## §10. Решение типовых задач по булевым функциям

№ 1. Построить таблицу истинности функции (формулы) $f = x \cdot y \to x \vee z$.

Решение.
Таблица истинности содержит все возможные комбинации значений переменных. Количество таких комбинаций равно $2^n$, где $n$ = количество переменных, от которых зависит $f$.
В задаче $n$ = 3. Следовательно, количество строк в таблице равно $2^3 = 8$.

Каждую комбинацию значений переменных можно считать целым числом, записанным в двоичном виде. Удобным считается такой порядок, при котором числа перечислены по возрастанию сверху вниз.

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \cdot y$ | $x \vee z$ | $x \cdot y \to x \vee z$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Эта таблица и является ответом.

№ 2. Будет ли функция $f = x \cdot y \to x \vee z$ тождественно истинной?

Решение.

Составим таблицу истинности:

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \cdot y$ | $x \vee z$ | $x \cdot y \to x \vee z$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

В таблице в последнем столбце во всех строчках значение 1. Следовательно, функция является тождественно истинной.

Ответ: функция является тождественно истинной.

№ 3. Будет ли функция $f = x \cdot y \to x \vee z$ равносильна функции $g = x \leftrightarrow y$?

Решение.
Составим одну таблицу истинности для обеих функций:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f = x \cdot y \to x \vee z$ | $g = x \leftrightarrow y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

По таблице видно, что существуют строки, в которых значения функций $f$ и $g$ не совпадают, например третья, четвертая, пятая и шестая строки.

Ответ: функции $f$ и $g$ не равносильны.

№ 4. Привести функцию $f = x \vee y \to z$ к СДНФ и СКНФ.

Решение.

Составим таблицу истинности для функции:

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \vee y$ | $x \vee y \to z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Для поиска СДНФ выделим строчки, где значение функции равно 1. Количество элементарных конъюнкций в СДНФ равно количеству таких строк.

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \vee y$ | $x \vee y \to z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Каждой единице в последнем столбце соответствует одна элементарная конъюнкция, содержащая атомарную формулу (если ее значение 1) или ее отрицание (если ее значение 0).

Первой строке соответствует элементарная конъюнкция $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$.
Второй строке соответствует элементарная конъюнкция $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$.
Четвертой строке соответствует элементарная конъюнкция $\bar{x} \cdot y \cdot z$.
Шестой строке соответствует элементарная конъюнкция $x \cdot \bar{y} \cdot z$.
Восьмой строке соответствует элементарная конъюнкция $x \cdot y \cdot z$.

Дизъюнкция полученных элементарных конъюнкций – СДНФ.

Ответ: $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot z$ – СДНФ.

Для поиска СКНФ выделим строчки, где значение функции равно 0. Количество элементарных дизъюнкций в СКНФ равно количеству таких строк.

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \vee y$ | $x \vee y \to z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Каждому нулю в последнем столбце соответствует одна элементарная дизъюнкция, содержащая атомарную формулу (если ее значение **0**) или ее отрицание (если ее значение **1**).

Третьей строке соответствует элементарная дизъюнкция $x \vee \bar{y} \vee z$.
Пятой строке соответствует элементарная дизъюнкция $\bar{x} \vee y \vee z$.
Седьмой строке соответствует элементарная дизъюнкция $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$.

Конъюнкция полученных элементарных дизъюнкций – СКНФ.

Ответ: $(x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ – СКНФ.

№ 5. Привести функцию $f = x \vee y \to z$ к ДНФ и КНФ.

Решение.
Полученный в № 4 ответ СДНФ является ДНФ.
Однако ДНФ может быть более коротким. Его можно найти, используя свойства операций.

$$f = x \vee y \to z = \overline{(x \vee y)} \vee z =$$

(использовано свойство $A \to B = \overline{A} \vee B$)

$$= (\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee z$$

(использован закон де Моргана $\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ )

Ответ: $(\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee z$ – ДНФ.

