Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
Нижнетагильский технологический институт (филиал)

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

*Рекомендовано Методическим советом
Нижнетагильского технологического института (филиал) УрФУ
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
в качестве учебно-методического пособия
для студентов всех форм обучения всех специальностей*

Авторы-составители:
С. Е. Демин, Е. Л. Демина

Нижний Тагил
2014

УДК 517.2

Р е ц е н з е н т ы :

кафедра гуманитарного и естественно-научного образования
филиала ФГБОУ ВПО «Уральская академия государственной службы» в г. Нижний Тагил
(зав. кафедрой: д-р фил. наук В. М. Петров);
доцент кафедры общенаучных дисциплин филиала ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный университет путей сообщения»
в г. Нижнем Тагиле К. В. Курмаева

Научный редактор: канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Феофанова

Дифференциальное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. пособие / авт.-сост.: С. Е. Демин, Е. Л. Демина ; М-во образования и науки РФ ; ФГАОУ ВПО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил : НТИ (филиал) УрФУ, 2014. – 282 с.

Рассматриваются вопросы раздела «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» курса «Математика» для студентов всех специальностей и форм обучения.

Приводятся многочисленные примеры и подробные пояснения к ним. Основу данного пособия составили лекции, прочитанные авторами в Нижнетагильском технологическом институте (филиал) УрФУ.

Учебно-методическое пособие содержит 39 заданий (по 30 вариантов для каждого), которые позволяют формировать индивидуальную домашнюю работу студентов по данному разделу.

Рекомендовано для самостоятельной работы студентов всех форм обучения всех специальностей при изучении соответствующего раздела высшей математики, а также для использования в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий.

Библиогр.: 13 назв.

УДК 517.2

Учебное издание

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Авторы-составители:
ДЕМИН Сергей Евгеньевич
ДЕМИНА Елена Леонидовна

Редактор *А. В. Кочурина*

Подписано в печать 06.11.2014. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Ризография
Усл. печ. л. 17,63. Уч.-изд. л. 19,94. Тираж 110 экз. Заказ № 1942.

Редакционно-издательский отдел

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
Нижнетагильский технологический институт (филиал)
622031, г. Нижний Тагил, ул. Красногвардейская, 59

Отпечатано в РИО НТИ (филиал) УрФУ

Оглавление

Введение

В данном пособии изучается раздел математики, называемый *дифференциальным исчислением.* В нем продолжается исследование свойств функций, заданных на интервалах. Если ранее такое исследование было доведено лишь до выяснения свойств непрерывных функций, то дифференциальное исчисление продвигает его намного дальше.

Свойство непрерывности говорит о том, что функция мало отклоняется от своего значения в точке x_0 при малом отклонении Δx аргумента от x_0. Поэтому в окрестности точки x_0 непрерывную функцию можно приближенно заменить константой (ее значением в точке x_0), при этом абсолютная погрешность приближения стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

Однако такая аппроксимация никак не отражает того, как меняется функция при переходе независимой переменной через точку x_0, какова скорость этого изменения, возрастает или убывает она при этом. Дифференциальное исчисление отвечает в первую очередь на эти вопросы. С помощью вводимых понятий производной и дифференциала функции в точке x_0 удается построить более точную аппроксимацию функции в окрестности точки x_0 не константой, а линейной функцией. Такая аппроксимация отражает не только величину, но и характер изменения функции в точке x_0.

Значение такого подхода к локальному исследованию функции связано с тем, что он позволил ввести строгое понятие скорости изменения функции в точке. На языке физики это, например, возможность дать строгое определение скорости неравномерного движения; на языке геометрии – возможность определить касательную к произвольной линии. С такого рода приложениями было связано бурное развитие основ дифференциального исчисления во второй половине XVII века – в эпоху расцвета механики и астрономии.

Дифференциальное исчисление было создано независимо друг от друга Исааком Ньютоном (1643–1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716). Кропотливая работа их учеников придала дифференциальному исчислению тот совершенный вид, который присущ сейчас. Этапными в этом направлении были работы Огюстена Коши (1789–1857) и Карла Вейершрассе (1815–1897).

Глава 1. Производные и дифференциалы

1. Исходные понятия

1.1. Определение производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X. Возьмем некоторое фиксированное значение $x_0 \in X$ и столь малое приращение независимой переменной Δx, что точка $(x_0 + \Delta x) \in X$, причем приращение Δx – положительное или отрицательное число.

Выражение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ является приращением функции, соответствующим указанному приращению Δx.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Это отношение будем называть разностным отношением. Оно определено при всех $\Delta x \neq 0$, достаточно малых по абсолютной величине. Поскольку x_0 фиксировано, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ является функцией только Δx.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует) отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

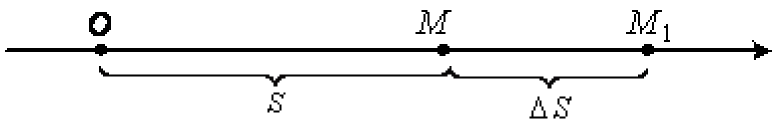
Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 будем обозначать символом $f'(x_0)$, или $y'_x(x_0)$. Итак,

$$y'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}.$$

Замечание. Если функция $y = f(x)$ определена и имеет производную для всех x из интервала (a, b), то эта производная будет представлять собой некоторую функцию переменной x, также определенную на интервале (a, b).

1.2. Механический смысл производной

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки, положение которой определяется расстоянием S, отсчитываемым от некоторой начальной точки O.



Пусть движение точки описывается функцией $S(t)$, которая при каждом значении времени t определяет пройденное точкой расстояние $S = S(t)$. Требуется определить скорость v точки в момент времени t.

Пусть в момент времени t точка занимает положение M. Для определения скорости v придадим t приращение Δt. Тогда пройденный точкой путь получит приращение $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, и точка займет новое положение M_1. Отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ равно средней скорости движения точки за промежуток Δt. Скорость точки в момент времени t, очевидно, определится предельным переходом

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Таким образом, производная функции с физической точки зрения равна скорости движения точки в данный момент времени.

Более того, заметим, что *производная любой функции при данном значении аргумента равна скорости изменения этой функции при рассматриваемом x.*

Так, например:

а) если функция $N = N(t)$ определяет количество вещества, уже вступившего в химическую реакцию к моменту t, то тогда производная определяет скорость химической реакции в данный момент времени t:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t};$$

б) если функция $q = q(t)$ определяет количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника за время t, то тогда производная определяет силу тока в проводнике в данный момент времени t:

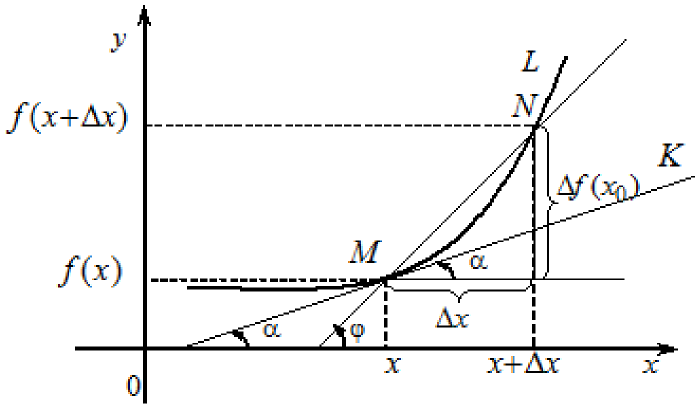
$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t};$$

в) если функция $Q = Q(t)$ определяет количество теплоты, сообщенное телу при нагревании его до температуры T, то тогда производная определяет теплоемкость тела при данной температуре T:

$$C(T) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Q(T + \Delta T) - Q(T)}{\Delta T}.$$

1.3. Геометрический смысл производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки *x*. Возьмем на нем точку *M* (*x*, *y*) и близкую к ней, тоже лежащую на кривой, точку *N* (*x* +Δ *x*, *y* + Δ*y*).



Очевидно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где α – угол, образованный секущей *MN* с положительным направлением оси Ox. При стремлении Δ*x* к нулю точка *N*, оставаясь на кривой, будет неограниченно приближаться к точке *M*, а секущая *MN* будет разворачиваться и займет предельное положение – станет касательной *MK*, которая образует угол φ с осью Ox. Таким образом, ясно, что производная $f'(x)$ равна тангенсу угла φ, образованного касательной к кривой в точке $M(x; f(x))$ с положительным направлением оси Ox.

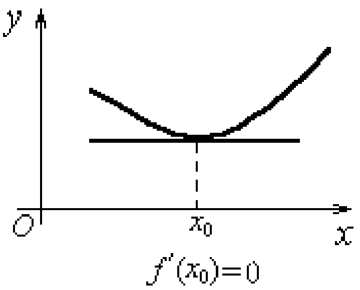
Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ при $x = x_0$.

Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой с угловым коэффициентом *k* через точку $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

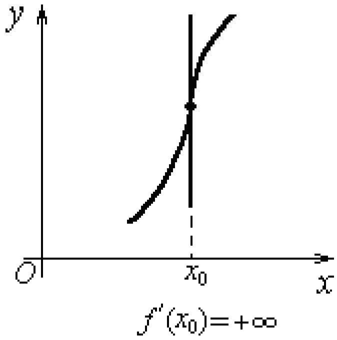
Для касательной будем, следовательно, иметь следующее уравнение:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

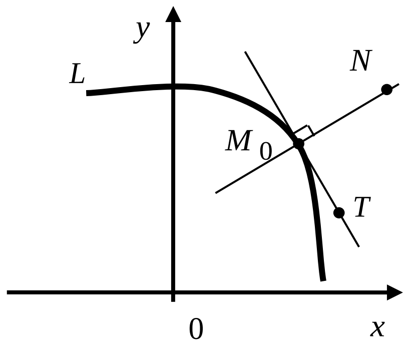
В частности, если $f'(x_0) = 0$, то касательная имеет уравнение $y = y_0$, т. е. касательная горизонтальна.



В случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ тангенс угла наклона касательной равен бесконечности, и при соответствующих значениях x функция $f(x)$ имеет бесконечную производную.



Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью* к кривой.

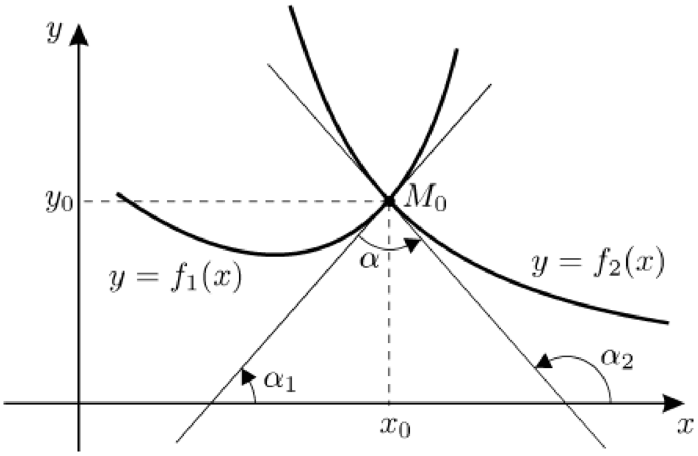


Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет следующий вид:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0)$$

(при условии, что $f'(x_0) \neq 0$).

Определение. *Углом между кривыми* в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым, проведенным в точке касания.



Воспользовавшись формулой для тангенса угла между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2, получим формулу для угла между кривыми:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\, f_2'(x_0)}\right|.$$

Отметим, что если $f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0) = -1$, то $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, т. е. графики функций ортогональны в точке их пересечения.

1.4. Односторонние и бесконечные производные

Введем теперь понятие *правосторонней* и *левосторонней производной*. Допустим, что приращение независимой переменной Δx стремится к нулю не произвольным образом, а со стороны отрицательных значений или со стороны положительных значений, т. е. $\Delta x \to -0$, или $\Delta x \to +0$.

Определение 1. Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, где X – область определения функции $f(x)$, называется

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

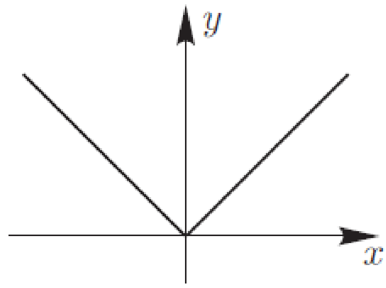
Определение 2. Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, где X – область определения функции $f(x)$, называется

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Заметим, что при определении производной функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ способ стремления приращения Δx к нулю предполагается произвольным. Поэтому ясно, что если у функции $y=f(x)$ существует производная, то $f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$.

Пример. Найти односторонние производные функции $y=|x|$ в точке $x_0 = 0$.

Решение:



По определению $|x|=\begin{cases} x, \ x\ge 0, \\ -x, \ x<0. \end{cases}$ Следовательно,

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1,$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=-1.$$

Односторонние производные функции в точке $x_0 = 0$ существуют, но не совпадают, значит, в нуле у данной функции производная не существует. Заметим, кроме того, что данная функция непрерывна в начале координат. Отсюда можно сделать вывод, что из непрерывности функции в некоторой точке x_0 еще не следует, что в этой точке у функции существует производная.

Введем понятие бесконечной производной.

Определение. Если отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к $+\infty\ (-\infty)$, то это несобственное число называется *бесконечной производной*. Геометрическое истолкование производной как углового коэффициента касательной распространяется и на этот случай, но здесь касательная становится параллельной оси OY (см. разд. 3).

На рисунке представлены всевозможные случаи односторонних и бесконечных производных:

a) в точке $x = a$ производная существует и конечна;

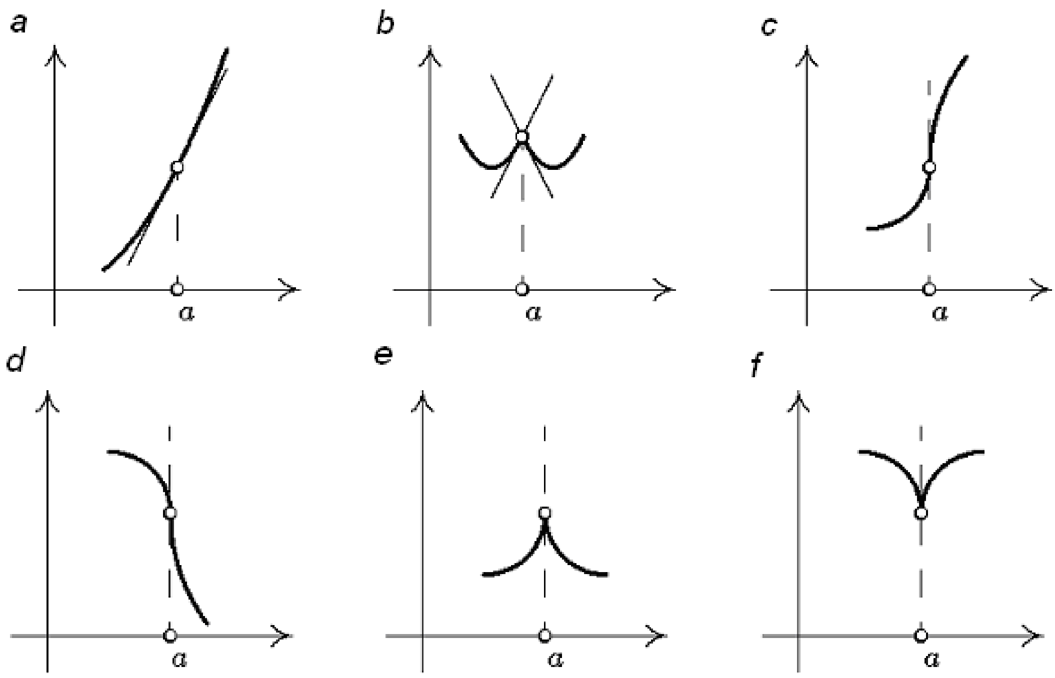
b) в точке $x = a$ производная не существует, но существуют $f'(a+0)$ и $f'(a-0)$;

c) производная в точке $x = a$ равна $+\infty$;

d) производная в точке $x = a$ равна $-\infty$;

e) в точке $x = a$ производная не существует, но $f'(a-0) = +\infty$, а $f'(a+0) = -\infty$;

f) также в точке $x = a$ производная не существует, но $f'(a-0) = -\infty$, а $f'(a+0) = +\infty$.



1.5. Дифференцируемость функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в этой точке имеет вид $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A – постоянное число, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке). **Для того чтобы функция *f*(*x*)**

была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда имеет место равенство $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Считая $\Delta x \neq 0$, получим $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(x)$, и, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [A + \alpha(x)] = A + 0 = A$, откуда $f'(x_0) = A$, т. е. в точке x_0 существует конечная производная.

Достаточность.

Пусть в точке x_0 функция имеет конечную производную $f'(x_0)$. Обозначим ее через A, тогда по определению производной $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, откуда из свойств предела функции имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножая обе части последнего уравнения на Δx, приходим к уравнению $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, т. е. $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема.

Таким образом, дифференцируемость функции в точке и существование в этой точке ее конечной производной понятия равносильные (для функции многих переменных это будет не так).

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке она и непрерывна.**

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда полное приращение функции в этой точке $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. Мы отметили выше, что обратное утверждение неверно, т. е. из непрерывности функции в данной точке x_0 не следует ее дифференцируемость в точке x_0. (Это было показано при рассмотрении вопроса о дифференцируемости функции $y = |x|$ в начале координат). Приведем еще один пример.

Пример. Исследовать на дифференцируемость функцию $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 0$.

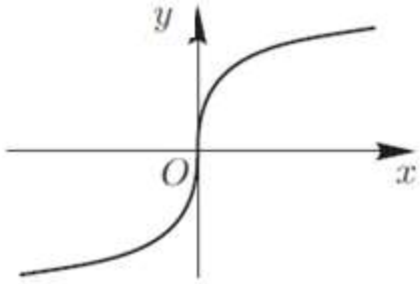
Решение:

Данная функция непрерывна, и ее производная равна

$$y'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty ,$$

т. е. касательная параллельна оси *Oy*.

Таким образом, из непрерывности функции $y = \sqrt[3]{x}$ не следует ее дифференцируемость.



Если функция дифференцируема в каждой точке замкнутого промежутка $[a, b]$, то ее называют дифференцируемой на этом промежутке. О дифференцируемости функции на концах промежутка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$ говорить нельзя, т. к. в этих точках могут существовать только право- и левосторонние производные соответственно.

2. Основные правила дифференцирования

2.1. Производные элементарных функций

2.1.1. Производная постоянной

Рассмотрим функцию $y = c$, где $c = \text{const}$ $\forall\ x \in X$. По определению $c' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0$.

Итак, $c' = 0$.

2.1.2. Производная степенной функции

Найдем производную степенной функции $y = x^a$, где a – любое вещественное число. По определению производной

$$\left(x^a\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^a \left[\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^a - 1\right]}{\Delta x}.$$

В силу того, что $\ln(1 + x) \sim x$ при $x \to 0$, имеем

$$\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{a}-1\right] \sim \ln\left(\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{a}-1\right]+1\right)=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{a}=a\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Следовательно,

$$\left(x^{a}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{a}\cdot a\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{a}\cdot a\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{a\cdot x^{a}}{x}=a\cdot x^{a-1}.$$

Итак, $\left(x^{a}\right)'=a\cdot x^{a-1}$.

Примеры:

1. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-2}=-\dfrac{1}{x^{2}}$.

2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.1.3. Производная показательной функции

Продифференцируем показательную функцию $y=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$:

$$\left(a^{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}.$$

В силу того, что $a^{\Delta x}-1\sim\ln\left[1+\left(a^{\Delta x}-1\right)\right]=\ln a^{\Delta x}=\Delta x\cdot\ln a$, имеем

$$\left(a^{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\cdot\Delta x\cdot\ln a}{\Delta x}=a^{x}\cdot\ln a.$$

В частности, $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$.

2.1.4. Производная логарифмической функции

Найдем производную логарифмической функции $y=\log_{a}x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
Если $x>0$ и $|\Delta x|<x$, то при $\Delta x\neq 0$ имеем

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x/x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

Следовательно, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$.

В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

2.1.5. Производная некоторых тригонометрических функций

1. Найдем производную функции $y=\sin x$:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\Delta x}{2\cdot\Delta x}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Итак, $(\sin x)'_x = \cos x$.

2. Аналогично можно доказать, что $(\cos x)' = -\sin x$.

2.2. Теоремы о дифференцировании

Теорема. **Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то их сумма, произведение и частное (последнее при условии, что $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место равенства**

$$(u+v)'=u'+v', \quad (uv)'=u'v+uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Доказательство. Докажем формулу для производной частного.
Найдем Δy:

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{[u(x)+\Delta u]v(x) - [v(x)+\Delta v]u(x)}{(v(x)+\Delta v)v(x)} =$$

$$= \frac{\Delta u v(x) - u(x)\Delta v}{(v(x)+\Delta v)v(x)}.$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x) - u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v)v(x)}$.

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Так как при этом $\Delta v \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x) - u(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Следствие. Для любого $c \in R$ имеет место равенство $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

Пример. Найти производные следующих функций: *а*) $y = x^4$, *б*) $y = \frac{1}{x^4}$, *в*) $y = \sqrt[3]{x^5}$, *г*) $y = \frac{\cos x}{3} + \sin 5$, *д*) $y = e^x + x^2 \sin x$, *е*) $y = \frac{x^3+1}{x}$.

