§8. Гомоморфизм. Конечно порожденные группы. Теорема о гомоморфном образе

Опр. Гомоморфизмом группоида (A_1, φ) в группоид (A_2, ψ) называется всюду определенное отображение $\gamma: A_1 \to A_2$, сохраняющее операцию, т.е. $\gamma(a \varphi b) = \gamma(a) \psi \gamma(b)$.

Если γ сюръективно, то A_2 называется гомоморфным образом группоида A_1.

Замечание: Гомоморфизм отличается от изоморфизма тем, что отсутствует инъективность, т.е. возможно «склеивание» элементов.

Например, если несколько элементов из моноида A_1 отображаются в «ноль» моноида A_2.

Опр. Ядром гомоморфизма γ моноида (A_1 , φ) в моноид (A_2 , ψ) называется подмножество $K \subseteq A_1 : \gamma(K) = e_2$ (нейтральный элемент моноида A_2).

Обозначение: Ker γ.

Замечание: ядро гомоморфизма – характеристика, указывающая на возможности «склеивания».

Опр. Конгруэнцией группоида (A_1, φ) называется отношение эквивалентности R на A_1, сохраняющееся при операции, т.е. если $x\ R\ y,\ \ u\ R\ v$, то $(x\varphi u)\ R\ (y\varphi v)$.

Опр. Ядром гомоморфизма γ группоида (A_1, φ) в группоид (A_2, ψ) называется конгруэнция R на A_1: $x\ R\ y \Leftrightarrow \gamma(x) = \gamma(y)$.

Опр. Конечно порожденной группой с m образующими называется группа $(G,\cdot) = < a_1, a_2, \ldots, a_m >$, содержащая нейтральный элемент e, обратные элементы к $a_1, a_2, \ldots, a_m$, и все возможные произведения элементов из $\{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_m^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_m^{-1}\}$.

Замечание: любая конечная группа является конечно порожденной.

Определение. Циклической группой называется конечно порожденная группа с одним образующим a.

$$(G,\cdot\,) = <a>$$

Пример 1. $(G,\cdot\,) = <a>$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$$Z_5 = <1> = <2> = <3> = <4>$$

Пример 2. $(G, \cdot) = < a_1, a_2 >$.

Пусть $G = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, операция $\cdot$ это почленное сложение по модулю 2.

$\cdot$	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(0,0)	(1,1)	(0,1)
(0,1)	(0,1)	(1,1)	(0,0)	(1,0)
(1,1)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)

$(G, \cdot) = < (1,0); (0,1) > = < (1,0); (1,1) > = < (0,1); (1,1) >$

Теорема.
Любая конечно порожденная группа с m образующими является гомоморфным образом свободной группы над M, где $|M| = m$.

Доказательство:

Пусть $(G,\cdot)=<a_1,a_2,\ldots,a_m>$ – конечно порожденная группа с m образующими. Рассмотрим $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$, определим $M^{-1}=\{a_1^{-1},a_2^{-1},\ldots,a_m^{-1}\}$.

Построим свободную группу V над M (она состоит из всех слов над алфавитом $M\cup M^{-1}$, включая ε).

Построим отображение $\gamma : V\to G$, для каждого слова $w=b_1b_2\ldots\cdot b_p$ определив $\gamma(w)=c_1\cdot c_2\cdot\ldots\cdot c_p$, где $c_i=\begin{cases} a_j, & \text{если } b_i\in M \\ a_j^{-1}, & \text{если } b_i\in M^{-1} \end{cases}$.

Отображение γ всюду определенное, сюръективное, сохраняет операцию. Следовательно, γ – гомоморфизм.

Замечание: если слова w_1 и w_2 эквивалентны, то $\gamma(w_1) = \gamma(w_2)$.

Теорема доказана.