2dx^2 + 2dy^2 = 2dx^2 + \frac{9}{16}dx^2 = \frac{41}{16}dx^2 \Rightarrow$$

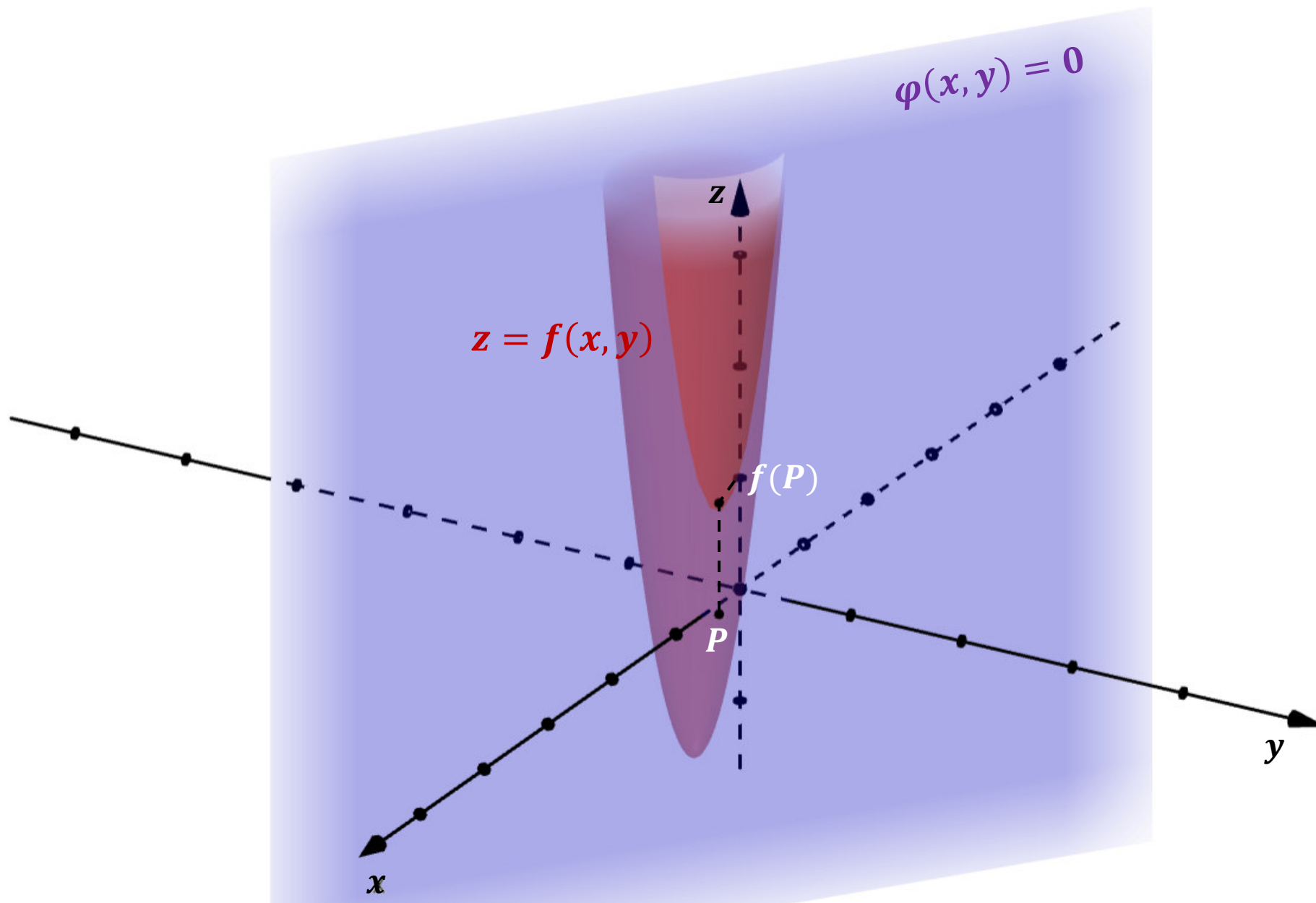
$$d^2L|_N > 0 \text{ для любого } dx \neq 0 \Rightarrow$$

$P(5,1)$ – точка условного $\min$ функции $f(x, y)$

при условии $\varphi(x, y) = 0$;

условный $\min$ функции $f(x, y)$ равен

$$\begin{aligned} z(P) &= x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2 = \\ &= 5^2 + 1^2 - 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1 - 2 = \mathbf{10} \end{aligned}$$



Условный экстремум для ФЗП. Пример 3

В примере 1 функция

$$V = f(x, y, z) = xyz \rightarrow \max \text{ при условии связи}$$
$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - a = 0.$$

Решение

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) =$$
$$= xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -yz \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -xz \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -xy \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = -xy = -yz = -xz$$

$\Rightarrow x = y = z \Rightarrow$ параллелепипед является кубом

Решение методом Лагранжа оказалось проще!