Решение:

а) Согласно пп.2.1.2 при $n = 4$ имеем $y' = (x^4)' = 4x^3$;

б) $y = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$. Согласно пп. 2.1.2, при $n = -4$ имеем

$$y' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5};$$

в) $y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$. По формуле из пп. 2.1.2 при $n = \dfrac{5}{3}$ имеем $y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$;

г) $y = \dfrac{\cos x}{3} + \sin 5 = \dfrac{1}{3}\cos x + \sin 5.$

Так как $\sin 5$ не зависит от x (т. е. $\sin 5 = \text{const}$), то $(\sin 5)' = 0$. Тогда

$$y' = \left(\frac{1}{3}\cos x\right)' = -\frac{1}{3}\sin x;$$

д) $y' = (e^x)' + (x^2 \sin x)'$. Поэтому

$$y' = e^x + (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' = e^x + 2x\sin x + x^2\cos x;$$

$$e)\ \left(\frac{x^3+1}{x}\right)' = \frac{\left(x^3+1\right)'\cdot x-\left(x^3+1\right)\cdot x'}{x^2}=\frac{3x^2\cdot x-x^3-1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}.$$

2.3. Производные тригонометрических и гиперболических функций

Продолжим нахождение производных от тригонометрических функций:

1. Найдем производную функции $y = \operatorname{tg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \ne n\pi + \dfrac{\pi}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

2. Аналогично можно показать, что

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\quad (x \ne n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3. Найдем производную функции $y = \sec x$:

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\operatorname{tg} x,\quad \left(x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Аналогично

$$(\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\operatorname{cosec} x\cdot\operatorname{ctg} x,\quad (x \ne n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

5. Найдем производную функции $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$:

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x.$$

6. Аналогично $(\operatorname{ch} x)' = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x$.

7. Найдем производную функции $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)'' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x-(\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)^2}=\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

8. Аналогично

$$\left(\operatorname{cth} x\right)'_x = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)'_x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

2.4. Производная сложной функции

Теорема. **Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x производную $u_x = \varphi'(x)$, функция $y = f(u)$ имеет в точке u производную $y_u = f'(u)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет в точке x производную, равную произведению производных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (*правило цепочки*).**

Доказательство. Придадим переменной x приращение Δx, тогда переменная u получит приращение Δu, как следствие, функция $y = f(u)$ получит приращение Δy. Так как функция $y = f(u)$ дифференцируема, то $\Delta y = y'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$, где $\alpha(\Delta u)$ – бесконечно малая функция при $\Delta u \to 0$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Так как при этом $\Delta u \to 0$, то

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\alpha(\Delta u)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\left(y'(u) + \lim_{\Delta u \to 0}\alpha(\Delta u)\right) = y'(u)\cdot u'(x) = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \ln\sin x$.

Решение:

Функция сложная, ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = \ln u; \quad u = \sin x.$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией. По правилу цепочки

$$y' = y'_u u'_x = \frac{1}{u}\cdot\cos x = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Решение:

Функция сложная, ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = \operatorname{arctg} u; \quad u = \frac{1}{x}.$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией. По правилу цепочки

$$y' = y'_u u'_x = \frac{1}{1+u^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+(1/x)^2} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = 3^{\sin(3x+\pi)}$.

Решение:

Функция сложная, ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = 3^u;\quad u = \sin v;\quad v = 3x + \pi .$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией. По правилу цепочки

$$y' = y'_u u'_v v'_x = 3^{\sin(3x+\pi)} \ln 3\big(\cos(3x+\pi)\big)\cdot 3 .$$

Однако находить производные сложных функций целесообразней, не расписывая их в виде звеньев элементарных функций. Чтобы продифференцировать таким способом, нужно находить производные от звеньев функций, мысленно представляя их в виде цепочки и оперируя структурно. Для чего будем находить производные от структур задания сложной функции, записывая их моделями.

Пример 4. Найти производную $y = \operatorname{ctg}^{\frac{1}{3}}\left[\ln(x^2+1)\right]$.

Решение:

$$y'_x = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^{-\frac{2}{3}}\{\ln(x^2+1)\}\left(-\frac{1}{\sin^2\ln(x^2+1)}\right)\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x .$$

Мы нашли производную от степенной функции (прикроем пальцем степень $\frac{1}{3}$), потом от котангенса (прикроем еще котангенс) – остается открытым логарифм, далее от натурального логарифма (теперь закроем и логарифм) и, наконец, от аргумента x^2+1.

Пример 5. Найти производную $y = \ln^{18}[\operatorname{tg}(\sqrt[3]{e^{x^4}}+1)]$.

Решение:

Продифференцируем как степенную (прикроем пальцем степень 18), логарифмическую (прикроем еще натуральный логарифм – остается открытым тангенс), потом тангенс (прикроем также тангенс), иррациональную (закроем еще корень), экспоненту (теперь прикроем пальцем и e) и, наконец, от аргумента x^4, причем все эти производные перемножаются:

$$y'_x = 18 \ln^{17}[\mathrm{tg}(\sqrt[3]{e^{x^4}+1})] \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\sqrt[3]{e^{x^4}+1}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{e^{x^4}+1}} \times$$

$$\times \frac{1}{3}\left(e^{x^4}+1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{x^4} \cdot 4x^3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = 5^{\mathrm{tg}\, 2^{\cos^2 x}}$.

Решение:

$$\left(5^{\mathrm{tg}\, 2^{\cos^2 x}}\right)'_x = 5^{\mathrm{tg}\, 2^{\cos^2 x}} \cdot \ln 5 \frac{1}{\cos^2 2^{\cos^2 x}} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2\cos x(-\sin x).$$

2.5. Производная обратной функции

Теорема. **Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая обратную функцию $x = g(y)$, и пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = g(y)$ дифференцируема в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$, причем имеет место равенство**

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Функция $y = f(x)$, по условию теоремы, имеет обратную, т. е. является строго монотонной и непрерывной.

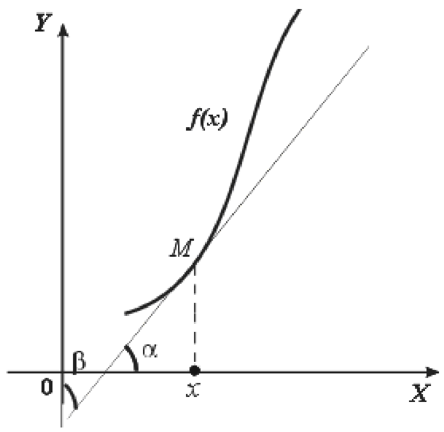
Придадим переменной y приращение $\Delta y \neq 0$. Тогда переменная x получит приращение $\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$.

Вследствие строгой монотонности $\Delta x \neq 0$; вследствие непрерывности из условия $\Delta x \to 0$ следует, что $\Delta y \to 0$.

Обратно, т. к. $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$, то из условия $\Delta y \to 0$ следует, что $\Delta x \to 0$.

Тогда из условия теоремы о существовании производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ следует и существование производной $g'(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$,

т. е. $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.



Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Пусть M – точка графика функции $y = f(x)$, производная $f'(x)$ равна тангенсу угла наклона α касательной, проходящей через M, к оси OX, а производная обратной функции $\left(f^{-1}(y)\right)'$ в соответствующей точке $y = f(x)$ равна тангенсу угла наклона β той же самой касательной к оси OY. Так как углы наклона $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то формула нахождения производной обратной функции выражает очевидный факт: $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Пользуясь доказанной теоремой, найдем производные обратных тригонометрических функций:

1. $y = \arcsin x$ на интервале $[-1;1]$.

$x = \sin y$, тогда $1 = \cos y \cdot y'$, откуда

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$ следовательно,

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in \left]-1;+1\right[.$$

2. $y = \arccos x$ на интервале $[-1;1]$.

$x = \cos y$. $1 = -\sin y \cdot y'$, откуда

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$ следовательно,

$$(\arccos x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in \left]-1;+1\right[.$$

3. $y = \operatorname{arctg} x$ на интервале $]-\infty;+\infty[$.

$$x = \operatorname{tg} y\,;\ 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y',$$

откуда $y' = \cos^2 y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in \left]-\infty; +\infty\right[.$$

4. $y = \operatorname{arcctg} x$ на интервале $]-\infty; +\infty[$.

$$(\operatorname{arcctg} x)'_x = -\frac{1}{(1 + x^2)} \quad \forall x \in \left]-\infty; +\infty\right[.$$

Теперь сведем все полученные формулы в таблицу производных.

Таблица производных

№ п/п	Функция	Производная	№ п/п	Функция	Производная
1	$y = C$	$y' = 0$	13	$y = \operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{u'_x}{\sin^2 u}$
2	$y = u$	u'_x	14	$y = \sec u$	$\sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'_x$
3	$y = è^n$	$nu^{n-1} \cdot u'_x$	15	$y = \operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'_x$
4	$y = \sqrt{u}$	$\dfrac{u'_x}{2\sqrt{u}}$	16	$y = \operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u \cdot u'_x$
5	$y = \dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'_x}{u^2}$	17	$y = \operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u \cdot u'_x$
6	$y = a^u$	$a^u \ln a \cdot u'_x$	18	$y = \operatorname{th} u$	$\dfrac{u'_x}{\operatorname{ch}^2 u}$
7	$y = e^u$	$e^u \cdot u'_x$	19	$y = \operatorname{cth} u$	$-\dfrac{u'_x}{\operatorname{sh}^2 u}$
8	$y = \log_a u$	$\dfrac{u'_x}{u \ln a}$	20	$y = \arcsin u$	$\dfrac{u'_x}{\sqrt{1 - u^2}}$
9	$y = \ln u$	$\dfrac{u'_x}{u}$	21	$y = \arccos u$	$-\dfrac{u'_x}{\sqrt{1 - u^2}}$
10	$y = \sin u$	$\cos u \cdot u'_x$	22	$y = \operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'_x}{1 + u^2}$
11	$y = \cos u$	$-\sin u \cdot u'_x$	23	$y = \operatorname{arcctg} u$	$-\dfrac{u'_x}{1 + u^2}$
12	$y = \operatorname{tg} u$	$\dfrac{u'_x}{\cos^2 u}$	–	–	–

Практическая часть 1
Непосредственное вычисление производных явных функций

1. Нахождение производных по определению

Пример 1. Найти по определению производную функции $y = x^3$ в любой точке.

Решение:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Пример 2. Найти по определению производную функции $y = e^{2x+1}$ в любой точке.

Решение:

Приращение функции $\Delta y = e^{2(x+\Delta x)+1} - e^{2x+1} = e^{2x+1}(e^{2\Delta x} - 1)$. Тогда

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{2x+1}(e^{2\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{2x+1} \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{2\Delta x} - 1\right) = e^{2x+1} \lim_{\Delta x \to 0} \ln e^{2\Delta x} =$$

$$= e^{2x+1} \lim_{\Delta x \to 0} \left(2\Delta x \ln e\right) = 2e^{2x+1}.$$

2. Нахождение производных по теоремам

Пример 1. Найти производные следующих функции:

1) $y = x^2 + \sin x$; 2) $y = 3\ln x$; 3) $y = xe^x$; 4) $y = \left(\dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x}\right)$;

5) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2x^2}{\sqrt{x}}$.

Решение:

1) $\left(x^2 + \sin x\right)' = (x^2)' + \left(\sin x\right)' = 2x + \cos x$;

2) $(3\ln x)' = 3(\ln x)' = 3 \cdot \dfrac{1}{x}$;

3) $\left(x \cdot e^x\right)' = x' \cdot e^x + x(e^x)' = e^x + x \cdot e^x$;

$$4)\ \left(\frac{x^2}{\operatorname{tg} x}\right)=\frac{(x^2)'\cdot\operatorname{tg} x-x^2(\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2}=\frac{2x\operatorname{tg} x-x^2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$5)\ y=\frac{\sqrt[3]{x}-2x^2}{\sqrt{x}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}-2x^2}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-2x^{2-\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{6}}-2x^{\frac{3}{2}},$$

и тогда

$$y'=-\frac{1}{6}x^{\frac{-7}{6}}-2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6\sqrt[6]{x^7}}-3\sqrt{x}=\frac{-1}{6x\sqrt[6]{x}}-3\sqrt{x}.$$

П р и м е р 2. Найти значение производной функции $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ в точке $x=4$.

Решение:

Применим формулу производной частного и дважды формулу производной степенной функции:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^{1/2})'(x^2-1)-(x^2-1)'\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)-2x\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-1-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}=-\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}.$$

При $x=4$ $\quad y'(4)=-\dfrac{1+48}{2\cdot 2\cdot 225}=-\dfrac{49}{900}$.

П р и м е р 3. Найти производную функции $y=x+(1-x)\ln x$.

Решение:

$$y'=1+(1-x)'\ln x+(1-x)(\ln x)'=1-\ln x+\frac{1-x}{x}=-\ln x+\frac{1}{x}.$$

П р и м е р 4. Найти производную функции $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$.

Решение:

$$y'=\frac{x'(\sin x+\cos x)-x(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin x+\cos x-x\cos x+x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

3. Производная сложной функции

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin^2 x$.

Решение:

Функция сложная, ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = u^2; \quad u = \sin x.$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией (см. табл. производных):

$$y' = y'_u u'_x = 2u \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \cos^2 4x$.

Решение:

Функция сложная, ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = u^2; \quad u = \sin v; \quad v = 4x.$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией (см. табл. производных):

$$y' = y'_u u'_v v'_x = 2u \cdot (-\sin v) \cdot 4 = 2 \cdot 4 \cdot \cos 4x \cdot (-\sin 4x) = -4\sin 8x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \sin^3 \ln 6x$.

Решение:

Функция сложная, ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = u^3; \quad u = \sin v; \quad v = \ln w; \quad w = 6x.$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией (см. табл. производных):

$$y' = y'_u u'_v v'_w w'_x = 3u^2 \cos v \frac{1}{w} 6 = 3\sin^2 \ln 6x \cos \ln 6x \frac{1}{6x} 6 = \frac{3}{x} \sin^2 \ln 6x \cos \ln 6x.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{2^x}{x}\right)$.

Решение:

Функция сложная, ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = \operatorname{arctg}\, u\,; \quad u = \frac{2^x}{x}.$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией:

$$y' = y'_u u'_x = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{2^x}{x}\right)^2} \cdot \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{x^2} = \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{x^2 + 4^x}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 e^{x^3}}{x^3 + 1}$.

Решение:

$$y' = \frac{(2xe^{x^3} + x^2 3x^2 e^{x^3})(x^3 + 1) - (3x^2)x^2 e^{x^3}}{(x^3 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 e^{x^3} + 3x^7 e^{x^3} + 2xe^{x^3} + 3x^4 e^{x^3} - 3x^4 e^{x^3}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{xe^{x^3}(2x^3 + 3x^6 + 2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Решение:

$$y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'}{a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x\left[\dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)\right] \cdot \left(a^2 - x^2\right)'}{a^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2 - x^2}{\left(a^2 - x^2\right)\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)} = \frac{a^2 - 2x^2}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = x\cos x \sin x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

Решение:

Преобразуем данную функцию: $y = \dfrac{x}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

$$y' = \left(\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x\right)' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = \sqrt[4]{x^3}\sin^2 2x$.

Решение:

$$y' = (\sqrt[4]{x^3})'\sin^2 2x + \sqrt[4]{x^3}(\sin^2 2x)' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\sin^2 2x + 4\sin 2x\cos 2x\sqrt[4]{x^3}.$$

Пример 9. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[4]{\ln^3 x}}{3^x}$.

Решение:

$$y' = \frac{\left(\sqrt[4]{\ln^3 x}\right)'3^x - \left(3^x\right)'\sqrt[4]{\ln^3 x}}{3^{2x}} = \frac{\dfrac{3\cdot 3^x}{4x\sqrt[4]{\ln x}} - 3^x\ln 3\sqrt[4]{\ln^3 x}}{3^{2x}} = \frac{3 - 4x\ln x}{4x\sqrt[4]{\ln x}\,3^x}.$$

Пример 10. Найти производную функции $y = \sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}$.

Решение:

$$\left(\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}\right)' = \left[\left(e^{2x} + \cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + \cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{2x} + \cos^2 x\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{2x} + \cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{2x}(2x)' + 2\cos x(-\sin x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}}\cdot(e^{2x}\cdot 2 - 2\cos x\sin x).$$

Пример 11. Найти в точке $x = 0$ производную функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x} + 5}}$.

Решение:

Преобразуем функцию к виду, удобному для дифференцирования:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x} + 5}} = (3e^{4x} + 5)^{-\frac{1}{3}}.$$

Теперь воспользуемся формулами производных степенной функции и экспоненты:

$$f'(x) = ((3e^{4x}+5)^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3}(3e^{4x}+5)^{-\frac{4}{3}}(3e^{4x}+5)' =$$

$$= \frac{-3\cdot e^{4x}\cdot(4x)'}{3(3e^{4x}+5)^{4/3}} = \frac{-4e^{4x}}{(3e^{4x}+5)^{4/3}}.$$

Подставляем значение $x = 0$ и получаем

$$f'(0) = \frac{-4}{(3+5)^{4/3}} = \frac{-4}{(2^3)^{4/3}} = \frac{-4}{2^4} = -\frac{1}{4}.$$

Пример 12. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$.

Решение:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример 13. Найти производную функции $y = \sqrt{\operatorname{arctg}\left(e^x\right)^3}$.

Решение:

$$\left(\sqrt{\operatorname{arctg}(e^x)^3}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}\cdot\left(\operatorname{arctg} e^x\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

Пример 14. Найти производную сложной функции $y = \ln(\ln(\ln x))$.

Решение:

$$y' = [\ln(\ln(\ln x))]' = \frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot[\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Пример 15. Найти производную функции $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Решение:

$$y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{1+1+\sin^2 x}\cdot\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)' =$$

$$=\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}}}{2+\sin^2 x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot\left(1+\sin^2 x\right)'=\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}}}{2\cdot\left(2+\sin^2 x\right)\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'=$$

$$=\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\left(2+\sin^2 x\right)\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot\sin x\cdot\cos x\,.$$

Пример 16. Найти производную функции $y=\ln\left(\sin\frac{2x+4}{x+1}\right)$.

Решение:

$$\left(\ln\left(\sin\frac{2x+4}{x+1}\right)\right)'=\frac{1}{\sin\frac{2x+4}{x+1}}\cdot\left(\sin\frac{2x+4}{x+1}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{2x+4}{x+1}}\cdot\cos\frac{2x+4}{x+1}\cdot\left(\frac{2x+4}{x+1}\right)'=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{2x+4}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)-2x-4}{(x+1)^2}=-\frac{2}{(x+1)^2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{2x+4}{x+1}.$$

Пример 17. Найти производную функции $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x\cdot\ln(\arcsin x)$.

Решение:

$$y'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\arcsin x\cdot\ln(\arcsin x)+\sqrt{1-x^2}(\arcsin x\cdot\ln(\arcsin x))'=$$

$$=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\cdot\ln(\arcsin x)+\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)'\ln(\arcsin x)+$$

$$+\sqrt{1-x^2}\arcsin x(\ln(\arcsin x))'=$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\cdot\ln(\arcsin x)+\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\ln(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+\sqrt{1-x^2}\arcsin x\cdot\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\cdot\ln(\arcsin x)+\ln(\arcsin x)+1.$$

Пример 18. Найти производную функции $4^{\sin\sqrt{x+\frac{x^3}{7}}}$.

Решение:

$$\left(4^{\sin\sqrt{x+\frac{x^3}{7}}}\right)' = \left(4^{\sin\sqrt{x+\frac{x^3}{7}}}\right)\ln 4\cdot\cos\sqrt{x+\frac{x^3}{7}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{x^3}{7}}}\cdot\left(1+\frac{3x^2}{7}\right).$$

4. Геометрический и механический смысл производной

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = e^{1-x^2}$ в точке $x_0 = -1$.

Решение:

Уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке M_1 (x_0,y_0) имеет вид

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$

где $y_0 = f(x_0)$ и $y_0' = f'(x_0)$.

Уравнение нормали к линии $y = f(x)$ в точке M_1 (x_0,y_0) имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0),$$

где $y_0 = f(x_0)$ и $y_0' = f'(x_0)$.

В нашем случае $y = f(x) = e^{1-x^2}$, $y' = -2xe^{1-x^2}$. Тогда $y_0 = f(-1) = e^0 = 1$, $f'(-1) = 2$.

Составим уравнение касательной: $y - 1 = 2(x+1)$, или $2x - y + 3 = 0$.