Полученный в № 4 ответ СКНФ является КНФ.
Однако КНФ может быть более коротким. Его можно найти, используя свойства операций.

$$f = x \vee y \to z = \overline{(x \vee y)} \vee z = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \vee z =$$

$$= (\bar{x} \vee z) \cdot (\bar{y} \vee z)$$

(использовано свойство дистрибутивности)

Ответ: $(\bar{x} \vee z) \cdot (\bar{y} \vee z)$ – КНФ.

№ 6. Найти полином Жегалкина для функции $x \mid y$ (Штрих Шеффера).

Определение. Полиномом Жегалкина для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, записанная с использованием умножения, сложения по модулю 2, констант 0 и 1.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1, \ldots, i_k\}} a_{i_1, \ldots, i_k} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}.$$

Решение.

Функция Штрих Шеффера зависит от двух переменных $x$ и $y$, следовательно, $x \mid y = a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y \oplus a_3 \cdot x \cdot y$.

Для поиска коэффициентов $a_0, a_1, a_2, a_3$ составим таблицу истинности:

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ | Полином Жегалкина |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |

Подставим в полином $a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y \oplus a_3 \cdot x \cdot y$ с неизвестными коэффициентами значения $x$ и $y$ из первой строки:

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ | Полином Жегалкина |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a_0$ |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |

Совпадение значений функции Штрих Шеффера и полинома Жегалкина возможно только если $a_0 = 1$.

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ | Полином Жегалкина |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a_0$ |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |

$\Rightarrow \quad a_0 = 1$

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ | Полином Жегалкина |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a_0$ |
| 0 | 1 | 1 | $1 \oplus a_2$ |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |

$\Rightarrow \; a_0 = 1$

$\Rightarrow \; a_2 = 0$

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ | Полином Жегалкина |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a_0$ |
| 0 | 1 | 1 | $1 \oplus a_2$ |
| 1 | 0 | 1 | $1 \oplus a_1$ |
| 1 | 1 | 0 | |

$\Rightarrow \; a_0 = 1$

$\Rightarrow \; a_2 = 0$

$\Rightarrow \; a_1 = 0$

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ | Полином Жегалкина | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a_0$ | $\Rightarrow \ a_0 = 1$ |
| 0 | 1 | 1 | $1 \oplus a_2$ | $\Rightarrow \ a_2 = 0$ |
| 1 | 0 | 1 | $1 \oplus a_1$ | $\Rightarrow \ a_1 = 0$ |
| 1 | 1 | 0 | $1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_3$ | $\Rightarrow \ a_3 = 1$ |

Найденный полином $x \mid y = 1 \oplus 0 \cdot x \oplus 0 \cdot y \oplus 1 \cdot x \cdot y$ можно записать более коротко:

$x \mid y = 1 \oplus x \cdot y$.

Ответ: $x \mid y = 1 \oplus x \cdot y$.

№ 7. Принадлежит ли классам $T_0$, $T_1$, S, M, L функция $x \mid y$ (Штрих Шеффера).

Решение.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией, сохраняющей 0, если $f(0,0,\ldots,0) = 0$.

Классом $T_0$ называется класс всех функций, сохраняющих 0.

Воспользуемся построенной ранее таблицей истинности для функции $x \mid y$ (Штрих Шеффера).

| x | y | $x \mid y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Значение функции от нулевых аргументов – значение в первой строке:

$0 \mid 0 = 1 \neq 0$. Следовательно, $x \mid y \notin T_0$.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией, сохраняющей 1, если $f(1,1,\ldots,1) = 1$.
Классом $T_1$ называется класс всех функций, сохраняющих 1.

Значение функции от единичных аргументов – значение в последней строке:
$1|1 = 0 \neq 1$. Следовательно, $x \,|\, y \notin T_1$.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной, если $\neg f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n)$.
Классом S называется класс всех самодвойственных функций.

Составим таблицу истинности для $x \mid y$:

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Функция самодвойственная, только если на симметричных местах (относительно средней линии таблицы) стоят противоположные значения.

Для значений (0, 0) и (1, 1) выполняется $\overline{f(0,0)} = f(\overline{0}, \overline{0})$.

