1. Аффинные пространства

26. Может ли матрица $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ быть матрицей Грама некоторого базиса?

27. Найдите угол между векторами $a = {}^t(1, -2, 3, 2)$ и $b = {}^t(2, 1, -1, 5)$, если координаты этих векторов указаны в базисе, матрица Грама которого есть $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

28. Найдите объём параллелотопа, построенного на векторах $a_1 = {}^t(1, -2, 3, 2)$, $a_2 = {}^t(-1, 2, 3, 2)$, $a_3 = {}^t(1, 2, -3, 2)$, $a_4 = {}^t(1, 2, 3, -2)$, если координаты этих векторов указаны в базисе, матрица Грама которого есть $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

29. Проделайте процесс ортогонализации для векторов $a_1 = {}^t(2, 0, 0, -1)$, $a_2 = {}^t(0, 1, 3, 0)$, $a_3 = {}^t(1, -3, 1, 2)$, если координаты этих векторов указаны в базисе, матрица Грама которого есть $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

30. Найдите угол между вектором $x = {}^t(2, 2, 1, 1)$ и подпространством, порожденном векторами $a_1 = {}^t(3, 4, -4, -1)$, $a_2 = {}^t(0, 1, -1, 2)$, если координаты этих векторов указаны в базисе, матрица Грама которого есть $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

31. Найдите длину большой диагонали n-мерного куба с ребром a и предел этой длины при $n \longrightarrow \infty$.

32. Найдите угол между большой диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

33. Найдите точку B, симметричную точке $A(1, 2, 3, 4)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3$, где $p_0 = {}^t(1, 4, -2, 3)$, $a_1 = {}^t(0, 2, 1, 1)$, $a_2 = {}^t(1, -2, 0, 3)$, $a_3 = {}^t(2, 2, 1, -1)$.

34. Параллелотоп в $\mathbb{R}^4$ построен на векторах $a_1 = {}^t(0, 2, 1, 1)$, $a_2 = {}^t(1, -2, 0, 3)$, $a_3 = {}^t(2, 2, 1, -1)$, $a_4 = {}^t(3, 2, 2, 5)$, отложенных от точки $p_0 = {}^t(1, 1, 2, -3)$. Проверьте, лежит ли точка $q = {}^t(7, 5, 6, 5)$ внутри этого параллелотопа или снаружи?

35. Изометрия $\mathcal{A}(x) = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ пространства $\mathbb{R}^3$ поворачивает точки

пространства вокруг оси $x = y = z$ на угол $\pi/3$ по часовой стрелке, после чего сдвигает их в направлении, противоположном этой оси, на расстояние 1. Найдите точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе.

2. Гладкие линии на плоскости

26. На зеркало, имеющее форму полуокружности, падает пучок параллельных лучей света. Найдите огибающую отраженных лучей.

27. Напишите уравнение касательной к циклоиде в произвольной точке.

28. Найдите уравнение окружности, имеющей касание наибольшего порядка с линией $y = e^x$ в точке $(0, 1)$.

29. Найдите уравнение параболы, имеющей касание наибольшего порядка с первой аркой циклоиды в ее вершине.

30. Докажите, что только одна нормаль линии $y = x^n$ (n — целое положительное число) проходит через начало координат.

31. Покажите, что линия $y = a \sin(x/a)$ пересекает ось Ox под углом, не зависящим от величины a.

32. Найдите точки пересечения и углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 6x = 9$.

33. Покажите, что линия $y = a \ln(x/a)$ пересекает ось Ox под углом, не зависящим от величины a.

34. Найдите точки пересечения и углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 + 2x = 7$ и $y^2 - 4x = 0$.

35. Найдите порядок касания в начале координат линий $y = x^3$ и $y = x \sin x$.

3. Кривые на плоскости

26. Найдите соприкасающуюся окружность равносторонней гиперболы $xy = 1$ в ее произвольной точке.

27. На кривой $y = e^x$ найдите точки, в которых кривизна принимает экстремальные значения.

28. Составьте уравнение и начертите эволюту линии $y = \operatorname{tg} x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$.

29. Составьте натуральные уравнения кривой $y = \ln x$.

30. Покажите, что эволютой логарифмической спирали $\rho = ca^\varphi$ является логарифмическая спираль, полученная из данной поворотом вокруг полюса на некоторый угол.

31. Составьте натуральные уравнения кривой $y = x^{3/2}$.

32. Составьте уравнение и начертите эволюту линии $y = x^{2k}$ (k — натуральное число, большее единицы).

33. Составьте уравнение и начертите эволюту линии $y = x^{2k+1}$ (k — произвольное натуральное число).

34. Составьте натуральные уравнения кривой $\rho = a(1 + \sin\varphi)$.

35. Какая кривая задается натуральным уравнением $k = 1/(as)$, $a > 0$?