Уравнение нормали: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x+1)$, или $x + 2y - 1 = 0$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к кривой $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение:

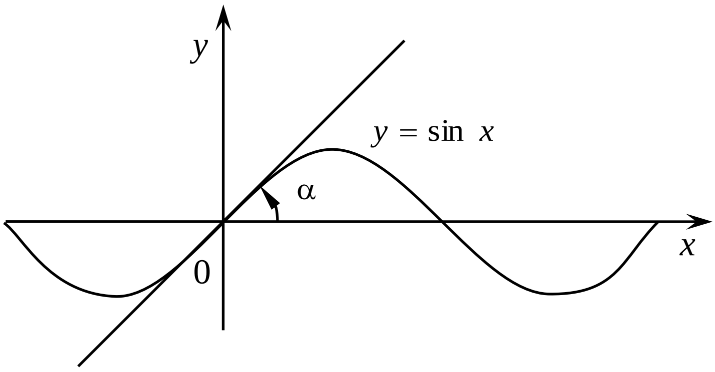
$$\left(\frac{1+3x^2}{3+x^2}\right)' = \frac{6x\left(3+x^2\right) - 2x(1+3x^2)}{\left(3+x^2\right)^2} = \frac{18x + 6x^3 - 3x - 6x^3}{\left(3+x^2\right)^2} = \frac{16x}{\left(3+x^2\right)^2}.$$

Уравнение касательной в точке $x_0 = 1$ имеет вид

$$y - \frac{1+3\cdot 1^2}{3+1^2} = \frac{16}{\left(3+1^2\right)^2}\cdot(x-1), \quad \text{или } y - 1 = x - 1, \text{ или } \ y = x.$$

Пример 3. Найти угол, под которым синусоида пересекает ось *OX* в начале координат.

Решение:



Так как $y = \sin x$, то $y' = \cos x$, откуда $y'(0) = 1$, следовательно, касательная, а значит, и синусоида пересекают ось Ox под таким углом α, для которого $\operatorname{tg} \alpha = 1$, т. е. под углом $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 4. Найти угол, под которым пересекаются кривые $l_1 : y = (x-2)^2$ и $l_2 : y = 4x - x^2 + 4$.

Решение:

Найдем точки пересечения кривых. Из равенства $(x-2)^2 = 4x - x^2 + 4$ находим точки пересечения: $M_1(0;4)$, $M_2(4;4)$.

Для точки M_1 вычислим угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к кривым:

$$y = (x-2)^2, \qquad y' = 2(x-2), \qquad k_{1,1} = -4.$$

$$y = 4x - x^2 + 4, \quad y' = 4 - 2x, \qquad k_{2,1} = 4.$$

Угол φ_1 между касательными определяем по формуле $\operatorname{tg} \varphi_1 = \dfrac{k_{1,1} - k_{2,1}}{1 + k_{1,1} k_{2,1}}$, откуда $\varphi_1 = -\operatorname{arctg} \dfrac{8}{15}$.

В точке M_2 имеем соответственно $k_{1,2} = 4$ и $k_{2,2} = -4$. Тогда $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{8}{15}$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–20, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1. $y = \ln^2 \sin \dfrac{x^3}{x+1}$.

2. $u = \arcsin \sqrt[3]{1 - \mathrm{tg}^4 x} + \cos^2 3x$.

3. $u = \mathrm{ctg}\,(1 - bx)^2 + x^5 \,\mathrm{arcctg}\, 2x$.

4. $y = \cos^2 \left(x + 3^{-x}\right)$.

5. $y = \arcsin \sqrt[3]{x - \mathrm{ctg}^2 x} + \sin\left(2^x\right)$.

6. $y = \left(\ln^2 \mathrm{tg}\, \dfrac{1}{x}\right) \arccos 3x$.

7. $y = \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{1 + 3x^2}$.

8. $y = 2^{\arcsin \left(x\sqrt{1-x}\right)}$.

9. $y = \left(\sin^3 2x\right) \mathrm{arcctg}\; e^{-x} + \sqrt[3]{\cos(1-x)}$.

10. $y = \mathrm{ctg} \sqrt[3]{2^{3x} - \ln x} + \sin^3 2x$.

11. $y = e^{-2x} \,\mathrm{arctg}^3 \dfrac{1}{x}$.

12. $y = \arccos^3 \left(\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}\right) + \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x} - 1}$.

13. $y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{-x}}$.

14. $y = \cos^2 \sqrt[3]{x^2 - x\sqrt{1 - x}}$.

15. $y = \arcsin \dfrac{2^x}{x^2} + \mathrm{arctg}^3 \dfrac{1}{x}$.

16. $y = \dfrac{1}{2} \ln \mathrm{tg} \left(\sqrt{ax} - \dfrac{x}{2}\right) + \mathrm{ctg}\, \dfrac{1}{x}$.

17. $y = e^{-x^2} + (1 - bx)^3 \sin^5 2x$.

18. $y = \mathrm{arcctg}^2 \dfrac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}$.

19. $y = \cos^3 4x + \arcsin\left(x \cdot 2^x\right)$.

20. $y = \cos \ln \left(2^x - \dfrac{x^2}{2}\right)$.

21. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ в точке $x_0 = 1$.

22. Написать уравнение касательной к кривой $y = \left(\sqrt{2x} - 1\right)^3$ в точке $x_0 = 2$.

23. В какой точке касательная к кривой $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Ox под углом 45°? Написать уравнение этой касательной.

24. В какой точке касательная к кривой $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox? Написать уравнение этой касательной.

25. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \mathrm{arctg}\, x$ в точке $x_0 = 1$.

26. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ в точке $x_0 = 2$.

Ответы:

1) $$2\ln\sin\frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{\cos\frac{x^3}{x+1}}{\sin\frac{x^3}{x+1}}\cdot\frac{3x^2+2x^3}{(x+1)^2};$$

2) $$\frac{-4\,\mathrm{tg}^3x\cdot\sec^2x}{3\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(1-\mathrm{tg}^4x\right)^2}}\sqrt[3]{\left(1-\mathrm{tg}^4x\right)^2}}-3\sin 6x;$$

3) $$2b\,\mathrm{cosec}^2(1-bx)^2\cdot(1-bx)+5x^4\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{2x^5}{1+4x^2};$$

4) $$-2\sin 2\left(x+3^{-x}\ln 3\right)\left(1-3^{-x}\ln 3\right);$$

5) $$\frac{1+2\,\mathrm{ctg}\,x\cdot\mathrm{cosec}^2x}{3\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(x-\mathrm{ctg}^2x\right)^2}}\sqrt[3]{\left(x-\mathrm{ctg}^2x\right)^2}}+\cos 2^x\cdot 2^x\cdot\ln 2;$$

6) $$2\ln\mathrm{tg}\frac{1}{x}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right)\cdot\arccos 3x-\frac{3\ln^2\mathrm{tg}\frac{1}{x}}{\sqrt{1-9x^2}};$$

7) $$2\,\mathrm{tg}\frac{x}{1+3x^2}\cdot\sec^2\frac{1-3x^2}{\left(1+3x^2\right)^2};$$

8) $$2^{\arcsin\left(x\sqrt{1-x}\right)}\cdot\ln 2\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2+x^3}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+\frac{x}{2\sqrt{1-x}}}{x-x^3};$$

9) $$6\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot\mathrm{arcctg}\,e^{-x}+\frac{e^{-x}\sin^3 2x}{1+e^{-2x}}+\frac{\sin(1-x)}{3\sqrt[3]{\cos^2(1-x)}};$$

10) $$\frac{\mathrm{cosec}^2\sqrt[3]{2^{3x}-\ln x}}{3\sqrt[3]{\left(2^{3x}-\ln x\right)^2}}\cdot\left(2^{3x}\cdot\ln 2\cdot 3-\frac{1}{x}\right)-6\sin^2 2x\cdot\cos 2x;$$

11) $$-2e^{-2x}\operatorname{arctg}^3\frac{1}{x}-\frac{3\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}\cdot e^{-2x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2};$$

12) $$-3\arccos^2\left(\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)^2}}+\frac{3\sin 3x\left(1-\sqrt{3x}\right)-\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{3x}}}{\left(\sqrt{3x-1}\right)^2};$$

13) $$\frac{1}{\arccos\sqrt{1-e^{-x}}}\cdot\frac{-e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}}\cdot 2\sqrt{1-e^{-x}}};$$

14) $$-\sin 2\sqrt[3]{x^2-x\sqrt{1-x}}\cdot\frac{2x-\sqrt{1-x}+\frac{x}{2\sqrt{1-x}}}{3\sqrt[3]{\left(x^2-x\sqrt{1-x}\right)^2}};$$

15) $$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2^{2x}}{x^4}}}\cdot\frac{2^x\ln 2\cdot x^2-2x\cdot 2^x}{x^4}-3\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2};$$

16) $$\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\sqrt{ax}-\frac{x}{2}\right)}\sec^2\left(\sqrt{ax}-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{2\sqrt{ax}}-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{cosec}^2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2};$$

17) $$-2xe^{-x^2}-3b(1-bx)^2\sin^5 2x+10\sin^4 2x\cos 2x(1-bx)^3;$$

18) $$2\operatorname{arcctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}\cdot\frac{-1}{1+\frac{(3x+1)^2}{2x-1}}\cdot\frac{3\sqrt{2x-1}-\frac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1};$$

19) $$-12\cos^2 4x\cdot\sin 4x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cdot 2^{2x}}}\left(2^x+x2^x\ln 2\right);$$

20) $-\sin\ln\left(2^x-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{2^x-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(2^x\ln 2-x\right)$;

21) $x+2y-2=0,\quad 4x-2y-3=0$;

22) $3x-2y-4=0$;

23) $\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right);\quad 4x-4y-11=0$;

24) $x=-2;\quad y=-4$;

25) $x-2y+\frac{\pi}{2}-1=0,\quad 2x+y-\frac{\pi}{4}-2=0$;

26) $3x+25y-16=0,\quad 125x-15y-244=0$.

Задания

Выполните задания 1–7 из прил. 1.

2.6. Логарифмическое дифференцирование

Пусть дана функция $y = f(x)$. При этом предполагается, что функция $f(x)$ не обращается в нуль в точке $x = x_0$. Покажем один из способов нахождения производной функции $f'(x)$, если $f(x)$ очень сложная функция и по обычным правилам дифференцирования найти производную затруднительно.

Идея этого метода заключается в том, что заданная функция предварительно логарифмируется, а затем результат дифференцируется.

На практике встречаются в основном два случая, когда используется логарифмическое дифференцирование.

2.6.1. Дифференцирование произведения нескольких функций

Требуется найти производную произведения нескольких функций

$$y = u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot u_3(x)\cdot \ldots \cdot u_n(x).$$

Прологарифмируем обе части, воспользуемся свойством логарифма произведения:

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3 + \ldots + \ln u_n.$$

Продифференцируем обе части, левую – как неявную функцию:

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \ldots + \frac{u'_n}{u_n}.$$

Умножая обе части на y и подставляя вместо нее саму функцию, получим

$$y'_x = y\left[\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \ldots + \frac{u'_n}{u_n}\right] = u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot u_3(x)\cdot \ldots \cdot u_n(x)\cdot\left[\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \ldots + \frac{u'_n}{u_n}\right]. \quad (*)$$

Найденная формула дает простой способ нахождения производной функции $y'(x)$.

Пример 1. Найти производную сложной функции $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Решение:

Для нахождения y' предварительно прологарифмируем функцию y:

$$u = \ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x),$$

и найдем производную полученной функции:

$$u' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}.$$

Теперь по формуле (*) получаем

$$y' = \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}\right] \cdot x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

П р и м е р 2. Найти производную функции $y = \dfrac{e^{x^2}\sqrt{1+x^2} \cdot \sin^3 x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Решение:

Прологарифмируем обе части:

$$\ln y = x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 3\ln \sin x - 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2-1).$$

Продифференцируем обе части:

$$\frac{1}{y} y' = 2x + \frac{2x}{2(1+x^2)} + 3\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2}{x} - \frac{1 \cdot 2x}{2(x^2-1)}.$$

Найдем искомую производную:

$$y' = \frac{e^{x^2}\sqrt{1+x^2} \cdot \sin^3 x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\left[2x + \frac{x}{1+x^2} + 3\operatorname{ctg} x - \frac{2}{x} + \frac{x}{1-x^2}\right].$$

2.6.2. Дифференцирование степенно-показательной функции

Применим логарифмическое дифференцирование для *степенно-показательной* функции $[U(x)]^{V(x)}$.

Итак, пусть $y(x) = [U(x)]^{V(x)}$, тогда $\ln y(x) = V(x) \cdot \ln U(x)$. Продифференцируем левую и правую часть этого равенства по x:

$$\frac{1}{y} \cdot y'_x(x) = V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{1}{U(x)} \cdot U'(x),$$

и формула (*) перепишется в следующем виде:

$$y'_x(x) = [U(x)]^{V(x)}\left(V'(x)\ln U(x) + \frac{U'(x) \cdot V(x)}{U(x)}\right).$$

Раскрыв скобки, получим

$$y'_x(x) = [U(x)]^{V(x)} \ln U(x) \cdot V'(x) + V(x) \cdot [U(x)]^{V(x)-1} \cdot U'(x).$$

Таким образом, *производная степенно-показательной функции равна сумме производных этой функции, если ее рассматривать сначала как показательную, а затем как степенную.*

Пример 1. Найти производную функции $y = x^x$ $(x > 0, x \neq 1)$.

Решение:

$\ln y = x \ln x$, поэтому $\dfrac{y'}{y} = \ln x + 1$, откуда $\left(x^x\right)'_x = x^x (\ln x + 1)$.

Пример 2. Найти производную функции $y = (\operatorname{arctg} 4x)^{x^2}$.

Решение:

Запишем производную как сумму производных этой функции, если рассматривать ее сначала как степенную, а затем как показательную:

$$y' = x^2 (\operatorname{arctg} 4x)^{x^2 - 1} \cdot \frac{4}{1 + (4x^2)^2} + (\operatorname{arctg} 4x)^{x^2} \cdot \ln(\operatorname{arctg} 4x) \cdot 2x =$$

$$= (\operatorname{arctg} 4x)^{x^2} \left[\frac{4x^2}{\left(1 + 16x^4\right) \operatorname{arctg} 4x} + 2x \cdot \ln(\operatorname{arctg} 4x) \right].$$

2.7. Дифференцирование неявных функций

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x; y) = 0$. В этом случае говорят, что функция задана *неявно*.

Пусть уравнение $F(x; y) = 0$ задает y как неявную функцию x, т. е. $y = y(x)$. Предположим, что функция y дифференцируема. Если в уравнении $F(x; y) = 0$ под y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x: $F(x; y(x)) = 0$ $\forall x \in [a; b]$.

Продифференцируем это тождество по x, считая $y = y(x)$. Получим новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную искомой функции $y = f(x)$, заданной в неявном виде.

Пример 1. Найти производную функции $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$.

Решение:

Дифференцируя по x неявную функцию и считая, что $y = f(x)$, получаем $2x + 3y + 3x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$, откуда

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

П р и м е р 2. Найти производную функции $x^2+y^2=4$.

Решение:

$$2x\cdot x'+2y\cdot y'=0;\ 2x+2y\cdot y'=0;\ x=y\cdot y';\ y'=-\frac{x}{y}.$$

П р и м е р 3. Найти производную функции $\cos\frac{y}{x}=y^2$.

Решение:

Дифференцируя по x неявную функцию и считая, что y – функция от x, получаем $-\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=2y\cdot y'$, или

$$\left(2x^2y+x\cdot\sin\frac{y}{x}\right)\cdot y'=y\cdot\sin\frac{y}{x},\quad \text{откуда } y'=\frac{y\cdot\sin\frac{y}{x}}{2x^2y+x\sin\frac{y}{x}}.$$

П р и м е р 4. Найти величину угла между касательными, проведенными в точках пересечения кривой $x^2+y^2-4x+4y+3=0$ с осью Ox. Сделать чертеж.

Решение:

Заметим, что данное уравнение второго порядка определяет окружность $(x-2)^2+(y+2)^2=5$ с центром $O'(2;2)$ и радиусом $R=\sqrt{5}$.

Имеем

$$y'=\frac{2-x}{2+x}.$$

Точки пересечения данной кривой с прямой $y=0$ являются решениями следующей системы:

$$\begin{cases}x^2+y^2-4x+4y+3=0,\\ y=0.\end{cases}$$

Таких точек две: $A(1;0)$ и $B(3;0)$. Полагая $x=1$, $y=0$, находим угловой коэффициент k_1 касательной к данной кривой в точке A:

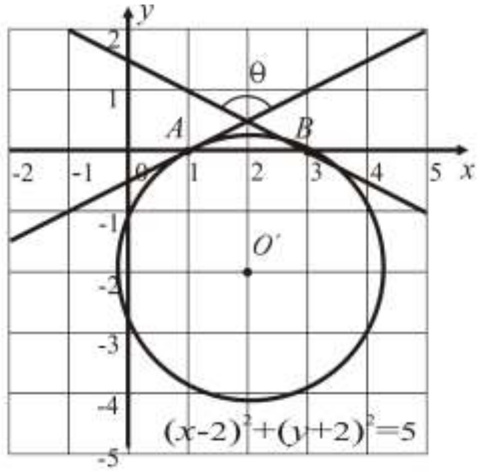
$$k_1=y'(A)=\frac{2-1}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

Аналогично находим угловой коэффициент k_2 касательной в точке B:

$$k_2=y'(B)=-\frac{1}{2}.$$

Угол θ удовлетворяет равенству $\operatorname{tg}\theta=\pm\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, значит,

$\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{4}{3}$, откуда $\theta = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right) \approx 126^{\circ}55'$.



2.8. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы по переменной t на множестве, где эти функции определены, и $\varphi'(t) \neq 0$.

Кроме того, будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема.

Тогда функцию $y = y(x)$, заданную параметрически, можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t),\ t = \varphi^{-1}(x)$, считая t промежуточным аргументом.

Имеем $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 1. Вычислить y'_x для циклоиды, заданной параметрически, $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$.

Решение:

Ясно, что $y'_x = \dfrac{\left[a(1-\cos t)\right]'_t}{\left[a(t-\sin t)\right]'_t} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2} \quad \left(t \neq 2k\pi\right)$.

П р и м е р 2. Вычислить y'_x для астроиды, заданной параметрически, $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$.

Решение:

Ясно, что $y'(x) = \dfrac{\left[a\sin^3 t\right]'_t}{\left[a\cos^3 t\right]'_t} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a^2\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t \quad \left(t \ne \dfrac{\pi k}{2}\right)$.

П р и м е р 3. Вычислить y'_x для кривой, заданной параметрически, $\begin{cases} y = \ln^5(e^{t^2}+1), \\ x = \cos^2 5t. \end{cases}$

Решение:

Ясно, что $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{5\ln^4(e^{t^2}+1)\cdot\dfrac{1}{e^{t^2}+1}\cdot e^{t^2}2t}{2\cos 5t(-\sin 5t)\cdot 5}$.

П р и м е р 4. Написать уравнение касательной к кривой $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t \end{cases}$ в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение:

Вычислим $y'_x = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$, тогда $y'_x(t_0) = \dfrac{4+\pi}{4-\pi}$, $y_0 = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$, $x_0 = x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} = \left(\frac{4+\pi}{4-\pi}\right)\left(x - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$$

2.9. Производные высших порядков

2.9.1. Производные высших порядков от явно заданных функций. Формула Лейбница

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале $]a;\ b[$, представляет собой функцию, также определенную на интервале $]a;\ b[$. Если эта функция $f'(x)$ сама является дифференцируемой в некоторой точке $x \in]a;\ b[$, то ее производную называют *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции $y = f(x)$ и обозначают $f''(x)$, или $f^{(2)}(x)$. После того как введено понятие второй производной, можно последовательно ввести понятие третьей производной, затем четвертой и т. д.

Таким образом, понятие n-й производной вводится индуктивно, при переходе от первой производной к последующим из рекуррентного соотношения $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Функцию, имеющую на данном множестве конечную производную n-го порядка, называют n раз дифференцируемой на этом множестве.

Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная $f'(x)$ задает мгновенную скорость изменения значений $f(x)$ в момент времени x, то вторая производная, т. е. производная от $f'(x)$, задает мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, т. е. *ускорение* значений $f'(x)$. Следовательно, третья производная – это скорость изменения ускорения.

Геометрический смысл второй производной связан с понятиями выпуклости и кривизны графика функции, и мы обсудим его ниже.

Для высших производных произведения функций справедлива формула Лейбница:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Эта формула внешне похожа на формулу бинома Ньютона и, также как формула бинома Ньютона, может быть доказана методом математической индукции. Для низших производных справедливы следующие формулы:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$(u \cdot v)'' = (u'v)' + (uv')' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(u \cdot v)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Пример 1. Найти $y'''(x)$, если $y(x) = x \cdot e^x$.

Решение:

$$y'_x = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x; \qquad y'' = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x;$$

$$y''' = e^x + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x.$$

Пример 2. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = \sin x$.

Решение:

$$y'_x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right);$$

....

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

П р и м е р 3. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = \cos x$.

Решение:

Аналогично рассуждая, получим $y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2.9.2. Производные высших порядков от неявно заданных функций

По определению, вторая производная есть производная от первой производной. Найденную, как описано в разд. 12, первую производную, дифференцируем еще раз по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражение для второй производной войдут $x, y,$ и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''' и производных более высокого порядка.

П р и м е р 1. Найти $y''(x)$ от неявной функции $y = \ln(x + y)$.

Решение:

$y' = \dfrac{1 + y'}{x + y}$, отсюда $y' = \dfrac{1}{x + y - 1}$. Дифференцируем последнее равенство по x, при этом вновь рассматриваем y как функцию от x:

$$y'' = -\frac{1 + y'}{(x + y - 1)^2}.$$

Заменяя в этом выражении y' на $\dfrac{1}{x + y - 1}$, получим

$$y'' = -\frac{1+\dfrac{1}{x+y-1}}{(x+y-1)^2} = -\frac{x+y-1+1}{(x+y-1)^3} = -\frac{x+y}{(x+y-1)^3}.$$

П р и м е р   2. Найти производную второго порядка от функции $y = f(x)$, заданной уравнением $y^2 - 7x^2 + 5 = 0$.

