

Пример отыскания наибольшего, наименьшего значения на компакте для Ф2П (из ИДЗ)

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 10y$ в ΔABC , где $A(2; -3), B(6; -3), C(6; 4)$.

1) Найдем уравнения прямых (AB) , (AC) , (BC) – границы компакта $D = \Delta ABC$.

(AB) :

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-(-3)}{(-3)-(-3)}$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{0}$$

$$4(y+3) = 0 \cdot (x-2)$$

$$y+3 = 0$$

$$y = -3$$

(BC) :

$$\frac{x-6}{6-6} = \frac{y-(-3)}{4-(-3)}$$

$$\frac{x-6}{0} = \frac{y+3}{7}$$

$$7(x-6) = 0 \cdot (y+3)$$

$$x = 6$$

$(AC):$

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-(-3)}{4-(-3)}$$

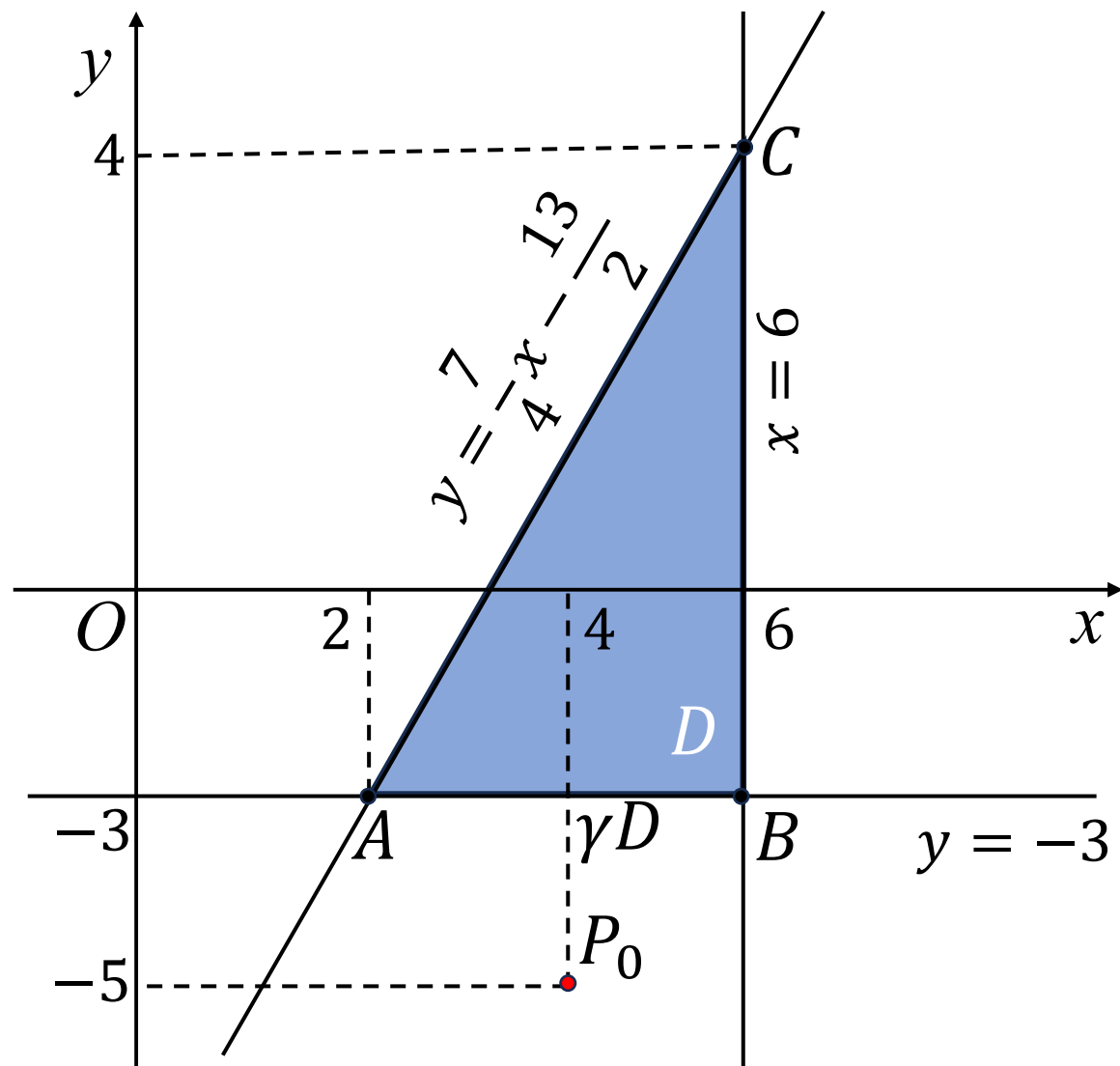
$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{7}$$

$$4(y+3) = 7(x-2)$$

$$y = \frac{7}{4}(x-2) - 3$$

$$y = \frac{7}{4}x - \frac{13}{2}$$

2) Изобразим компакт $D = \Delta ABC$.



3) Найдем стационарные точки функции $z = f(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} z'_x &= 2x - 8 = 0 \\ z'_y &= 2y + 10 = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow x = 4, y = -5$$

$\Rightarrow P_0(4, -5)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$.

Но она не принадлежит области D .