4. Кривые в пространстве

26. Докажите, что кривизна и кручение у кривой $\alpha(t) = a^t(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t)$ совпадают.

27. Докажите, что кривизна и кручение у кривой $\alpha(t) = {}^t(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ совпадают.

28. Найдите кривизну и кручение кривой $\alpha(t) = {}^t(2t, \ln t, t^2)$.

29. Докажите, что кривая $\alpha(t) = {}^t\left(\dfrac{1+t}{1-t}, \dfrac{1}{1-t^2}, \dfrac{t}{1+t}\right)$ является плоской, и найдите уравнение плоскости, в которой лежит образ этой кривой.

30. Найдите базис Френе кривой $\alpha(t) = {}^t(e^{-t}, e^{2t}, e^t, e^{-2t})$ в точке $t_0 = 0$. Составьте уравнения координатных осей, двумерных и трехмерных координатных плоскостей репера Френе в этой точке.

31. Найдите последний вектор базиса Френе кривой $\alpha(t) = {}^t(t^3, t^2, 3t^2, 2t^2 + t, t^+t^2 - 1)$. Что означает полученный результат?

32. Вычислите векторы репера Френе и кривизны кривой

$$\alpha(t) = {}^t\left(\cos t, \sin t, \frac{\cos 2t}{2}, \frac{\sin 2t}{2}\right).$$

33. Докажите, что кривая $\alpha(t) = {}^t(2t^2 + t - 1, 3t^2 - 2t + 75, t^2 - 2t + 4)$ является плоской, и найдите уравнение плоскости, в которой лежит образ этой кривой.

34. Составьте натуральные уравнения кривой $\alpha(t) = {}^t(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$.

35. Составьте натуральные уравнения кривой $\alpha(t) = {}^t(a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt)$.

5. Внутренняя геометрия поверхностей

26. Найдите первую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v,w) = {}^t(u-v, u+v, uvw, u^2+v^3+w^4),$$

если скалярное произведение в её окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

27. Найдите первую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v,w) = {}^t(uv, u^2-v^2, vw, u^2+2v^2+3w^2),$$

если скалярное произведение в её окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

28. Найдите первую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av),$$

если скалярное произведение в её окружающем пространстве задано следующей матрицей Грама: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

29. Найдите первую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u),$$

если скалярное произведение в её окружающем пространстве задано следующей матрицей Грама: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

30. Найдите длину линии $u(t) = {}^t(t,t)$, $t \in (-\pi,\pi)$, вдоль поверхности $f(u,v) = {}^t(a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v)$.

31. Найдите угол между линиями $v = u+1$ и $v = 3-u$ на поверхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, u^2)$.

32. Найдите уравнения локсодром на торе

$$f(u,v) = {}^t(a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v).$$

33. Найдите площадь четырехугольника на прямом геликоиде $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$, ограниченного линиями $u=-a$, $u=a$, $v=0$, $v=1$.

34. Найдите площадь прямоугольного треугольника на сфере радиуса R, сторонами которого являются дуги больших окружностей этой сферы.

35. Совпадают ли внутренние геометрии поверхностей

$$f(u,v) = {}^t(a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v)$$

и $f(u,v) = {}^t((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$ при условии $a>b$?

6. Внешняя геометрия поверхностей

26. Найдите вторую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v,w) = {}^t(u, vw, uw, u^2v^2w^2).$$

27. Найдите вторую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v,w) = {}^t(u, v+w, v-w, uvw).$$

28. Найдите вторую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v,w) = {}^t(R\cos u\cos v\cos w, R\cos u\sin v\cos w, R\sin u\cos w, R\sin w).$$

29. Найдите вторую фундаментальную форму поверхности

$$f(u,v,w) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u, w).$$

30. Найдите матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке гиперповерхности

$$f(u,v,w) = {}^t(R\cos u\cos v\cos w, R\cos u\sin v\cos w, R\sin u\cos w, R\sin w).$$

31. Найдите матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке гиперповерхности

$$f(u,v,w) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u, w).$$

32. Найдите матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке гиперповерхности

$$f(u,v,w) = {}^t(u, v, w, uvw).$$

33. Найдите главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности $f(u,v,w) = {}^t(u,v,w,uvw)$ в точке $p(0,0,0)$.

34. Докажите, что координатные линии поверхности

$$f(u,v) = {}^t(3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3u^2 - 3v^2)$$

являются линиями кривизны.

35. Вычислите нормальную кривизну гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$f(u,v,w) = {}^t(u+v, u-v, v+w, uvw)$$

в направлении вектора скорости кривой $\alpha(t) = f(\beta(t))$ в точке $t_0 = 1$, где $\beta(t) = {}^t(2t, -3t, t^2)$ — кривая в области $U \subseteq \mathbb{R}^3$.