Решение:

Найдем первую производную: $2y \cdot y' - 14x = 0$, откуда $y' = \dfrac{7x}{y}$.

Дифференцируя данное уравнение вторично, получаем $y'' = \dfrac{7(y - y'x)}{y^2}$.

Так как $y' = \dfrac{7x}{y}$, имеем $y'' = \dfrac{7(y^2 - 7x^2)}{y^3}$.

2.9.3. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра *t*: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дважды дифференцируемы по переменной t на множестве, где эти функции определены, и $\varphi'(t) \neq 0$.

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к нахождению первой производной от функции, заданной параметрически, изученной в разд. 13:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

откуда $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Аналогично определяется третья производная: $y'''_x = \dfrac{(y''_x)'_t}{x'_t}$ и т. д.

П р и м е р 1. Вычислить y_x''' для астроиды, заданной параметрически $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$.

Решение:

Первая производная была определена в разд. 13, $y'_x = -\operatorname{tg} t$. Тогда

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\dfrac{\cos^5 t - 4\cos^3 t\sin^2 t}{3a\cos^8 t\sin^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}.$$

П р и м е р 2. Вычислить y_x'' для циклоиды, заданной параметрически $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$.

Решение:

Первая производная была определена в разд. 13 $y'_x = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$. Тогда

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}.$$

Практическая часть 2
Логарифмическое дифференцирование, дифференцирование параметрически заданной и неявной функции

1. Логарифмическое дифференцирование

П р и м е р 1. Найти производную функции $y = x^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Решение:

Для нахождения y' используем логарифмическое дифференцирование, для чего предварительно прологарифмируем функцию y:

$$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Найдем производную полученной функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{1-x}.$$

Тогда

$$y' = \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}\right] \cdot x^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$, если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

Прологарифмируем функцию, т. к. на указанном интервале $\operatorname{tg} x > 0$:

$$\ln y = \sin x \ln(\operatorname{tg} x).$$

Найдем производную от полученного выражения

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \sin x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x},$$

откуда получаем выражение для производной

$$y' = y\left[\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\cos x}\right] = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left[\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\cos x}\right].$$

Пример 3. Найти производную функции $y = (\sin x)^{(2-x)}$.

Решение:

Логарифмируя, получим $\ln y = (2-x)\ln \sin x \quad (\sin x > 0)$.

Находим производные левой и правой частей равенства:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (-1) \cdot \ln \sin x + (2-x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Тогда $y' = y \cdot (\ln y)' = (\sin x)^{(2-x)}(-\ln \sin x + (2-x)\operatorname{ctg} x)$.

Пример 4. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

Решение:

$$\ln y = \frac{1}{3}(\ln(x+2) + 2\ln(x-1) - 5\ln x).$$

Дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{10 - 2x - 2x^2}{x(x+2)(x-1)},$$

откуда

$$y' = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{10-2x-2x^2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5-x-x^2}{\sqrt[3]{(x+2)^2 x^8 (x-1)}}.$$

П р и м е р 5. Найти производную функции $y = x^{\sqrt{x}}$.

Решение:

$$\ln y = \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\ln x, \quad (\ln y)' = (\sqrt{x}\ln x)', \quad \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}, \qquad y' = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\cdot y, \qquad y' = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}.$$

2. Производные высших порядков от явно заданных функций

П р и м е р 1. Найти y''' для функции $y = x^5 - 7x^3 + 2$. Вычислить $y'''(-1)$ и $y'''(0)$.

Решение:

$y' = 5x^4 - 21x^2, \quad y'' = 20x^3 - 42x, \quad y''' = 60x^2 - 42$.

$y'''(-1) = 60 - 42 = 18, \quad y'''(0) = -42$.

П р и м е р 2. Найти y'' для функции $y = \sin^2 x$.

Решение:

$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x, \quad y'' = 2\cos 2x$.

П р и м е р 3. Найти $y^{(n)}$ для функции $y = \ln x$.

Решение:

$$y' = \frac{1}{x};\; y'' = -\frac{1}{x^2};\; y''' = \frac{2}{x^3};\; y^{(4)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4} \ldots \; y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

3. Дифференцирование неявно заданных функций

П р и м е р 1. Найти y'_x для неявно заданной функции $xy = \operatorname{arctg}(x/y)$.

Решение:

Дифференцируя по x обе части равенства $xy = \operatorname{arctg}(x/y)$, получим

$$y + xy' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{y - xy'}{y^2}; \quad y + xy' = \frac{y - xy'}{x^2+y^2};$$

$$y'\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}-y,$$

откуда $$y'=\frac{y\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)}{x\left(\frac{1}{x^2+y^2}+1\right)}=\frac{y\left(1-x^2-y^2\right)}{x\left(1+x^2+y^2\right)}.$$

П р и м е р 2. Найти y'_x для неявно заданной функции $y\sin x=\cos(x-y)$.

Решение:

Дифференцируя по x обе части равенства, получим

$$y'\sin x+y\cos x=-\sin(x-y)(1-y'),$$

откуда

$$y'\sin x+y\cos x=y'\sin(x-y)-\sin(x-y),$$

или $y'(\sin x-\sin(x-y))=-y\cos x-\sin(x-y)$, и окончательно

$$y'=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}.$$

П р и м е р 3. Найти y''_x для функции $y=\operatorname{tg}(x+y)$.

Решение:

Дифференцируя уравнение по x, получаем $y'=\dfrac{1}{\cos^2(x+y)}\cdot(1+y')$.

Отсюда

$$y'\left(1-\frac{1}{\cos^2(x+y)}\right)=\frac{1}{\cos^2(x+y)},\text{ или } -y'\operatorname{tg}^2(x+y)=1+\operatorname{tg}^2(x+y).$$

С учетом условия задачи $y=\operatorname{tg}(x+y)$: $y'=-\dfrac{1+y^2}{y^2}=-\dfrac{1}{y^2}-1$.

Дифференцируя последнее уравнение по x, имеем $y''=\dfrac{2}{y^3}\cdot y'$.

Используя найденное выражение для y', получаем $y''=-\dfrac{2}{y^5}\left(1+y^2\right)$.

П р и м е р 4. Найти y'_x и y''_x для неявно заданной функции $\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Решение:

Дифференцируя по x обе части равенства, получим

$$\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}, \text{ или } \frac{y'x-y}{x^2}=\frac{y-xy'}{x^2+y^2},$$

откуда

$$\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=\frac{y}{x^2+y^2}-y'\frac{x}{x^2+y^2}.$$

После группировки имеем

$$y'\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2},$$

или

$$y'\frac{x^2+y^2+x^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{yx^2+y(x^2+y^2)}{x^2(x^2+y^2)},$$

откуда

$$y'=\frac{2x^2y+y^3}{x(2x^2+y^2)}=\frac{y(2x^2+y^2)}{x(2x^2+y^2)}=\frac{y}{x}.$$

$$y''=\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{\frac{y}{x}x-y}{x^2}=0.$$

4. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пример 1. Найти y''_x, если $\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=3t^5+5t^3+1. \end{cases}$

Решение:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{15t^4+15t^2}{3t^2+3}=\frac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)}=5t^2.$$

$$y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{10t}{3(t^2+1)}.$$

Пример 2. Найти y'''_{x^3}, если $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

Решение:

Найдем первую производную: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 2t$.

Тогда $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = 2\cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2)$, и

$$y'''_{x^3} = \left(y''_{x^2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = 4t\cdot \frac{1}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 4t(1+t^2) .$$

П р и м е р 3. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln\cos 2t, \\ y = \sin^2 2t. \end{cases}$

Решение:

$y'_t = 2\sin 2t\cdot\cos 2t\cdot 2 = 4\sin 2t\cos 2t$, $x'_t = \dfrac{-2\sin 2t}{\cos 2t}$,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{4\sin 2t\cdot\cos 2t\cdot\cos 2t}{2\sin 2t} = -\cos^2 2t .$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{2\cos 2t\cdot\sin 2t\cdot 2}{\dfrac{-2\sin 2t}{\cos 2t}} = -2\cos^2 2t .$$

П р и м е р 4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

Решение:

$x'_t = 2\sin t\cos t;$ $\qquad y'_t = \dfrac{2\cos t\sin t}{\cos^4 t} = \dfrac{2\sin t}{\cos^3 t};$

$$y'_x = \frac{2\sin t}{\cos^3 t\cdot 2\sin t\cdot\cos t} = \frac{1}{\cos^4 t} .$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\cos^{-4} t\right)'}{2\sin t\cdot\cos t} = \frac{4\cos^{-5} t\cdot\sin t}{2\sin t\cdot\cos t} = \frac{2}{\cos^6 t} .$$

П р и м е р 5. Найти y'''_{x^3}, если $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t,$$

$$y_{x^2}'' = \left(y_x'\right)_t' \cdot \frac{1}{x_t'} = \left[-\operatorname{ctg} t\right]_t' \cdot \frac{1}{x_t'} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{-\sin t} = -\sin^{-3} t,$$

$$y_{x^3}''' = \left(y_{x^2}''\right)_t' \cdot \frac{1}{x_t'} = \left[-\sin^{-3} t\right]_t' \cdot \frac{1}{x_t'} = 3\sin^{-4} t \cdot \cos t \cdot \frac{1}{-\sin t} = -\frac{3\cos t}{\sin^5 t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–6 найти y', применив метод логарифмического дифференцирования:

1. $y = \left(1 + e^{ax}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.
2. $y = (\operatorname{arcctg} 2x)^{\frac{x-2}{x}}$.
3. $y = \left(\ln^3 x + 1\right)^{\arccos\sqrt{x}}$.
4. $y = (\operatorname{tg} bx)^{1-x}$.
5. $y = (\sin 2x + 1)^{\operatorname{tg}^3 x}$.
6. $y = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}\left(x^3+1\right)}$.

В задачах 7–12 найти y' от функций, заданных неявно.

7. $\arccos 3\frac{x}{y} - \operatorname{tg}\left(x^2 + y^2\right) - x = 0$.
8. $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \sqrt{2xy} - y = 0$.
9. $\operatorname{ctg}^2 y + x^2 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 2$.
10. $\cos(y - x) + \operatorname{arctgx} y + \frac{x}{y} = 0$.
11. $\operatorname{ctg}(x + y) + \sqrt{xy = 1}$.
12. $\operatorname{ctg}(xy) + \operatorname{arcctg}(x + y) - y = 0$.

В задачах 13–18 найти $\frac{dy}{dx} = y'$ от функций, заданных параметрически.

13. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + t^2 + 1. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = \dfrac{1}{1 + t^2}. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x = e^{t+1} \sin t, \\ y = e^{t-1} \cos t. \end{cases}$
16. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = t\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$
17. $\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} t, \\ y = \dfrac{1}{1 + t^2}. \end{cases}$
18. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

В задачах 19–25 найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функций, заданных параметрически.

19. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = t\sin t. \end{cases}$

***Ответы*:**

1) $$(1+e^{ax})^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(1+e^{ax})}{2(1+x)\sqrt{x}}+\frac{ae^{ax}\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{1+e^{ax}}\right);$$

2) $$(\operatorname{arcctg}2x)^{\frac{x-2}{x}}\left(\frac{2\cdot(2-x)}{x\left(1+4x^2\right)\cdot\operatorname{arcctg}2x}+\ln\operatorname{arcctg}2x\cdot\frac{2}{x^2}\right);$$

3) $$\left(\ln^3 x+1\right)^{\arccos\sqrt{x}}\left(\frac{-\ln\left(\ln^3 x+1\right)}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}+\frac{3\ln^2 x\frac{1}{x}\arccos\sqrt{x}}{\left(\ln^3 x+1\right)}\right);$$

4) $$(\operatorname{tg}bx)^{1-x}\left(-\ln\operatorname{tg}bx+\frac{b(1-x)\sec^2 bx}{\operatorname{tg}bx}\right);$$

5) $$(\sin 2x+1)^{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\left(3\operatorname{tg}^2 x\cdot\sec^2 x\cdot\ln(\sin 2x+1)+\frac{2\cos 2x}{\sin 2x+1}\cdot\operatorname{tg}^3 x\right);$$

6) $$(\sin 7x)^{\operatorname{arctg}\left(x^3+1\right)}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(x^3+1\right)\cdot 7\operatorname{ctg}7x+\frac{3x^2\cdot\ln\sin 7x}{1+\left(x^3+1\right)^2}\right);$$

7) $$\frac{\cos^2\left(x^2+y^2\right)+2x}{\cos^2\left(x^2+y^2\right)}+\frac{3y\arccos^2\frac{x}{y}}{y^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\Bigg/\frac{3x\arccos^2\frac{x}{y}}{y^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}-\frac{2y}{\cos^2\left(x^2+y^2\right)};$$

8) $$\frac{y\left(\sqrt{2xy}-x^2-y^2\right)}{x\sqrt{2xy}+\left(x^2+y^2\right)\left(x+\sqrt{2xy}\right)};$$

9) $$\frac{2x\left(x^2+y^2\right)\sin^3 y+y\sin^3 y}{x\sin^3 y+2\cos y\left(x^2+y^2\right)};$$

10) $$\frac{-\sin(y-x)-\dfrac{y}{1+x^2y^2}-\dfrac{1}{y}}{-\sin(y-x)+\dfrac{x}{1+x^2y^2}-\dfrac{x}{y^2}};$$

11) $$\frac{2\sqrt{xy}-y\sin^2(x+y)}{x\sin^2(x+y)-2\sqrt{xy}};$$

12) $$\frac{-y\operatorname{cosec}^2 xy-\dfrac{1}{1+(x+y)^2}}{x\operatorname{cosec}^2 xy+\dfrac{1}{1+(x+y)^2}+1};$$

13) $$\frac{3t+2}{2};$$

14) $$-\frac{1}{1+t^2};$$

15) $$\frac{e^{-2}(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t};$$

16) $1-2t^2$;

17) $$\frac{2t}{1+t^2};$$

18) t;

19) $$\frac{-1}{a(1-\cos t)^2};$$

20) $$\frac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3};$$

21) $$\frac{t^2+t+1}{e^{2t}\left(1-t^2\right)\sqrt{1-t^2}};$$

22) $$\frac{\sec^3 t}{t};$$

23) $$\frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t};$$

24) $\left(1+t^2\right)\left(1+3t^2\right)$;

25) $$\frac{-2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3}.$$

Задания

Выполните задания 8–18 из прил. 1.

3. Дифференциал функции

3.1. Определение дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда приращение функции можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где α – некоторая бесконечно малая величина, стремящаяся к нулю, если $\Delta x \to 0$.

Проанализируем последнее равенство. В нем Δy – приращение функции представлено в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое при $\Delta x \to 0$ – бесконечно малая величина и является линейной относительно Δx. Второе слагаемое $\alpha \Delta x$ – произведение двух бесконечно малых, является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с первым слагаемым и поэтому при $\Delta x \to 0$ этим слагаемым можно пренебречь.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции и обозначается как $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Заметим, что дифференциал данной функции dy зависит от того, какая точка закреплена, т. е. он зависит от x и, кроме того, он является функцией приращения независимой переменной Δx.

Если мы будем искать дифференциал функции $y = x$, то ясно, что $dx = 1 \cdot \Delta x$, откуда $dx = \Delta x$, т. е. *дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением*. Следовательно, дифференциал можно записать следующим образом:

$$dy = f'(x) \cdot dx, \qquad \text{или} \qquad dy = y'_x \cdot dx .$$

Отсюда следует обозначение производной – $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ (обозначение Лейбница).

Таким образом, для функции одной переменной существование производной и дифференцируемость – эквивалентные свойства.

Благоприятный факт совпадения двух свойств заставляет задуматься о необходимости введения понятия дифференциал. Однако даже на первом курсе можно заметить, что с появлением понятия дифференциал появляется возможность обращаться с выражениями $\dfrac{dy}{dx}$ как с обыкновенными дробями. Например,

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

В таком разделе, как дифференциальная топология, без дифференциала не обойтись.

Непосредственно из свойств производной и определения дифференциала вытекают следующие свойства дифференциала:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

2) $d(uv) = (uv)' dx = u'vdx + v'udx = vdu + udv$;

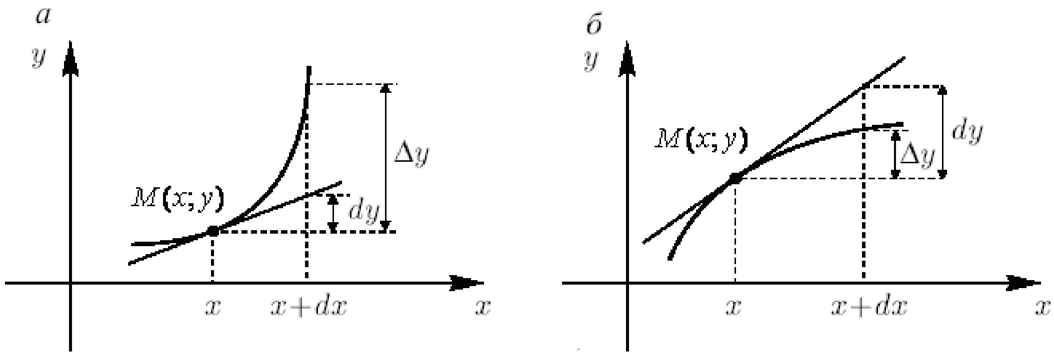
3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \left(\dfrac{u}{v}\right)' dx = \dfrac{u'vdx - v'udx}{v^2} = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Докажем, для примера, формулу из п. 2:

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv')dx = v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + udv .$$

Дифференциал функции dy в точке x, вообще говоря, не равен приращению Δy в этой точке. Это особенно хорошо видно при рассмотрении графика функции $y = f(x)$. Замена приращения функции ее дифференциалом означает замену участка графика функции на промежутке $[x, x + dx]$ участком касательной к графику функции, проведенной через точку $M(x; y)$.

Таким образом, дифференциал равен приращению ординаты касательной.



Установим механический смысл дифференциала.

Допустим, что некоторая материальная точка M перемещается прямолинейно, а путь, пройденный этой точкой за время t , изменяется по закону $s = s(t)$.

Дифференциал $ds = V \cdot dt$ определяет путь, пройденный материальной точкой, двигающейся равномерно со скоростью, равной мгновенной скорости в момент t , за промежуток времени от момента t до $(t + \Delta t)$.

3.2. Дифференциалы высших порядков. Инвариантность дифференциала функции

Введем понятие дифференциала высших порядков для функции $y = f(x)$.

Если $y = f(x)$ дифференцируема, то $dy = f'(x)dx$. Пусть x – независимая переменная, тогда dx от x не зависит и при дальнейшем дифференцировании выносится за знак производной как постоянная. Учитывая это, мы можем рассматривать dy как функцию от x; если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема, то можно найти дифференциал от dy. Он называется *дифференциалом второго порядка* первоначальной функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y:

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Предположив существование третьей производной $f'''(x)$, придем к дифференциалу третьего порядка: $d^3y = d\left(d^2y\right) = \left(f''(x)dx^2\right)'_x dx = f'''(x)dx^3$.

И вообще, предположив, что функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема, последовательно, придем к понятию дифференциала n-го порядка:

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Пример. Вычислить d^ny для функции $y = \ln(1 + x)$.

Решение:

Найдем последовательно производные данной функции:

$$y' = \frac{1}{1+x};$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3};$$

....

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Тогда $d^n y = f^{(n)}(x)\cdot dx^n = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,dx^n$.

Перейдем теперь к важному свойству дифференциала, следующего из формулы для производной сложной функции.

Ранее мы показали, что если x – независимая переменная, а $y = f(x)$ – дифференцируемая функция, то $dy = y'_x \cdot dx$.

Покажем, что если x является функцией другой независимой переменной, то дифференциал сохраняет свою форму.

Пусть $x = x(t)$ – дифференцируемая функция переменной t. Следовательно, $y = y[x(t)]$ – сложная функция переменной t, и $dy = y'_t \cdot dt = y'_x \cdot x'_t\, dt = y'_x\, dx$, т. е. $dy = y'_x dx$.

Таким образом, *форма первого дифференциала функции $y = f(x)$ не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.* Это свойство называется свойством неизменности, или *инвариантности формы* первого дифференциала.

Выясним теперь, обладают ли дифференциалы высших порядков свойством инвариантности.

Рассматривать будем дифференциал второго порядка.

Если для функции $y = f(x)$ x – независимая переменная, то $d^2y = f''(x)dx^2$.

Посмотрим, изменится ли это выражение, если считать x промежуточным аргументом.

Пусть $y = f(x)$ и, в свою очередь, $x = x(t)$, причем функции $f(x)$ и $x(t)$ дифференцируемы дважды по переменной t. Тогда

$$d^2y = d(f'(x)dx) = d\big(f'(x)\big)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx + f'(x)d^2x,$$

т. е.

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Сравнивая с формулой дифференциала второго порядка $d^2y = f''(x)dx^2$, видим, что в случае сложной функции форма второго дифференциала изменяется: появляется второе слагаемое $f'(x)d^2x$. Лишь если $x(t)$ – линейная функция $x(t) = at + b$, второе слагаемое равно нулю.