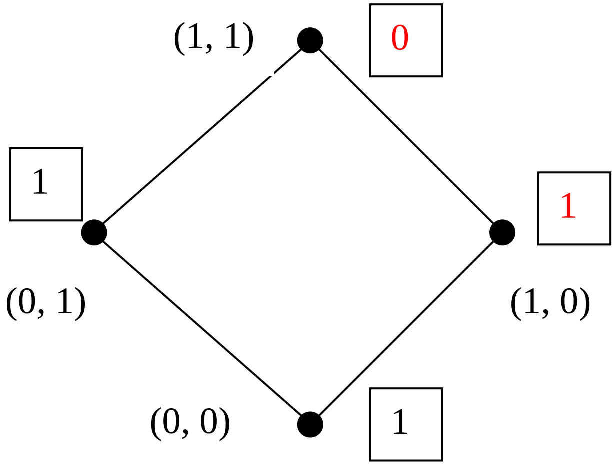
Однако для значений (0, 1) и (1, 0) равенство $\overline{f(0,1)} = f(\overline{0}, \overline{1})$ не верно.

Следовательно, определение самодвойственной функции не выполняется.

$x \mid y \notin S$.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для любых значений $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, из условия $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, \ldots, a_n \le b_n$ следует, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Классом М называется класс всех монотонных функций.

Нарисуем диаграмму частично упорядоченного множества векторов с двумя координатами. В прямоугольниках рядом с точками, соответствующим векторам, запишем значение функции $x \mid y$:




Легко увидеть пример, в котором определение монотонной функции нарушается:

$f\,(1, 0) > f(1, 1).$

$x \mid y \notin M$ .

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется линейной, если ее полином Жегалкина линейный, т.е.
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_n x_n$.
Классом L называется класс всех линейных функций.

Для проверки линейности можно не находить полином Жегалкина. Предположим, что $x \mid y = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$. Попытаемся найти коэффициенты $a_0, a_1, a_2$, используя таблицу:

| $x$ | $y$ | $x \mid y$ | Линейная функция | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a_0$ | $\Rightarrow a_0 = 1$ |
| 0 | 1 | 1 | $1 \oplus a_2$ | $\Rightarrow a_2 = 0$ |
| 1 | 0 | 1 | $1 \oplus a_1$ | $\Rightarrow a_1 = 0$ |
| 1 | 1 | 0 | $1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$ | не совпадает |

Следовательно, не существует коэффициентов $a_0, a_1, a_2$, при которых выполнялось бы равенство $x \mid y = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$.

$x \mid y \notin L$.

Ответ: $x \mid y \notin T_0$, $x \mid y \notin T_1$, $x \mid y \notin S$, $x \mid y \notin M$, $x \mid y \notin L$.

№ 8. Доказать полноту класса $K = \{ \bar{x}, \ x \cdot y \}$, используя теорему Поста.

Решение.

Теорема Поста. Класс K полный, тогда и только тогда, когда K не является подмножеством ни $T_0$, ни $T_1$, ни S, ни M, ни L.

Запишем результаты проверки для функций класса K в таблицу Поста (знак «+» означает, что функция принадлежит классу, знак «–»означает, что не принадлежит):

| | $T_0$ | $T_1$ | $S$ | M | L |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg x$ | – | – | + | – | + |
| $x \cdot y$ | + | + | – | + | – |

Если в столбце есть хотя бы один минус, то K не является подмножеством класса, указанного в заголовке столбца.
В нашей таблице в каждом столбце есть хотя бы один минус. Следовательно, K не является подмножеством ни $T_0$, ни $T_1$, ни S, ни M, ни L.

По теореме Поста класс K полный.

№ 9. Доказать полноту класса $K = \{x \mid y\}$, используя сведение к известным полным классам.

Решение:

Покажем, что любая функция из $K_2 = \{x \cdot y, \overline{x}\}$ может быть выражена через $K$.

Составим таблицу значений для $x \mid x$.

| $x$ | $x \mid x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Следовательно, $\overline{x} = x \mid x$.

Воспользуемся наблюдением, что $x \mid y = \overline{x \cdot y}$.

Следовательно, $x \cdot y = \overline{x \mid y}$.

Тогда $x \cdot y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$.

Полнота $K$ доказана.