4) Найдем значение функции $z = f(x, y)$ в точках A, B, C излома границы γD компакта D .

$$z(A) = f(2, -3) = 2^2 - 8 \cdot 2 + (-3)^2 + 10 \cdot (-3) = -33$$

$$z(B) = f(6, -3) = 6^2 - 8 \cdot 6 + (-3)^2 + 10 \cdot (-3) = -33$$

$$z(C) = f(6, 4) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 4^2 + 10 \cdot 4 = 44$$

5) Найдем наибольшее, наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ на границе γD компакта D .

5.1) Найдем наибольшее значение функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 10y$ на отрезке $[AB]$:

$$\begin{aligned} y = -3 &\Rightarrow z = f(x, -3) = \\ &= x^2 + (-3)^2 - 8x + 10 \cdot y = x^2 - 8x - 21 \end{aligned}$$

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - 8x - 21$ на отрезке $x \in [2; 6]$

$$z'_x = 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \in [2; 6]$$

$$\begin{array}{l} x = 4, y = -3 \Rightarrow z_1 = f(4, -3) = 4^2 - 8 \cdot 4 - 21 = -37 \\ x = 2, y = -3 \Rightarrow z_2 = f(2, -3) = z(A) = -33 \\ x = 4, y = -3 \Rightarrow z_3 = f(6, -3) = z(B) = -33 \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow z_{\text{наиб. на } AB} = \max\{z_1, z_2, z_3\} = -33 \\ z_{\text{наим. на } AB} = \min\{z_1, z_2, z_3\} = -37 \end{array}$$

5.2) Найдем наибольшее значение функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 10y$ на отрезке $[BC]$:

$$x = 6 \Rightarrow z = f(6, y) = 6^2 + y^2 - 8 \cdot 6 + 10y \\ = y^2 + 10y - 12$$

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z = y^2 + 10y - 12$ на отрезке $x \in [-3; 4]$

$$z' = (y^2 + 10y - 12)' = 2y + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$y = -5 \notin [-3; 4]$$

$$\begin{array}{l} y = -3, x = 6 \Rightarrow z_4 = f(6, -3) = z(B) = -33 \\ y = 4, x = 6 \Rightarrow z_5 = f(6, 4) = z(C) = 44 \end{array} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} z_{\text{наиб.}} \\ \text{на } BC \end{array} = \max\{z_4, z_5\} = 44$$

$$\begin{array}{l} z_{\text{наим.}} \\ \text{на } BC \end{array} = \min\{z_4, z_5\} = -33$$

5.3) Найдем наибольшее значение функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 10y$ на отрезке $[AC]$:

$$\begin{aligned} y = \frac{7}{4}x - \frac{13}{2} &\Rightarrow z = f\left(x, \frac{7}{4}x - \frac{13}{2}\right) = \\ &= x^2 + \left(\frac{7}{4}x - \frac{13}{2}\right)^2 - 8 \cdot x + 10\left(\frac{7}{4}x - \frac{13}{2}\right) = \\ &= x^2 + \frac{49}{16}x^2 - \frac{91}{4}x + \frac{169}{4} - 8x + \frac{35}{2}x - 65 = \\ &= \frac{65}{16}x^2 - \frac{53}{4}x - \frac{91}{4} \end{aligned}$$

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z = \frac{65}{16}x^2 - \frac{53}{4}x - \frac{91}{4}$ на отрезке $x \in [2; 6]$:

$$z' = \left(\frac{65}{16}x^2 - \frac{53}{4}x - \frac{91}{4} \right)' = \frac{65}{8}x - \frac{53}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{106}{65} = 1\frac{41}{65} \notin [2; 6]$$

$$x = 2, y = -3 \Rightarrow z_6 = f(2, -3) = z(A) = -33$$

$$x = 6, y = 4 \Rightarrow z_7 = f(6, 4) = z(C) = 44$$

$$\Rightarrow z_{\text{наиб. на } AC} = \max\{z_6, z_7\} = 44$$

$$z_{\text{наим. на } AC} = \min\{z_6, z_7\} = -33$$

$$\Rightarrow z_{\text{наиб. на } \gamma D} = \max\left\{z_{\text{наиб. на } AB}, z_{\text{наиб. на } BC}, z_{\text{наиб. на } AC}\right\} = 44$$

$$z_{\text{наим. на } \gamma D} = \max\left\{z_{\text{наим. на } AB}, z_{\text{наим. на } BC}, z_{\text{наим. на } AC}\right\} = -37$$

5) Выберем наибольшее (наименьшее) значение из

- наибольшего (наименьшего) из значений функции $z = f(x, y)$ в стационарных точках, лежащих внутри компакта D ;
- наибольшего (наименьшего) значений функции $z = f(x, y)$ на границе γD компакта D :

Поскольку у функции $z = f(x, y)$ только одна стационарная точка P_0 , и она лежит вне компакта D , то

$$z_{\text{наиб. на } D} = z_{\text{наиб. на } \gamma D} = 44$$

$$z_{\text{наим. на } D} = z_{\text{наим. на } \gamma D} = -37$$

Ответ:

$$z_{\text{наиб. на } D} = 44 \text{ при } x = 6, y = 4;$$

$$z_{\text{наим. на } D} = -37 \text{ при } x = 6, y = -3.$$