Таким образом, форма второго дифференциала свойством инвариантности обладает лишь при линейной замене независимой переменной. В общем же случае, форма второго дифференциала свойством инвариантности не обладает. Не обладает свойством инвариантности и форма дифференциала любого порядка выше первого.

3.3. Приложение теории дифференциала к приближенным вычислениям. Линеаризация функций

Близость исходной функции и ее касательной в окрестности точки касания служит источником многочисленных приближенных формул для вычисления значений функций.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x и Δx – приращение аргумента в этой точке, а Δy – соответствующее приращение функции. Тогда $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим приближенное равенство

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Заметим, что дифференциал вычислить проще, чем приращение функции, поэтому последнее равенство играет большую роль в приближенных вычислениях.

Пример 1. Вычислить с помощью дифференциала $\sqrt[3]{1{,}01}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Тогда с учетом соотношения $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ для данной функции имеем $f(x + \Delta x) \approx \sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)'_x \cdot \Delta x = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \Delta x.$

При $x = 1,\quad \Delta x = 0{,}01$ получаем

$$\sqrt[3]{1{,}01} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot 0{,}01 = 1 + \frac{0{,}01}{3} \approx 1{,}0033 .$$

По таблицам находим, что $\sqrt[3]{1{,}01} = 1{,}0032$.

Оценим погрешность приближенных вычислений. Относительная погрешность равна $\left|\dfrac{1{,}0033 - 1{,}0032}{1{,}0032}\right| = 0{,}001$ (0,1 %).

Пример 2. Вычислить с помощью дифференциала $\sin 35^\circ$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$.

Тогда с учетом соотношения $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ для данной функции имеем $f(x + \Delta x) \approx \sin x + (\sin x)'_x \cdot \Delta x = \sin x + \cos x \cdot \Delta x.$

При $x = \frac{\pi}{6}$, $\quad \Delta x = 5 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0873$ получаем

$$\sin 35^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot 0{,}0873 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}0873 \approx 0{,}5756 .$$

По таблицам находим, что $\sin 35^\circ = 0{,}5736$.

Оценим погрешность приближенных вычислений. Относительная погрешность равна $\left| \frac{0{,}5756 - 0{,}5736}{0{,}5736} \right| = 0{,}003$ (0,3 %).

В заключение заметим, что заменяя приращение Δf функции в точке x для малых приращений Δx ее дифференциалом, мы тем самым на участке $[x,\ x + \Delta x]$ заменяем функцию $y = f(x)$ линейной функцией. Поэтому такая приближенная замена называется *линеаризацией функции*.

Практическая часть 3
Дифференциал функции

1. Вычисление дифференциала функции

Пример 1. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядка функции $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$.

Решение:

Перепишем функцию y в виде $y = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right)$. Найдем y' :

$$y' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x .$$

Тогда $dy = \operatorname{arctg} x \cdot dx$, $d^2 y = (\operatorname{arctg} x)' dx^2 = \frac{dx^2}{1 + x^2}$,

$$d^3 y = \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)' dx^3 = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} dx^3 .$$

Пример 2. Внести функцию под знак дифференциала:

1) $2x dx$, 2) $x^3 dx$, 3) $\cos 4x dx$, 4) $\frac{dx}{x}$, 5) $\frac{dx}{\cos^2 3x}$, 6) $\frac{dx}{1 + 9x^2}$.

Решение:

1) $2xdx = d\left(x^2\right)$, 2) $x^3dx = d\left(\dfrac{x^4}{4}\right)$, 3) $\cos 4xdx = d\left(\dfrac{\sin 4x}{4}\right)$,

4) $\dfrac{dx}{x} = d\left(\ln x\right)$, 5) $\dfrac{dx}{\cos^2 3x} = d\left(\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{3}\right)$, 6) $\dfrac{dx}{1+9x^2} = d\left(\dfrac{\arcsin 3x}{3}\right)$.

2. Применение дифференциала для приближенных вычислений

П р и м е р 1. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{26{,}97}$.

Решение:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = y = \sqrt[3]{x}$.

Выберем точку x_0 и приращение Δx так, чтобы $\sqrt[3]{x_0}$ был легко вычисляем, а Δx было мало в сравнении с x_0.

Пусть $x_0 = 27$, $\Delta x = -0{,}03$.

Для функции имеем

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad f(27) = 3, \qquad f'(27) = \frac{1}{27}.$$

Тогда $\sqrt[3]{26{,}97} \approx \sqrt[3]{27} + \dfrac{1}{27}\cdot(-0{,}03) \approx 3 - \dfrac{0{,}03}{27} \approx 3 - 0{,}001 = 2{,}999$.

П р и м е р 2. Вычислить приближенно $2^{2{,}98}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $y = 2^x$.

Выберем точку x_0 и приращение Δx так, чтобы $y = 2^{x_0}$ был легко вычисляем, а Δx было мало в сравнении с x_0.

Пусть $x_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}02$.

Для функции имеем

$f'(x) = 2^x \ln 2$, $\quad f(3) = 8$, $\quad f'(3) = 8\ln 2$.

Тогда $2^{2,98} \approx 8 + 8\ln 2 \cdot (-0,02) \approx 7,889$.

Пример 3. Вычислить приближенно $\sin 10^\circ$.

Решение:

Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

Выберем точку x_0 и приращение Δx так, чтобы $y = \sin x_0$ был легко вычисляем, а Δx было мало в сравнении с x_0.

Пусть $x_0 = 0$, $\Delta x = 10^\circ = \dfrac{\pi}{18}$.

Для функции имеем $f'(x) = \cos x$, $\quad f(0) = 0$, $\quad f'(0) = 1$.

Тогда $\sin 10^\circ \approx 0 + 1 \cdot \dfrac{\pi}{18} \approx 0,1745$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–5 найти dy :

1. $y = \cos^3 \operatorname{arctg} x$. $\quad$ 2. $y = \sin 3x \cdot \cos\left(5x^2 + 1\right)$. $\quad$ 3. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3 + e^x}$.

4. $y = \sqrt{\ln x \cdot e^{3x}}$. $\quad$ 5. $y = \sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}}$.

В задачах 6–7 найти $d^n y$:

6. $y = e^{2x+7}$. $\quad$ 7. $y = x^n$.

8. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен 3,02 м.

9. Вычислить приближенное значение arcsin 0,51.

10. Вычислить приближенное значение arctg 0,98.

11. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{1,02}$.

12. Вычислить приближенное значение $\sqrt[4]{15{,}968}$.

Ответы:

1) $-3\cos^2 \operatorname{arctg} x \cdot \sin \operatorname{arctg} x \cdot \dfrac{dx}{1+x^2}$;

2) $\left(3\cos 3x \cdot \cos\left(5x^2+1\right) - 10x\sin\left(5x^2+1\right)\sin 3x\right)dx$;

3) $\dfrac{\dfrac{x^3+e^x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x\left(3x^2+e^x\right)}{\left(x^3+e^x\right)^2}dx$;

4) $\dfrac{e^{3x}\left(\dfrac{1}{x}+3\ln x\right)dx}{2\sqrt{\ln x \cdot e^{3x}}}$; 5) $\dfrac{\sec^2 x \cdot \arcsin x - \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}\right)^2}(\arcsin x)^2}dx$;

6) $2^n e^{2x+7} dx^n$; 7) $n!dx^n$;

8) 28,66 м^2 ; 9) 0,513; 10) 0,775; 11) 1,007; 12) 1,999.

Задания

Выполните задания 19–23 из прил. 1.

Глава 2. Основные теоремы дифференциального исчисления

4. Теоремы о средних значениях

Теоремы о среднем – одно из свойств дифференцируемых функций. Одним из важнейших классов (множеств) функций, изучаемых в курсе математического анализа и имеющих первостепенное значение при решении задач практического характера, является класс непрерывных функций. Класс дифференцируемых функций является подмножеством множества непрерывных функций. Дифференцируемые функции представляют особый интерес, т. к. большинство задач техники и естествознания приводят к исследованию функций, имеющих производную. Такие функции обладают некоторыми общими свойствами, среди которых важную роль играет ряд теорем, объединенных общим названием *теоремы о среднем*. В каждой из этих теорем утверждается существование на отрезке $[a;b]$ такой точки, в которой исследуемая функция $y=f(x)$ обладает тем или иным свойством.

4.1. Теорема Ферма

Теорема Ферма. **Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке E, и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в этой точке существует конечная производная $f'(c)$, то $f'(c)=0$.**

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ принимает в точке c наибольшее значение. Тогда $\forall x \in E \quad f(x) \le f(c)$.

Положим $x=c+\Delta x$, тогда получим $f(c+\Delta x) \le f(c)$.

По условию теоремы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c)$.

Если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0$, и

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'_+(c) \le 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0$, и

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'_-(c) \ge 0.$$

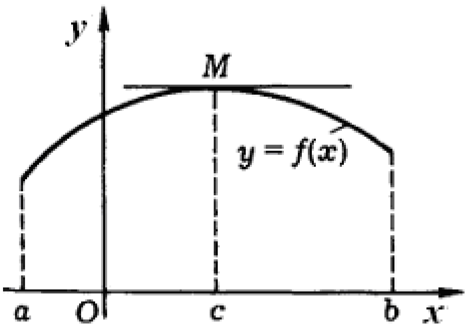
Тогда в силу теоремы о связи конечного предела в точке с односторонними пределами имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = 0,$$

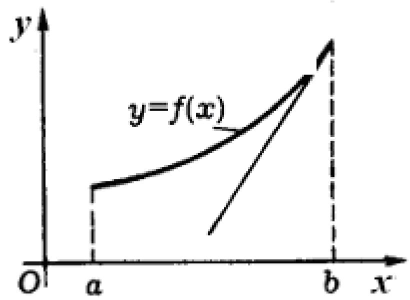
т. е. $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в следующем.

Если выполнены условия теоремы Ферма, то в некоторой точке $x = c$ $f'(c) = 0$, а это означает, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(c, f(c))$ параллельна оси Ox.



Отметим, что требование условия теоремы о том, что точка c должна быть обязательно внутренней точкой промежутка E, необходимо. Во-первых, это позволило рассматривать точки x, лежащие как справа, так и слева от точки c. Во-вторых, без этого предположения теорема вообще неверна, что демонстрирует следующий рисунок, на котором функция $f(x)$ достигает максимального значения в граничной точке, а производная в ней не равна нулю.



4.2. Теорема Ролля

Т е о р е м а Р о л л я. **Если функция** $y = f(x)$ **:**

1) непрерывна на замкнутом промежутке [*a*; *b*],

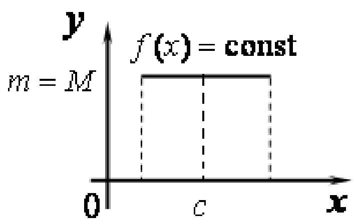
2) дифференцируема в каждой точке интервала]*a*; *b*[,

3) на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$,

то тогда между точками *a* и *b* найдется хотя бы одна точка *c* ($a < c < b$) такая, что $f'(c) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$, следовательно, по второй теореме Вейерштрассе на этом промежутке она принимает наименьшее значение m и наибольшее значение M.

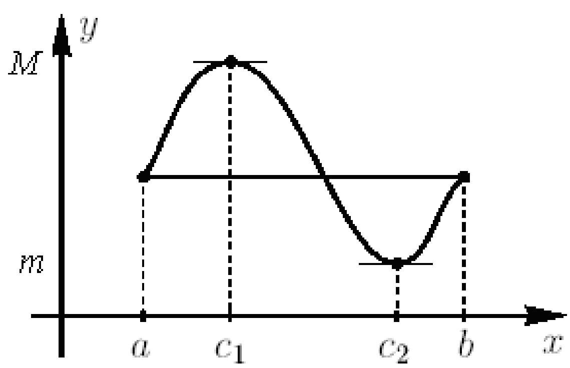
Если окажется, что $m = M$, то $f(x)$ постоянна на промежутке $[a; b]$, т. е. $f(x) = \text{const}$, следовательно, $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in [a; b]$, в частности, и в некоторой точке $c \in]a; b[$.



Если $m < M$, то существует точки c_1 и c_2 такие, что $f(c_1) = M$, $f(c_2) = m$, причем, если бы оказалось, что точки c_1 и c_2 находятся на концах отрезка $[a; b]$, то мы пришли бы к первому случаю, поэтому хотя бы одна из точек c_1 или c_2 лежит внутри промежутка $[a; b]$.

Пусть для определенности $a < c_1 < b$ и $f(c_1) = M$. Точка c_1 удовлетворяет условию теоремы Ферма, и на ее основании $f'(c_1) = 0$.

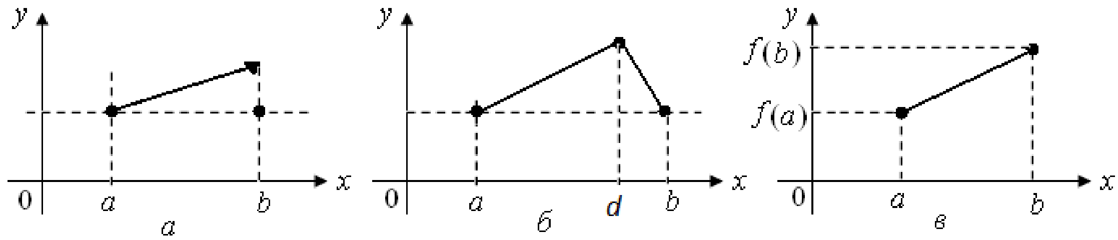
Для точки c_2, в которой функция достигает наименьшего значения, доказательство аналогично.



Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в следующем.

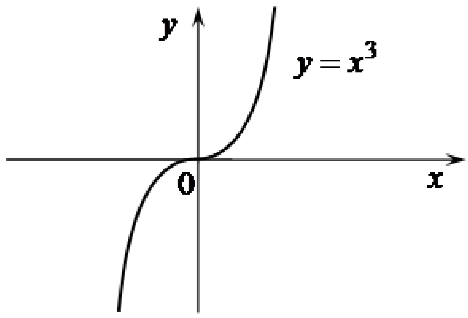
Если выполнены условия теоремы Ролля, то в некоторой точке $x = c$ $f'(c) = 0$, а это означает, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = c$ параллельна оси Ox.

***Замечания*: 1.** Все условия теоремы Ролля существенны, т. е., если не выполняется хотя бы одно из них, то вывод теоремы может быть нарушен. На рисунке приведены эскизы графиков функций, для каждой из которых нарушено одно из условий теоремы Ролля.



Для первой функции не выполнено условие непрерывности на $[a,b]$, для второй – условие дифференцируемости на (a,b), производная $f'(d)$ не существует, для третьей функции $f(a) \neq f(b)$. Очевидно, что в каждом из случаев не существует точки $\xi \in (a,b)$ такой, что $f'(c) = 0$.

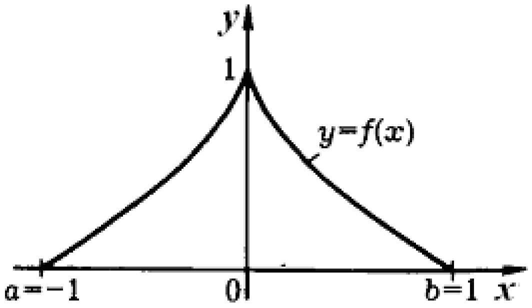
В качестве примера приведем функцию $f(x) = x^3$. Она определена и непрерывна на отрезке [–1; 1], дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, однако для нее не выполняется третье условие теоремы Ролля: $f(-1) \neq f(1)$. Тем не менее существует точка $c = 0$ такая, что $f'(0) = 0$.



2. Условия теоремы Ролля являются достаточными, но не необходимыми.

Например, функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на промежутке $[-1; +1]$, ее значения на концах равны между собой $f(-1) = f(1) = 0$, а ее производная $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ конечна во всех точках интервала (–1,1), кроме точки $x_0 = 0$.

Очевидно, что ни в одной точке графика функции на промежутке [–1; 1] касательная к графику не параллельна оси Ox .



4.3. Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа. **Пусть функция $y = f(x)$:**

1) непрерывна на замкнутом промежутке [a; b],

2) дифференцируема на интервале]a; b[.

Тогда внутри промежутка [a; b] найдется хотя бы одна точка c ($a < c < b$) такая, что будет иметь место равенство (формула Лагранжа):

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\Phi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Функция $\Phi(x)$ непрерывна на промежутке [a; b] как сложная функция непрерывных функций, кроме того, она дифференцируема на интервале]a; b[, причем $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. Следовательно, функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, значит, найдется точка c, лежащая внутри промежутка [a; b] такая, что $\Phi'(c) = 0$.

Найдем $\Phi'(x)$. Ясно, что $\Phi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Итак, в интервале]a; b[существует точка $x = c$, в которой производная $\Phi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, откуда и следует формула Лагранжа.

Формулу Лагранжа можно записать несколько иначе, если положить $a = x$, $b = x + \Delta x$ и обозначить $c = x + \theta \cdot \Delta x$, где θ – некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \theta < 1$.

Тогда формула Лагранжа будет иметь вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1),$$

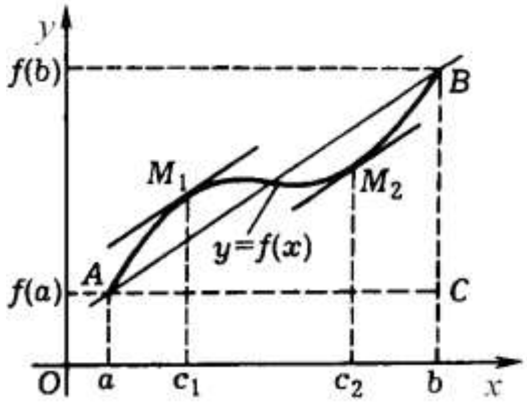
или

$$\Delta y = f'(x + \theta \cdot \Delta x)\Delta x$$ – формула *конечных приращений*.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в следующем.

Пусть выполнены условия теоремы Лагранжа, тогда справедлива формула Лагранжа.

Пусть точки A и B, лежащие на графике функции, имеют координаты A $(a;\ f(a))$, B $(b;\ f(b))$, тогда очевидно, что величина дроби $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равна тангенсу угла наклона хорды AB к оси Ox, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Таким образом, отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, с одной стороны, является угловым коэффициентом хорды AB, а с другой – $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$.

Значит, на непрерывной дуге AB, имеющей в каждой точке невертикальную касательную, всегда найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

В этом и заключается геометрический смысл теоремы Лагранжа.

4.4. Теорема Коши

Т е о р е м а К о ш и . **Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:**

1) непрерывны на отрезке $[a;\ b]$,

2) дифференцируемы в каждой точке интервала $]a;\ b[$,

3) производная $g'(x) \neq 0$ ни в одной точке этого интервала.

Тогда между точками a и b существует такая точка c ($a < c < b$), что имеет место равенство на промежутке $[a;\ b]$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что $g(b) \neq g(a)$, т. к. иначе, в силу теоремы Ролля, нашлась бы точка c такая, что было бы $g'(c) = 0$.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Ясно, что функция $\Phi(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a; b]$ как сложная функция непрерывных функций. Кроме того, она дифференцируема на интервале $]a; b[$. Заметим, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, т. е. $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Значит, найдется точка c такая, в которой $\Phi'(c) = 0$, т. е.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

откуда и следует теорема Коши.

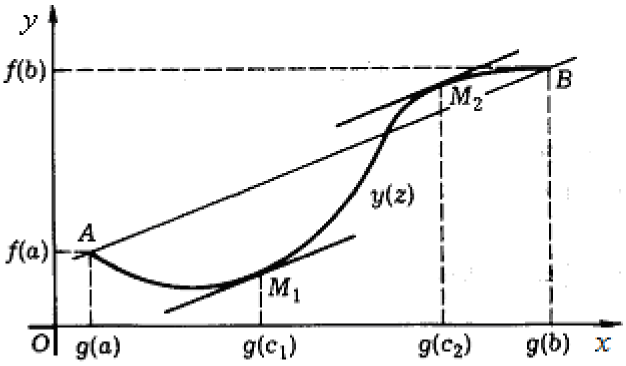
Геометрический смысл теоремы Коши совпадает с геометрическим смыслом теоремы Лагранжа, если кривую AB задать параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= g(t), \\ y &= f(t), \end{aligned}\right\}$$

причем функции $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши.

Пусть параметр $t \in [a; b]$, тогда $A(g(a), f(a))$, $B(g(b), f(b))$.

Угловой коэффициент касательной к графику кривой AB в некоторой точке $M(g(c), f(c))$ равен $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, в силу теоремы Коши он совпадает с угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки A и B.



Итак, если выполнены условия теоремы Коши, то на графике кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x = g(t), \\ y = f(t), \end{array}\right\}$$
$$t \in [a;\, b],$$

найдется хотя бы одна точка M такая, что касательная к графику этой кривой параллельна хорде, проведенной через точки A и B.

5. Правило Лопиталя. Раскрытия неопределенностей

Применим доказанные выше теоремы для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Правило раскрытия этих неопределенностей связывают с именами швейцарского математика И. Бернулли (1667–1748) и французского математика Г. Лопиталя (1661–1704).

Т е о р е м а. **Пусть:**

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a,

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,

3) $g'(x) \neq 0$ во всех точках окрестности точки a,

4) существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Тогда существует и предел отношения самих функций, и при этом

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

(a – либо конечное число, либо $a = -\infty$, либо $a = +\infty$, либо $a = \infty$).

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда a – конечное число.

По условию теоремы функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, следовательно, и непрерывны в точке a.

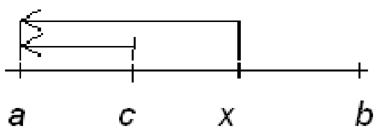
По определению непрерывности это означает, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0,\ \lim_{x \to a} g(x) = g(a) = 0 .$$

Пусть x – точка, принадлежащая окрестности точки a, тогда для нее выполнены условия теоремы Коши, и имеет место формула

$$\frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где c лежит между a и x.



Если $x \to a$, то и $c \to a$, тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} \equiv \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L.$

Замечание. Теорема остается в силе и в том случае, когда в точке $x = a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в бесконечность.

Принимая во внимание доказанную теорему, сформулируем следующее правило.

Правило Лопиталя. Для раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ надо заменить предел отношения двух функций пределом отношения их производных. Если окажется, что отношение производных имеет конечный предел, то к этому же пределу стремится и отношение данных функций.

Для раскрытия других неопределенностей $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^{0} и т. п. эти неопределенности следует предварительно преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, для чего их предварительно иногда приходится прологарифмировать.

Если неопределенность не раскрылась после применения правила Лопиталя, это правило можно применить еще раз, но уже к отношению производных (при условии, что отношение производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ порождает неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$).

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\mathrm{tg}\,3x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{1}=3$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\log_5 x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\frac{1}{x\ln 5}}{1}=0$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(x+1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}=\frac{1}{2};$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}=\left(1^{\infty}\right)$.

Обозначим $A=(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}$, тогда $\ln A=\frac{1}{\sin x}\ln(1+3x)$.

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{\cos x}=3$. Но $\lim\limits_{x\to 0}\ln A=\ln\lim\limits_{x\to 0}A=3$, откуда $\lim\limits_{x\to 0}A=e^3$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}=e^3$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$.

Практическая часть 4
Раскрытие неопределенностей с использованием правила Лопиталя

1. Неопределенность типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Правило Лопиталя: предел отношения функций, стремящихся одновременно к бесконечности (являющихся одновременно бесконечно большими), равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}}{\dfrac{-1}{1-x}}=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sin \pi x}=-\infty .$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0 .$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{x^4+3x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^3+6x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{12x^2+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{24x}=0.$$

2. Неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Правило Лопиталя: предел отношения функций, стремящихся одновременно к нулю (являющихся одновременно бесконечно малыми), равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}e^{2x}\sqrt{1-9x^2}=\frac{2}{3}.$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x}{3x^2-8x}=\frac{3}{5}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin x+\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-x\sin x}{\cos x}=3.$$

3. Неопределенность типа $[0\cdot\infty]$

Если при вычислении получается неопределенность типа $[0\cdot\infty]$, то можно использовать правило Лопиталя, преобразовав предварительно выражение следующим образом:

$$[0\cdot\infty]\xrightarrow{\text{преобразуется}}\left[\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right],\quad \text{или же}\quad [0\cdot\infty]=\left[\frac{\infty}{\frac{1}{0}}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

1. $$\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\operatorname{tg}\pi(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{\pi}{\cos^2\pi(x-1)}}=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos^2\pi(x-1)=\frac{1}{\pi}.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)\frac{1}{x^2}(-x^2)}=2\pi.$$

4. Неопределенность типа $[\infty-\infty]$

Если при вычислении получается неопределенность типа $[\infty-\infty]$, то следует преобразовать разность функций $f(x)-g(x)$ к виду $f(x)\left(1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$, затем раскрыть неопределенность $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, то получается неопределенность типа $(\infty\cdot 0)$, которая раскрывается по правилу 3.

При раскрытии неопределенности типа $[\infty-\infty]$ можно также воспользоваться приведением разности к общему знаменателю с дальнейшим получением неопределенности типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}(1-\sin x)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)=\frac{0}{1}=0.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(e^x-1)}=$$
$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+e^x+e^x}=\frac{1}{2}.$$

3. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}(x-1)+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-\dfrac{1}{x}+\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

5. Неопределенность типа $[1^\infty]$, $[0^0]$ и $[\infty^0]$

Если при вычислении получается неопределенность одного из следующих типов $[1^\infty]$, $[0^0]$ и $[\infty^0]$, то можно использовать правило Лопиталя, преобразовав предварительно выражение следующим образом:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln[f(x)]},$$

где $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ вычисляется по правилам, описанным выше.

1. $\lim\limits_{x\to +0} x^x = \left[0^0\right] = A;$

$$\ln A = \ln \lim_{x\to +0} x^x = \lim_{x\to +0} \ln x^x = \lim_{x\to +0} x\ln x = [0\cdot\infty] = = \lim_{x\to +0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +0}(-x) = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to +0} x^x = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = A \Rightarrow \ln A = \frac{1}{x}\ln(x+2^x) = \frac{\ln(x+2^x)}{x};$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln A = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2} = \ln 2.$$

$\ln A = \ln 2 \Rightarrow A = 2$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}} = 2$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \left[0^0\right] = A \Rightarrow \ln A = \frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x = \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)};$

$$\lim_{x\to 0}\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x} = 1.$$

$\ln A = 1 \Rightarrow A = e$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x = \left[1^\infty\right] = A \Rightarrow \ln A = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

$$\lim_{x\to\infty}\ln A = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = [0*\infty] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+\frac{1}{x}} = 0.$$

$\ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x = 1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}} = \left[1^\infty\right] = A \Rightarrow \ln A = \dfrac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)$,

$$\lim_{x\to 0}\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x} = 2.$$

$\ln A = 2 \Rightarrow A = e^2$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

***Замечания*: 1.** Подчеркнем, что правило Лопиталя предполагает существование предела отношения производных, поэтому бессмысленно пытаться применить это правило к раскрытию, например, такой неопределенности:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$$

и предела не существует.

В то же время эта неопределенность легко раскрывается элементарными методами:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)} = 1.$$

2. Правилом Лопиталя нельзя пользоваться, если предел не содержит неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Например, очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+e^{-x}}{1+2e^{-x}}=2$, а после преобразования по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+e^{-x}}{1+2e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{-2e^{-x}}=\frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{5x}}{\sin 3x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(x-2)}{\operatorname{tg}\pi x}$.
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\frac{\pi}{4}-x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{5x}}{\sin 4x}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$, где $n\in N$.
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\operatorname{ctg}3x+1}$.
7. $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{6x}\right)\cdot\operatorname{ctg}3x$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\cdot e^{-3x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$.
11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^3\right)$.
12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-e^{2x}\right)$.
13. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x^2-7x+12}\right)$.
14. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-x-6}\right)$.
15. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\operatorname{ctg}6x}$.
17. $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$.
18. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.
19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$.
20. $\lim\limits_{x\to\pi-0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

Ответы:

1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{1}{\pi}$; 3) 2; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{6}$; 7) 0; 8) -2; 9) 0; 10) 0; 11) $+\infty$; 12) $-\infty$; 13) 1; 14) $\frac{1}{5}$; 15) e^{-1}; 16) $\sqrt{e}$; 17) 1; 18) e^3; 19) 3; 20) 1.

Задания

Выполните задания 24–25 из прил.1.

6. Формула Тейлора

Рассмотрим одну из главных формул математического анализа, имеющую приложения как в самом анализе, так и в смежных дисциплинах, – формулу Тейлора. Она имеет много теоретических приложений и является основой приближенных вычислений.

6.1. Формула Тейлора для многочленов

Теорема. **Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ все производные до n-й производной включительно, то существует такой многочлен**

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n,$$

что $f(a) = P_n(a)$, $f'(a) = P_n'(a)$, $f''(a) = P_n''(a), \ldots,$ $f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$.

Доказательство. Докажем существование такого многочлена путем нахождения его неизвестных коэффициентов, используя известные значения функции, а также ее производных в точке $x = a$, т. е. $f(a),\ f'(a),\ f''(a), \ldots$

Так как $f(a) = P_n(a)$, а

$$P_n(a) = A_0 + A_1(a-a) + A_2(a-a)^2 + \ldots + A_n(a-a)^n = A_0,$$

то очевидно, что

$$A_0 = f(a).$$

Продифференцируем искомый многочлен:

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \ldots + nA_n(x-a)^{n-1}.$$

Так как $f'(a) = P_n'(a)$, а

$$P_n'(a) = A_1 + 2A_2(a-a) + 3A_3(a-a)^2 + \ldots + nA_n(a-a)^{n-1},$$

то очевидно, что

$$A_1 = f'(a).$$

Снова дифференцируя искомый многочлен:

$$P_n'' = 2A_2 + 6A_3(x-a) + \ldots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}.$$

Так как $f''(a) = P_n''(a)$, а

$$P_n''(a) = 2A_2 + 6A_3(a-a) + \ldots + n(n-1)A_n(a-a)^{n-2},$$

то $2A_2 = f''(a)$, откуда

$$A_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}.$$

Продолжая и дальше приведенную процедуру, получим для A_n следующее выражение:

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов A_i, получим следующее выражение для искомого многочлена:

$$P_n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Разложить многочлен $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ по степеням $(x+1)$.

Решение:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, $a = -1$, $f(-1) = -9$.

Находим коэффициенты формулы Тейлора:

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$, откуда $f'(-1) = 17$;

$f''(x) = 12x - 6$, откуда $f''(-1) = -18$;

$f'''(x) = 12$, откуда $f'''(-1) = 12$;

$f^{IV}(x) = 0$, откуда $f'''(-1) = 0$.

Тогда $f(x) = -9 + \frac{17}{1!}(x+1) - \frac{18}{2!}(x+1)^2 + \frac{12}{3!}(x+1)^3$ или

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = -9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3.$$

Следствие. Полученный многочлен обладает замечательным свойством: в достаточно малой окрестности точки $x = a$ он дает значения, близкие к значениям функции $f(x)$ в этой окрестности, т. е. выполняется приближенное равенство

$$P_n(x) \approx f(x).$$

Последнее равенство тем точнее, чем выше степень многочлена и чем меньше окрестность точки a.

Обозначим разность между значением функции $f(x)$ и многочленом $P_n(x)$ как $R_n(x)$:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x).$$

Отсюда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, и подставляя сюда значения коэффициентов A_i, получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Полученную формулу называется *формулой Тейлора*, которая позволяет представить данную функцию $f(x)$ в виде суммы степенных функций. При этом $R_n(x)$ называется остаточным членом.

Оценить остаточный член $R_n(x)$ можно различными способами. Мы рассмотрим две наиболее часто применяемые формы представления этой функции:

1. Остаточный член в форме Пеано.

Остаточный член $R_n(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$ высшего порядка, чем последний член многочлена, т. е. $R_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, и

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + o\left((x-a)^n\right).$$

2. Остаточный член в форме Лагранжа.

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, где точка c расположена между x и a.

Так как точка $c \in (a, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0 < \theta < 1$, что $c = a + \theta(x - a)$.

Тогда можно записать

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Формула Тейлора в этом случае имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Частный случай формулы Тейлора в случае $a = 0$ принято называть *формулой Маклорена*.

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа такова:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1};\ 0 < \theta < 1.$$

Следует отметить, что при разложении функции в ряд предпочтительнее применение формулы Маклорена, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т. к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой-либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

Однако, выбор числа *a* очень важен для практического использования. Дело в том, что при вычислении значения функции в точке, расположенной относительно близко к точке *a*, значение, полученное по формуле Тейлора, даже при ограничении тремя – четырьмя первыми слагаемыми, совпадает с точным значением функции практически абсолютно. При удалении же рассматриваемой точки от точки *a* для получения точного значения надо брать все большее количество слагаемых формулы Тейлора, что неудобно.

6.2. Представление по формуле Маклорена элементарных функций

1. $f(x) = e^x$.

В этом случае $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, поэтому

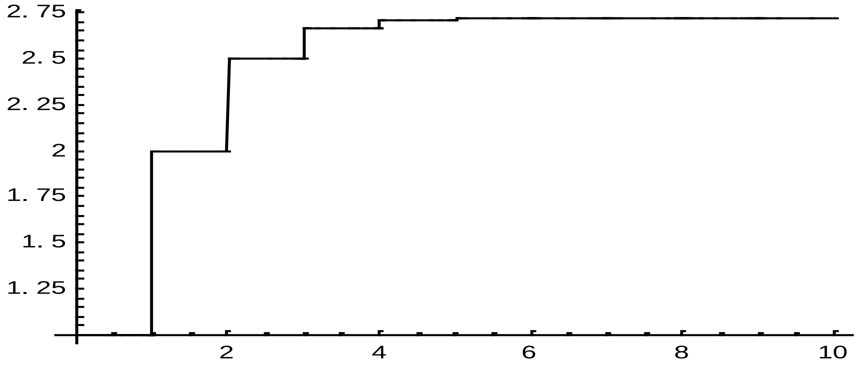
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < \theta < 1.$$

Пример. Найдем значение числа *e*.

Решение.

Положим в полученной выше формуле $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}.$$



Для 2 членов разложения: e = 2,50.
Для 3 членов разложения: e = 2,6666666666666666.
Для 8 членов разложения: e = 2,71827876984127003.
Для 10 членов разложения: e = 2,71828180114638451.
Для 100 членов разложения: e = 2,71828182845904553.
2. $f(x) = \sin x$.
В этом случае

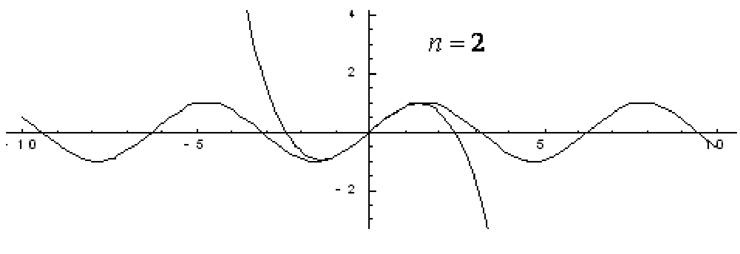
$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(0) = 1, \\ f''(0) = 0, \\ f'''(0) = -1, \\ f^{(n)}(0) = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right), \\ f^{(n+1)}(\theta) = \sin\left(\theta x + (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

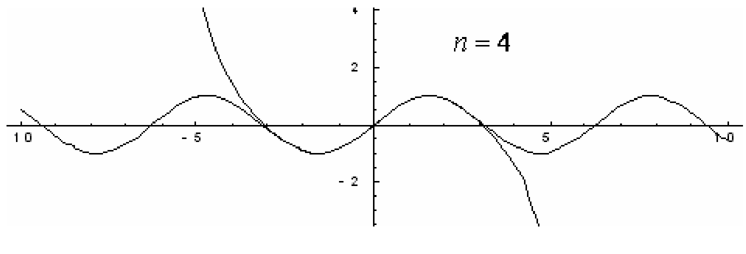
поэтому

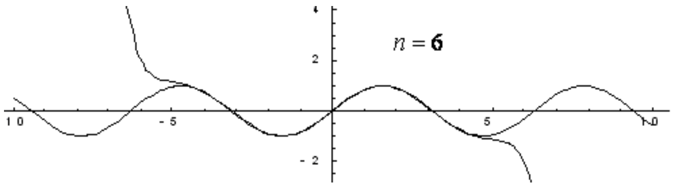
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

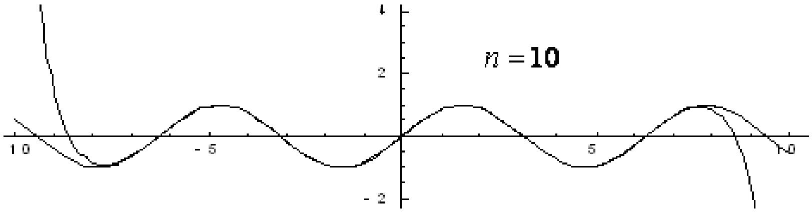
где $R_{2n}(x) = \dfrac{\sin(\theta x + (2n+1)\pi/2)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = (-1)^n\cos(\theta x)\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

На приведенных ниже графиках представлено сравнение точного значения функции $f(x) = \sin x$ и значения разложения по формуле Тейлора при различном количестве членов разложения.









3. $f(x) = \cos x$.

Так же, как и для $\sin x$, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

где $R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cos(\theta x) \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

4. $f(x) = \ln(1+x)$.

$f(0) = 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x},\ f'(0) = 1;$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2},\ f''(0) = -1;$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3},\ f'''(0) = 2;$

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{2 \cdot 3}{(1+x)^4},\ f^{(4)}(0) = -2 \cdot 3 = -3!$

Закономерность понятна: $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{3!\,x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\,x^n}{n!} + R_n(x) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$.

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

$f(0)=1,$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f'(0)=\alpha,$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\ \ldots,$

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$

следовательно,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^{3}+\ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+R_{n}(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}$, $0<\theta<1$.

Если в полученной формуле принять $\alpha = n$, где n – натуральное число, то

$$(1+x)^{n}=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{2}+\ldots+x^{n}.$$

Получилась формула, известная как *бином Ньютона*.

6.3. Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

В недавнем прошлом основным приложением формулы Тейлора было использование ее в приближенных вычислениях значений функций. С развитием вычислительной техники эти вопросы, по-видимому, потеряли свою актуальность. Тем не менее формула Тейлора широко используется как в теоретических исследованиях, так и при решении задач.

Если известно значение функции и ее производных в точке a, то для вычисления приближенных значений функции в некоторой δ-окрестности точки a удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Значение $f(x)$ в этой δ-окрестности вычисляется по формуле

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n},$$

а погрешность приближения определяется формулой

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|,\ 0<\theta<1.$$

П р и м е р 1. Вычислить e^x с точностью до 0,001.

Решение:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

тогда

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} + \ldots + \frac{(0,1)^n}{n!}.$$

Погрешность вычислений не должна превышать 0,001, следовательно, $R_{n+1} = \dfrac{e^{0,1\theta}(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,001$. С учетом $e^{0,1\theta} < 2$ имеем

$$R_{n+1} = \frac{2}{10^{n+1}(n+1)!} < 0,001 .$$

Если $n = 1$, то $R_{n+1} = 0,01 > 0,001$.

Если $n = 2$, то $R_{n+1} = 0,003 > 0,001$.

Если $n = 3$, то $R_{n+1} = 0,000008 < 0,001$.

Таким образом,

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} = 1,055 .$$

П р и м е р 2. Вычислить $\sin 1$ с погрешностью, не превышающей 0,00001.

Решение:

Остаточный член в форме Лагранжа для функции $y = \sin x$ имеет вид $R_{2n}(x) = (-1)^n \cos(\theta x) \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, следовательно,

$$\left|R_{2n}\right| \le \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Подбором находим, что $\dfrac{1}{7!} = \dfrac{1}{5040} > 10^{-5}$, $\dfrac{1}{9!} = \dfrac{1}{5040 \cdot 8 \cdot 9} < 10^{-5}$, следовательно, мы должны взять степени x вплоть до седьмой:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx$$

$$\approx 1 - 0,166667 + 0,008333 - 0,000198 \approx 0,84147 .$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt[3]{29}$ с погрешностью, не превышающей 0,001.

Решение:

$$\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Используем биноминальное разложение:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^{3}+\ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+R_{n}(x),$$

где остаточный член имеет вид

$$R_{n}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!},\ 0<\theta<1.$$

Таким образом, $\alpha=\frac{1}{3};\quad x=\frac{2}{27}$.

Тогда

$$\sqrt[3]{29}=3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^{3}}-\frac{2^{5}\cdot 5}{81^{4}}+\ldots\right).$$

Оценим погрешности:

$$3\left|R_{1}\right|=\frac{2}{81}\approx 3\cdot 0{,}0246>0{,}001,$$

$$3\left|R_{2}\right|=3\cdot\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}\approx 3\cdot 0{,}0006>0{,}001,$$

$$3\left|R_{3}\right|=3\cdot\frac{2\cdot 2\cdot 5}{81^{3}}\approx 3\cdot 0{,}00004<0{,}001.$$

Следовательно, для вычисления с заданной точностью достаточно взять три члена разложения:

$$\sqrt[3]{29}\approx 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}\right)=3(1+0{,}024-0{,}0006)=3{,}072.$$

Пример 4. Вычислить $\sin 28^{\circ}13'15''$, ограничившись первыми тремя членами в разложении.

Решение:

Для того чтобы представить заданный угол в радианах, воспользуемся следующими соотношениями:

$$1^{0}=\frac{\pi}{180};\quad 28^{0}=\frac{28\pi}{180};\quad 1'=\frac{\pi}{60\cdot 180};\quad 13'=\frac{13\pi}{60\cdot 180};$$

$$1'' = \frac{\pi}{60\cdot 60\cdot 180}; \qquad 15'' = \frac{15\pi}{60\cdot 60\cdot 180};$$

$$\sin 28^{\circ}13'15'' = \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60\cdot 180} + \frac{15\pi}{60\cdot 60\cdot 180} = \frac{\pi}{180}\left(\frac{28\cdot 60\cdot 60 + 60\cdot 13 + 15}{60\cdot 60}\right) =$$

$$= 0,492544 \text{ рад}.$$

Если при разложении по формуле Тейлора ограничиться тремя первыми членами, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0,492544 - 0,019915 + 0,000242 = 0,472871 .$$

Сравнивая полученный результат с точным значением синуса этого угла $\sin 28^{\circ}13'15'' =$ 0,472869017612759812, видим, что даже при ограничении всего тремя членами разложения, точность составила 0,000002, что более чем достаточно для большинства практических технических задач.

6.4. Применение формулы Тейлора для нахождения пределов

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5}$.

Решение:

Так как в знаменателе стоит x^5, то при представлении функций, стоящих в числителе, по формуле Маклорена, мы должны брать многочлены не ниже пятой степени:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5);$$

$$\sqrt[6]{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{6}} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(-x^2\right)^2 + o(x^5) =$$

(следующий член разложения имеет шестую степень)

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(-x^2\right)^2 + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{5x^4}{72} + o(x^5).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{72} + o(x^5)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{7(x^5 + o(x^5))}{90x^5} = \frac{7}{90}.$$

П р и м е р 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$.

Решение:

Здесь мы в выкладках обязаны удерживать члены до четвертой степени:

$$\cos(\sin x)=1-\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^4 x}{4!}+o(\sin^4 x)=$$

$$=1-\frac{(x-x^3/3!+o(x^4))^2}{2!}+\frac{(x-x^3/3!+o(x^4))^4}{4!}+o(x^4)=$$

$$=1-\frac{x^2-2x\cdot x^3/3!+o(x^4)}{2}+\frac{x^4+o(x^4)}{4!}+o(x^4)=$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+x^4\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4).$$

$$\sqrt{1-x^2+x^4}=(1-x^2+x^4)^{1/2}=1+\frac{1}{2}(-x^2+x^4)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2+x^4)^2+$$

$$+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+o(x^4).$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[\left(\frac{5}{24}-\frac{3}{8}\right)x^4+o(x^4)\right]=-\frac{1}{6}.$$

Глава 3. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

Содержание данной главы показывает, что производная функции $f(x)$ является мощным инструментом для исследования характера и особенностей ее поведения (изменения) в рассматриваемой области значений аргумента x. Другими словами, умение вычислять производную $f'(x)$ функции $f(x)$ и информация о производной дает важные сведения о самой функции $f(x)$.

Именно с помощью производной функции можно найти промежутки возрастания и убывания, локальные экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функции, точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты графика и построить график этой функции.

Замечательно, что исследование производной избавляет от необходимости вычислять значения функции $f(x)$ во *всей* области в задачах определения характерных точек поведения функции – точек максимума и минимума, точек перегиба и ее наибольшего и наименьшего значений (т. е. качественного поведения функции): для решения этих задач достаточно вычислить производную, найти ее *отдельные* характерные точки (критические, стационарные) и провести их *локальный* анализ (в окрестности этих точек).

7. Исследование функций с помощью первой производной

7.1. Признаки постоянства и монотонности функции

Часто при исследовании функции возникает вопрос: при каких условиях функция сохраняет в данной области постоянное значение или изменяется в ней монотонно.

Теорема 1. **Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Для того чтобы эта функция была постоянной на интервале (a,b), необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x)=0$ для $\forall x \in (a,b)$.**

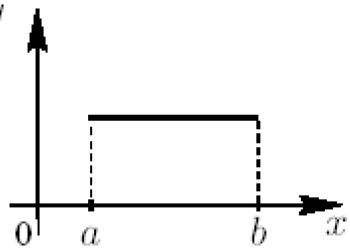
Доказательство.

Необходимость.

Если $f(x)=\text{const}$ на (a,b), то $f'(x)=0$ для $\forall x \in (a,b)$.

Достаточность.

Пусть $f'(x)=0$ для $\forall x \in (a,b)$. Возьмем любые две точки $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$, $x_2 \neq x_1$. По формуле конечных приращений Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0$, $x_1<c<x_2$ и т. к. $f'(c)=0$, то значения функции в двух любых точках интервала совпадают, следовательно, $f(x)=\text{const}$.



Теорема 2. **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Для того чтобы эта функция была монотонно возрастающей на интервале (a,b), необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \geq 0$ для $\forall x \in (a,b)$. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была монотонно убывающей на интервале (a,b), необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \leq 0$ для $\forall x \in (a,b)$.**

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $y = f(x)$ не убывает на промежутке $[a;b]$, и пусть $x \in (a,b)$. Возьмем приращение $\Delta x > 0$ столь малое, чтобы было $(x + \Delta x) \in (a,b)$.

Ясно, что для $\Delta x > 0$:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'_+(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Совершенно аналогично для $\Delta x < 0$:

$$f(x + \Delta x) \leq f(x) \Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'_-(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

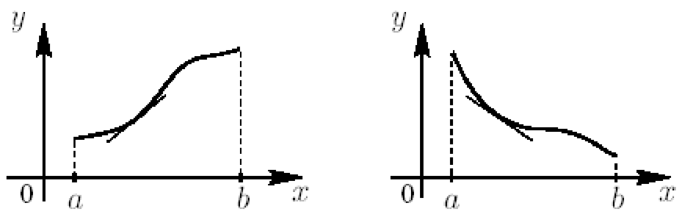
Таким образом, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Достаточность.

Пусть для любого x из интервала (a,b) выполняется условие $f'(x) \geq 0$. Возьмем любые две точки x_1 и x_2 из этого интервала:

$$x_1 \in (a,b),\ x_2 \in (a,b),\ x_2 \geq x_1.$$

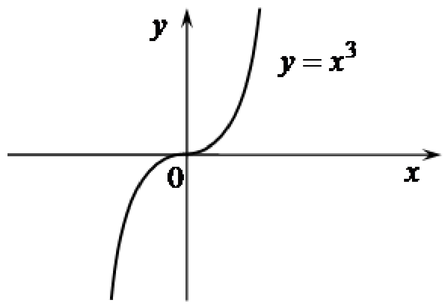
По теореме Лагранжа имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, а т. к. $x_1 - x_2 > 0$, $f'(c) \geq 0$, то ясно, что $f(x_2) \geq f(x_1)$, а это и означает, что $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a;b]$.



Для случая монотонного убывания функции теорема доказывается аналогично.

Теорема 2 имеет простой геометрический смысл. Так, если в интервале (a,b) функция $y = f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$ образует острый угол с осью Ox.

Заметим, что у строго возрастающей функции совершенно не обязательно $f'(x) > 0$ могут найтись точки, в которых будет $f'(x) = 0$. Действительно, график строго возрастающей функции $y = x^3$ изображен на рисунке. Ясно, что в точке $x_0 = 0$ $y'(x_0) = 0$.



Пример. Определить интервалы монотонности следующих функций:

a) $y = \dfrac{1 - x^2}{x}$, b) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Решение:

a) Область определения заданной функции $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

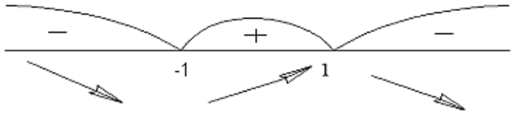
$$y' = -\frac{1}{x^2} - 1 = -\frac{1 + x^2}{x^2} < 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$$

Следовательно, $y = f(x)$ – убывает на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;

b) $D(y) = R$.

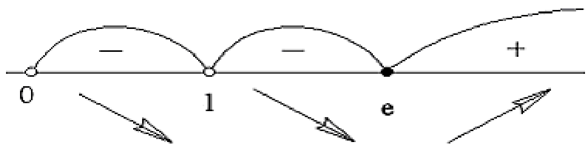
$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Найдем методом интервалов промежутки, на которых производная заданной функции положительна или отрицательна.



Итак, функция $y(x)$ убывает при $x \in (-\infty : -1) \cup (1;+\infty)$ и возрастает при $x \in (-1;1)$;

c) $D(y) = (0;1) \cup (1;\infty)$, $\qquad y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.



Используя метод интервалов, получаем, что функция $y(x)$ убывает при $x \in (0;1) \cup (1;e)$ и возрастает при $x \in (e;\infty)$.

7.2. Экстремумы функции

Пусть дана функция $y = f(x)$ на интервале (a,b).

Определение 1. Значение $f(x_0)$ в точке $x_0 \in (a;b)$ называется *максимумом* функции $f(x)$, если существует такая проколотая окрестность, что $\forall x \in O_\delta(x_0) \subset (a;b)$ выполняется условие $f(x_0) > f(x)$.

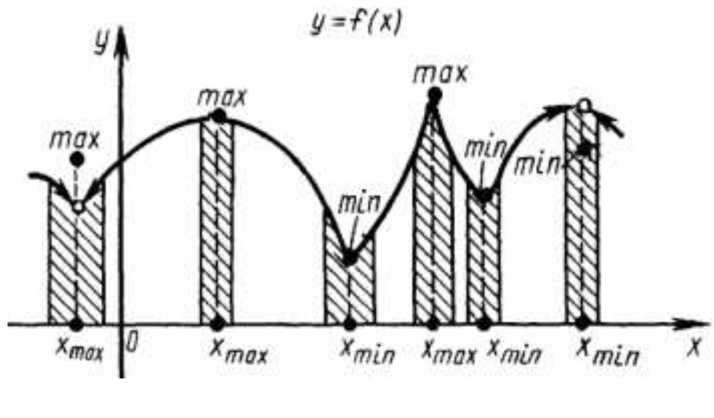
При этом пишут: $f_{\max} = f(x_0)$.

Определение 2. Значение $f(x_0)$ в точке $x_0 \in (a;b)$ называется *минимумом* функции $f(x)$, если существует такая проколотая окрестность, что $\forall x \in O_\delta(x_0) \subset (a;b)$ выполняется условие $f(x_0) < f(x)$.

При этом пишут: $f_{\min} = f(x_0)$.

Максимум или минимум функции называется одним словом: *экстремум*.

Заметим, что функция на некотором промежутке $[a; b]$ может иметь несколько максимумов или минимумов, причем, не обязательно максимальное значение является наибольшим, точно так же, как и минимальное – наименьшим.



Т е о р е м а (необходимое условие существование экстремума функции). **Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, принадлежащей интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и имеет в этой точке экстремум, то обязательно $f'(x_0)=0$.**

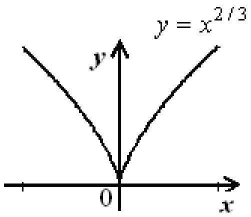
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности в точке x_0 функция имеет максимум. Тогда из определения максимума функции $y=f(x)$ в точке x_0 следует, что у этой точки существует некоторая окрестность $O_\delta(x_0)$, в которой данная функция принимает наибольшее значение.

В этой окрестности для дифференцируемой в точке x_0 функции выполнены все условия теоремы Ферма, из которой сразу вытекает, что $f'(x_0)=0$.

***Замечания*: 1.** Условие теоремы не является достаточным. Так, функция $y=x^3$ в точке $x=0$ имеет нулевую производную, но не имеет экстремума.

2. Касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремуму параллельна оси Ox.

3. Экстремум может также реализоваться в точке, в которой производная не существует (например, функция $y=x^{2/3}$).



Введем термины, которые описывают точки, в которых может реализоваться экстремум функции $y=f(x)$.

Определение 1. Точка x_0 области определения функции $y=f(x)$ называется *критической точкой первого рода* (или *точками, подозрительными на экстремум*) этой функции, если:

1) в окрестности этой точки функция непрерывна;

2) в проколотой окрестности функция дифференцируема;

3) в самой точке x_0 производная функции равна нулю, бесконечности или не существует.

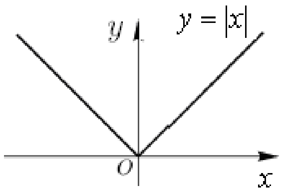
Определение 2. Критическая точка первого рода функции $y=f(x)$, в которой производная равна нулю, называется *стационарной точкой* этой функции.

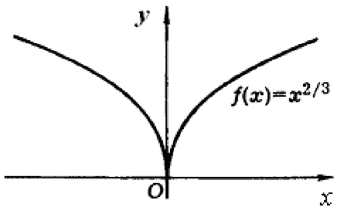
Из изложенного следует, что внутренняя точка области $D(f)$ определения дифференцируемой функции может быть точкой локального экстремума тогда и только тогда, когда эта точка является критической точкой первого рода этой функции. *Критичность точки есть необходимое, но недостаточное условие экстремума функции.*

Например, функция $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет $f'(0) = 0$, однако экстремумов не имеет.

С другой стороны, экстремум у функции может существовать и в точках, в которых функция не имеет производной или производная обращается в бесконечность, т. е. в точках, в которых функция недифференцируема. Тогда говорят, что в этих точках функция имеет *острый экстремум*.

Например, функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ недифференцируемая, т. е. у нее в этой точке не существует производная. Однако, очевидно, что в точке x_0 функция имеет минимум (острый экстремум).





Функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = 0$ имеет бесконечную производную (функция в этой точке также недифференцируемая); однако в точке $x_0 = 0$ функция имеет острый минимум.

Критические точки функции подвергаются дополнительному исследованию с целью выяснения, имеется ли в них максимум или минимум.

7.3. Первый достаточный признак экстремума

Теорема. **Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и производная $f'(x)$ обращается в нуль в точке x_0, то, если при прохождении через точку x_0 производная меняет знак «плюс» на «минус», то в точке x_0 функция имеет максимум; если при прохождении через точку x_0 производная меняет знак «минус» на «плюс», то в точке x_0 функция имеет минимум.**

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, принадлежащей интервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и имеет в этой точке экстремум, то обязательно $f'(x_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем первую половину теоремы.

Допустим, что проходя через точку x_0, производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, причем $f'(x_0)=0$.

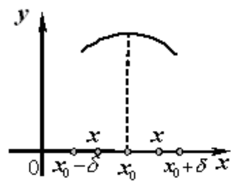
Будем рассматривать различные $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Так как выполнены условия теоремы Лагранжа, то можно написать

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0).$$

Если $x<x_0$, то $f'(c)>0$, $x-x_0<0$, следовательно, $f(x)-f(x_0)<0$.

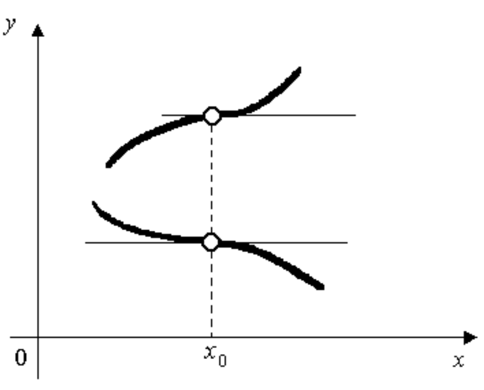
Если $x>x_0$, то $f'(c)<0$, $x-x_0>0$, следовательно, $f(x)-f(x_0)<0$, а это и означает, что в точке x_0 функция имеет максимум.

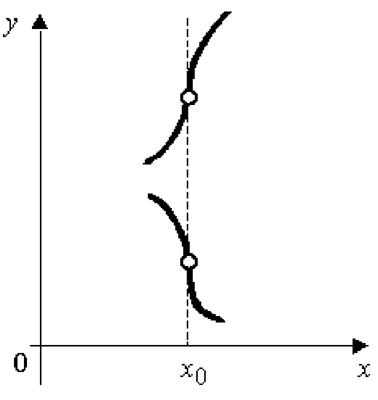


Вторая половина теоремы доказывается аналогично.

Заметим, что теорема остается в силе, если в критических точках производная не существует или обращается в бесконечность, лишь бы только в самой критической точке функция имела конечное значение.

Если при переходе через критическую точку x_0 функция не изменяет знак производной, то в этой точке не экстремумов.





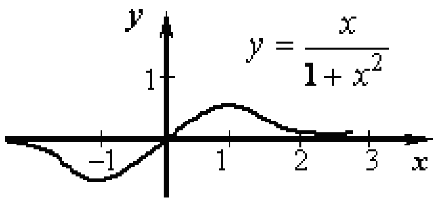
П р и м е р . Найти экстремумы функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, интервалы возрастания и убывания функции и сделать ее рисунок.

Решение:

Прежде всего заметим, что функция определена на всей числовой оси. Найдем критические точки функции. Для этого вычислим производную:

$$y' = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad y' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0.$$

Имеем две критические точки $x_{1,2} = \pm 1$. Левее точки $x_1 = -1$, $y' < 0$, правее $y' > 0$, значит, в точке $x_1 = -1$ функция имеет минимум. Ясно, что в точке $x_2 = 1$ функция имеет максимум.



При этом $y_{\min} = -\frac{1}{2}$, $y_{\max} = \frac{1}{2}$.

7.4. Наибольшее и наименьшее значение функции

Допустим, что некоторая функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$. Тогда на этом промежутке она (по теореме Вейерштрассе) имеет наибольшее и наименьшее значения.

Для нахождения наибольшее и наименьшего значения функция $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a; b]$, необходимо:

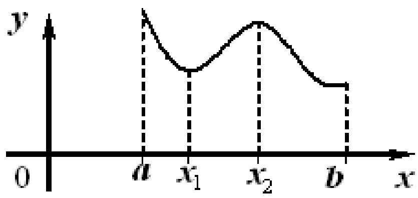
1) найти все критические точки функции на интервале $[a; b]$,

2) вычислить значения функции во все указанных критических точках,

3) вычислить значения функции на концах отрезка,

4) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

На рисунке функция $f(x)$ имеет наибольшее значение $y_{\text{наиб}} = f(a)$ в точке $x = a$, которое больше $y_{\max} = f(x_2)$, а наименьшим значением является $y_{\text{наим}} = f(b)$, которое меньше минимального значения функции $y_{\min} = f(x_1)$.



П р и м е р 1. Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2$ на отрезке [1;4].

Решение:

$f'(x) = 4x^2 - 6x = 2x(2x-3)$, причем производная определена всюду. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $2x(2x-3) = 0$.

Итак, $x = \frac{3}{2}$ и $x = 0$ – стационарные точки. При этом $\frac{3}{2} \in [1;4]$, а $x = 0 \notin [1;4]$, поэтому последняя точка нас не интересует.

Сравниваем значения исходной функции в выбранной точке и на концах отрезка:

$$f(1) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}; \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4\cdot 27}{3\cdot 8} - \frac{3\cdot 9}{4} = \frac{9}{2} - \frac{27}{4} = -\frac{9}{4};$$

$$f(4) = \frac{4\cdot 64}{3} - 3\cdot 16 = \frac{112}{3}.$$

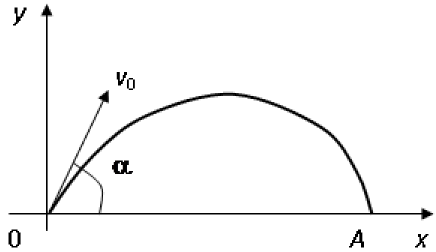
Итак, $\underset{x\in[1;4]}{\text{наим}}.\, f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}, \qquad \underset{x\in[1;4]}{\text{наиб}}.\, f(x) = f(4) = \frac{112}{3}$.

П р и м е р 2. Дальность полета $R = OA$ ядра в пустоте и полное время T полета даются формулами

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$

где v_0 – начальная скорость, g – ускорение силы тяжести, α – угол бросания с горизонталью. Найти: а) угол бросания, который бы давал наибольшую дальность полета при заданной v_0; б) угол бросания, для которого бы время полета было наибольшим.

Решение:



Очевидно, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

а) Имеем $R'_\alpha = \frac{2\nu_0^2}{g} \cos 2\alpha$. Для стационарной точки $\cos 2\alpha = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Очевидно, R'_α при переходе через точку $\alpha = \frac{\pi}{4}$ меняет знак с минуса на плюс, поэтому $\alpha = \frac{\pi}{4}$ – точка локального максимума.

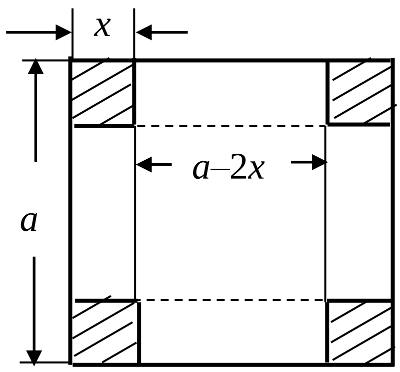
Значит, наибольшее значение функции $R(\alpha)$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ есть $R_{\max} = \frac{\nu_0^2}{g}$. Искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

б) $T'_\alpha = \frac{2v_0}{g} \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$. Очевидно, $T_\alpha{}'$ при переходе через точку $\alpha = \frac{\pi}{4}$ меняет знак с минуса на плюс, поэтому $\alpha = \frac{\pi}{4}$ – точка локального максимума.

Следовательно, наибольшее значение функции $T(\alpha)$ равно $T_{\max} = \frac{2\nu_0}{g}$, а искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Из квадратного листа картона со стороной a вырезают по углам равные квадраты и, сгибая края, получают прямоугольную открытую коробку. Как сделать коробку с наибольшей вместимостью?

Решение:



Пусть x – сторона вырезаемого квадрата. Очевидно, x изменяется в промежутке $\left[0, \frac{a}{2}\right]$, а для объема V коробки имеем $V = x(a - 2x)^2$. Вопрос сводится к определению наибольшего значения функции $V(x)$ в промежутке $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Уравнение $V'_x = (a - 2x)(a - 6x) = 0$ имеет только один корень $x = \frac{a}{6}$ при $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$. Просто убедиться, что $x = \frac{a}{6}$ – точка локального максимума. Так как граничные значения $V(0)$, $V\left(\frac{a}{2}\right)$ равны нулю, а $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$, то $V(x)$ принимает (это) наибольшее значение при $x = \frac{a}{6}$.

Практическая часть 5
Исследование функций с помощью первой производной

1. Участки монотонности функции

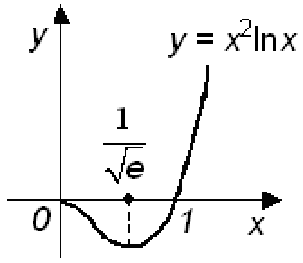
Пример 1. Найти участки монотонности функции $y = x^2 \ln x$.

Решение:

Рассмотрим функцию $y = x^2 \ln x$. Ее производная $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$. Интервал возрастания функции можно найти из неравенства $x(2\ln x + 1) > 0$.

При решении этого неравенства учтем, что в области определения функции $x > 0$, так что нужно решать неравенство $2\ln x + 1 > 0$. Отсюда $x > e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, т. е. функция $y = x^2 \ln x$ возрастает на интервале $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$.

Легко видеть, что при $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ выполняется обратное неравенство, так что на этом интервале функция убывает.



Пример 2. Найти участки монотонности функции $y = (x+2)^2 (x-1)^3$.

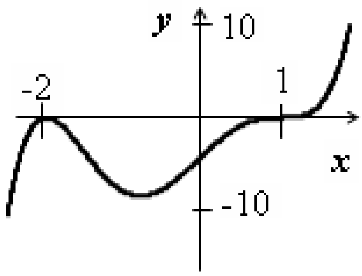
Решение:

Производная этой функции существует везде:

$y' = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 = (x+2)(x-1)^2(5x+4)$, поэтому критические точки 1-го рода совпадают со стационарными точками: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{4}{5}$, $x_3 = 1$. Эти точки разбивают область определения (всю числовую ось) на четыре интервала, в каждом из которых производная сохраняет знак, т. е. функция сохраняет направление монотонности. Составим таблицу:

x	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < -\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5} < x < 1$	$1 < x < +\infty$
y'	> 0	< 0	> 0	> 0
y	↗	↘	↗	↗

Схематичный график функции показывает участки монотонности.



2. Экстремумы функции

Пример 1. Найти экстремумы функции $f(x) = 3x - x^3$.

Решение:

Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид $f'(x) = 3 - 3x^2$ и также определена при всех x. Из уравнения $f'(x) = 3 - 3x^2 = 0$ находим стационарные точки: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Составляем таблицу для числовых интервалов и определяем знак производной. Для этого, наряду с другими способами, можно ограничиться вычислением значения производной в промежуточных точках полученных интервалов.

x	$(-\infty;-1)$	–1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	< 0	0	> 0	0	< 0
$f(x)$	↘	min		max	↘

Итак, $f_{\min} = f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2$, $f_{\max} = f(1) = 3 - 1 = 2$.

Пример 2. Исследовать на экстремумы и монотонность функцию $y = x^3 e^x$.

Решение:

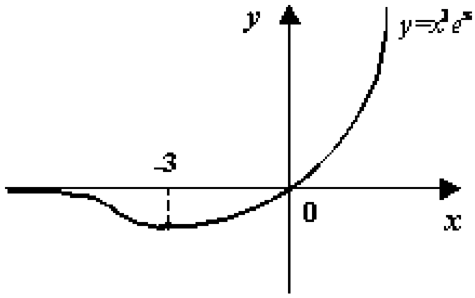
Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид $y' = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3 + x)$.

Находим стационарные точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$.

Составляем таблицу для числовых интервалов и определяем знак производной.

x	(–∞; –3)	–3	(–3; 0)	0	(0; +∞)
y'	< 0	0	> 0	0	> 0
y	↘	min	↗	–	↗

Найдем экстремумы функции. $f_{\min} = f(-3) = \dfrac{-27}{e^3} \approx -1{,}33$.



П р и м е р 3. Не проводя полного исследования, построить график функции $y = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Решение:

Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид

$$y' = \frac{4(x-5)(2x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

Точками, подозрительными на экстремум, будут являться:

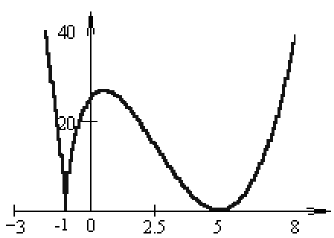
а) стационарные точки, в которых $y' = 0$, т. е. $x_1 = 0{,}5$ и $x_2 = 5$,

б) точки, в которых y' не существует, т. е. $x_3 = -1$.

x	(–∞; –1)	–1	(–1; 0,5)	0,5	(0,5 ;5)	5	(5; +∞)
y'	< 0	0	> 0	0	< 0	0	> 0
y	↘	min	↗	max	↘	min	↗

Таким образом, функция убывает при $x \in (-\infty, -1) \cup (0{,}5; 5)$ и возрастает при $x \in (-1; 0{,}5) \cup (5; +\infty)$:

$y_{\max}(0{,}5) = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18} \approx 26{,}5$; $y_{\min}(-1) = 0$ – острый минимум; $y_{\min}(5) = 0$ – гладкий минимум.



П р и м е р 4. Не проводя полного исследования, построить график функции $y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

Решение:

Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид

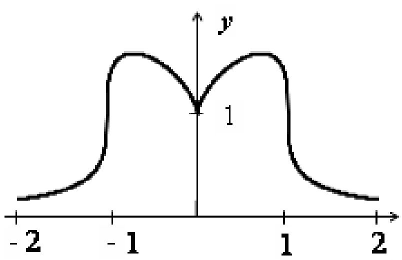
$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2x}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Решая уравнение $(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}} = 0$, находим стационарные точки $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, другими критическими точками первого рода будут точки $x = 0$, $x = \pm 1$, в которых знаменатель обращается в нуль.

Так как функция четна, достаточно исследовать ее поведение при $x \geq 0$; в таблицу включаем левую окрестность точки $x = 0$:

x	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$	0	$\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$	1	$(1;\infty)$
y'	<0	∞	>0	0	<0	∞	<0
y	↘	min	↗	max	↘	Нет экстр.	↘

Точки $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ будут точками максимума со значением функции $y_{\max}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; в точке $x = 0$ – минимум $y_{\min}(0) = 1$; в точках $x = \pm 1$ экстремум отсутствует.



3. Наибольшие и наименьшие значения функции на интервале

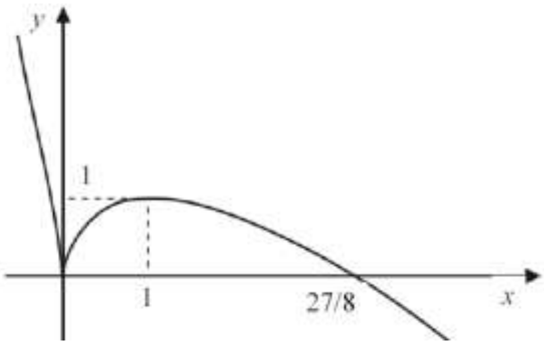
Пример 1. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$ на отрезке [–1, 2].

Решение:

1. Находим критические точки: $y' = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) = 2x^{-\frac{1}{3}}\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)$.

Очевидно, что ими являются точки $x = 0$ и $x = 1$.

2. $y(0) = 0$; $y(1) = 1$.
3. $y(-1) = 5$; $y(2) = 0{,}8$.
4. $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 5$; $y_{\text{наим}} = y(0) = 0$.



Пример 2. Имеется 160 м проволоки. Этой проволокой требуется огородить прямоугольный участок земли так, чтобы площадь участка была наибольшей. Найти длину и ширину такого участка.

Решение:

Чтобы решить задачу, площадь участка нужно предоставить как функцию одного аргумента, например как функцию длины участка. Обозначим длину участка через x. Выразим через x ширину участка y: $y = \frac{160 - 2x}{2}$.

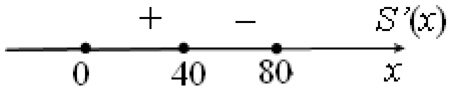
В таком случае площадь участка $S(x) = x(80 - x)$ (м^2).

Область определения полученной функции $S(x)$ представляет собой интервал (0;80), т. к. $x > 0$ и $80 - x > 0$.

Находим наибольшее значение функции $S(x)$:

$S(x) = 80x - x^2$; $S'(x) = 80 - 2x$; $80 - 2x = 0$; $x = 40$.

На интервале (0;40) $S'(x) > 0$, значит, функция возрастает. На интервале (40;80) $S'(x) < 0$, и, значит, функция убывает.



Следовательно, при $x = 40$ функция $S(x)$ имеет максимум.

Итак, прямоугольный участок будет иметь наибольшую площадь, если его длина $x = 40$ м и ширина $y = 80 - 40 = 40$ м (участок в этом случае имеет форму квадрата).

Пример 3. Требуется изготовить из жести закрытый сверху и снизу цилиндрический бак вместимостью 60 л. При каких размерах бака на его изготовление пойдет возможно меньшее количество материала?

Решение:

Требуется, чтобы полная поверхность бака была наименьшей. Обозначим радиус бака через x и выразим полную поверхность бака.

Высоту бака h находим из равенства $\pi x^2 h = 60$ дм^3; $h = \dfrac{60}{\pi x^2}$.

Полная поверхность $S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \dfrac{60}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \dfrac{120}{x}$.

Область определения функции $S(x)$ – интервал $(0; +\infty)$.

$S'(x) = 4\pi x - \dfrac{120}{x^2} = 4\dfrac{\pi x^3 - 30}{x^2} = 0$, откуда $x = \sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}}$.

Легко увидеть, что на интервале $\left(0; \sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}}\right)$ $S'(x) < 0$, а на интервале $\left(\sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}}; +\infty\right)$ $S'(x) > 0$.

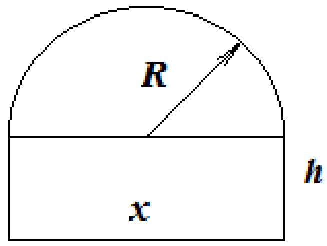
При $x = \sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}}$ функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

При этом $$h = \frac{60}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{60^3}{900\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}.$$

Ответ: радиус основания $\sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}}$ дм, высота $2\sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}}$ дм. Поверхность бака будет наименьшей, когда высота его равна диаметру основания.

П р и м е р 4. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом, периметр фигуры окна равен 6 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало максимум света?

Решение:



Требуется, чтобы площадь окна была наибольшей. Обозначим основание окна через x и выразим площадь окна через x. Чтобы найти h, воспользуемся равенством $x + 2h + \pi\frac{x}{2} = 6$; $h = 3 - \frac{x}{2} - \pi\frac{x}{4}$

$h = 3 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}$.

Отсюда площадь окна

$$S(x) = hx + \pi\frac{x^2}{8} = 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = 3x - \frac{\pi + 4}{8}x^2.$$

Чтобы найти область определения функции $S(x)$, учитываем, что $x > 0$ и $h > 0$, т. е. $3 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4} > 0$, $\frac{(2+\pi)}{4} < 3$, $x < \frac{12}{2+\pi}$.

Область определения функции $S(x)$ – интервал $\left(0; \frac{12}{2+\pi}\right)$:

$S'(x) = 3 - \frac{\pi + 4}{4}x$; $3 - \frac{\pi + 4}{4}x = 0$; $x = \frac{12}{\pi + 4}$.

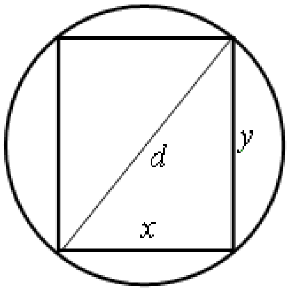
Легко проверить, что при $x = \frac{12}{\pi + 4}$ функция имеет наибольшее значение. При этом

$$h = 3 - \frac{12}{2(\pi + 4)} - \frac{12\pi}{4(\pi + 4)} = \frac{6}{\pi + 4}.$$

Ответ: Основание окна должно быть равно $\frac{12}{\pi + 4}$ м, высота прямоугольной части окна равна $\frac{6}{\pi + 4}$ м (высота прямоугольной части окна в 2 раза меньше его основания).

Пример 5. Примем, что прочность балки поперечного прямоугольного сечения пропорциональна ширине x и квадрату высоты y. Каковы должны быть размеры x и y, если балка выпиливается из круглого бревна диаметра d, чтобы балка обладала наибольшей прочностью?

Решение:



Очевидно, что $y^2 = d^2 - x^2$. Балка будет иметь наибольшую прочность, когда функция $f(x) = xy^2 = x(d^2 - x^2)$ принимает наибольшее значение. Несомненно, что независимая переменная x изменяется в интервале (0, d). Уравнение $f'(x) = d^2 - 3x^2 = 0$ дает единственную стационарную точку $x = d/\sqrt{3}$. Просто убедиться, что $x = d/\sqrt{3}$ – точка локального максимума.

Следовательно, если балка выпилена так, что высота $y = \sqrt{\frac{2}{3}}d$, ширина $x = \sqrt{\frac{1}{3}}d$, то она будет иметь наибольшую прочность.

Пример 6. Предприятие выпускает некий товар в объеме, превосходящем 1 экземпляр. Издержки производства (в у.е.) зависят от объема выпущенного товара (x) и определяются формулой $f(x) = 4 + 15x$. Спрос (цена на товар) также зависит от объема производства и определяется формулой $g(x) = -x^2 + 20x + 2$. Найти объем производства товара, при котором прибыль будет максимальна.

Решение:

В данной задаче необходимо сначала составить функцию, связывающую прибыль и объем производства товара, а также определить интервал, на котором функция будет исследоваться. Прибыль – это разница между выручкой за проданный товар и издержками. Выручка определяется как объем проданного товара, умноженный на его цену. Таким образом, функция, максимум которой нас интересует, определена на интервале $(1;+\infty)$ и имеет вид

$$F(x)=x(-x^2+20x+2)-(4+15x)=-x^3+20x^2-13x-4.$$

Найдем производную этой функции и приравняем к нулю: $F'(x)=-3x^2+40x-13=0$. Решив квадратное уравнение, находим: $x_1=13,\ x_2=1/3$. Очевидно, что условию задачи удовлетворяет только первой значение. Сравнив знаки производной слева и справа от точки $x_1=13$, получаем, что $x_1=13$ – точка максимума, поэтому

$$\max_{x\in(1;+\infty)} F(x)=F(13)=-13^3+20\cdot 13^2-13\cdot 13-4=1010\ .$$

Итак, при объеме производства в 13 единиц прибыль будет максимальной и составит 1010 у.е.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–14 найти интервалы возрастания и убывания функций:

1. $y=3x^4-4x^3+12x^2+1$. 2. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$.

3. $y=1-x^3$. 4. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. 5. $y=\ln(x+1)$.

6. $y=x-\ln x$. 7. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$. 8. $y=x-\mathrm{arctg}\,2x$.

9. $y=x\cdot e^{-x}$. 10. $y=xe^{-x^2}$. 11. $y=\frac{x^2}{x-2}$.

12. $y=\frac{x-2}{x^2}$. 13. $y=x-\sin x$. 14. $y=2^{\frac{1}{x-2}}$.

В задачах 15–21 найти экстремумы функций:

15. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$. 16. $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$. 17. $y=x^2\cdot e^{-x}$.

18. $y=x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$. 19. $y=\sin^2 x, 0<x<2\pi$.

20. $y=x+\cos 2x, 0<x<\pi$. 21. $y=\frac{x^3}{x-2}$.

В задачах 22–28 найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках:

22. $y = x^3$ на отрезке $[-1;4]$.

23. $y = x^2 - 5x + 6$ на отрезке $\left[\frac{5}{2};4\right]$.

24. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1;5]$ и на отрезке $[-10;12]$.

25. $y = x + 2\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$.

26. $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

27. $y = \frac{x}{1+x^2}$ на отрезке $[-2;3]$.

28. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ на отрезке $[0;2\pi]$.

Решить следующие задачи:

29. Разделить число 10 на такие две части, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

30. Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление:

а) на сжатие;

б) на изгиб?

(Сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения, а на изгиб − произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты).

31. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшая? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

32. Принимая, что прочность бруска с прямоугольным поперечным сечением прямо пропорциональна ширине и кубу высоты, найти ширину бруска наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна, диаметр которого равен 16 см.

***Ответы*:**

1) убывает при $x \in (-\infty;0)$, возрастает при $x \in (0;+\infty)$;

2) возрастает при $x \in (-\infty;2)$ и $x \in (3;+\infty)$ убывает при $x \in (2;3)$;

3) убывает при $x \in (-\infty;+\infty)$;

4) возрастает при $x \in (-\infty;-2)$ и $x \in (2;+\infty)$, убывает при $x \in (-2;0)$ и $x \in (0;2)$;

5) возрастает при $x \in (-1;+\infty)$;

6) убывает при $x \in (0;1)$, возрастает при $x \in (1;+\infty)$;

7) убывает при $x \in (-\infty;0)$, возрастает при $x \in (0;+\infty)$;

8) возрастает при $x \in (-\infty;-1)$ и при $x \in (1;+\infty)$, убывает при $x \in (-1;1)$;

9) возрастает при $x \in (-\infty;1)$, убывает при $x \in (1;+\infty)$;

10) убывает при $x \in \left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и при $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$, возрастает при $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

11) возрастает при $x \in (-\infty;0)$ и при $x \in (4;+\infty)$, убывает при $x \in (0;2)$ и $x \in (2;4)$;

12) убывает при $x \in (-\infty;0)$ и $x \in (4;+\infty)$, возрастает при $x \in (0;4)$;

13) возрастает при $x \in (-\infty;+\infty)$;

14) убывает при $x \in (-\infty;2)$ и $x \in (2;+\infty)$;

15) $y_{\max} = y(-1) = \frac{7}{6}, y_{\min} = y(2) = -\frac{10}{3}$;

16) $y_{\max} = y(-3) = \frac{27}{2}, y_{\min} = y(2) = -\frac{22}{3}$;

17) $y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^2}, y_{\min} = y(0) = 0$;

18) $y_{\min} = y(2) = \frac{2}{e}$;

19) $y_{\max} = y(\frac{\pi}{2}) = y(\frac{3\pi}{2}) = 1, y_{\min} = y(\pi) = 0$;

20) $y_{\max} = y(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}, y_{\min} = y(\frac{5\pi}{12}) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12}$;

21) $y_{\min} = y(3) = 27$.

22) $y_{наим} = -1$ при $x = -1$; $y_{наиб} = 64$ при $x = 4$;

23) $y_{наим} = \frac{1}{4}$ при $x = \frac{5}{2}$; $y_{наиб} = 2$ при $x = 4$;

24) а) $y_{\text{наим}} = -6$ при $x = 1$; $y_{\text{наиб}} = 266$ при $x = 5$, б) $y_{\text{наим}} = -1579$ при $x = -10$; $y_{\text{наиб}} = 3{,}745$ при $x = 12$;

25) $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 0$; $y_{\text{наиб}} = 8$ при $x = 4$;

26) $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi}{2}$ при $x = \frac{\pi}{2}$; $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{2}$ при $x = -\frac{\pi}{2}$;

27) $y_{\text{наим}} = -0{,}5$ при $x = -1$; $y_{\text{наиб}} = 0{,}5$ при $x = 1$;

28) $y_{\text{наим}} = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$; $y_{\text{наиб}} = 1$;

29) 5 и 5;

30) а) $0{,}5\sqrt{2}d$ и $0{,}5\sqrt{2}d$; б) $\frac{\sqrt{3}d}{3}$ и $\frac{\sqrt{6}d}{3}$;

31) $0{,}5R\sqrt{2}$;

32) 8 см.

Задания

Выполните задания 26–28 из прил. 1.

8. Исследование функций с помощью второй производной

8.1. Второй достаточный признак экстремума

Теорема. **Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем в этой окрестности $f''(x)$ непрерывна, а в точке x_0 первая производная обращается в нуль, то, если $f''(x_0) < 0$, в точке x_0 функция имеет максимум, а если $f''(x_0) > 0$, в точке x_0 функция имеет минимум.**

Доказательство. Докажем первую половину теоремы.

Пусть $f''(x_0) < 0$.

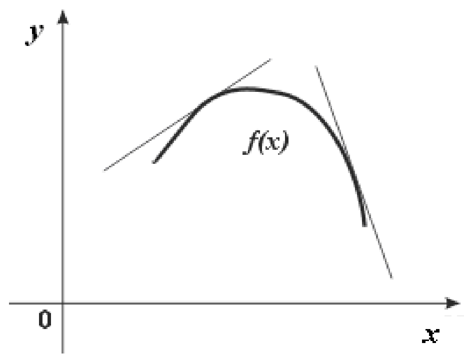
Так как по условию теоремы $f''(x)$ непрерывна в некоторой δ-окрестности точки $x = x_0$, то найдется некоторый малый отрезок, окружающий точку $x = x_0$, во всех точках которого $f''(x) < 0$. Но, по определению второй производной, $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$ и $\left(f'(x)\right)' < 0$, откуда следует монотонное убывание на этом отрезке функции $f'(x)$.

Так как по условию теоремы $f'(x) = 0$, то при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, т. е. производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–» при переходе через точку $x = x_0$ и в этой точке, согласно предыдущей теоремы, функция $f(x)$ достигает максимума.

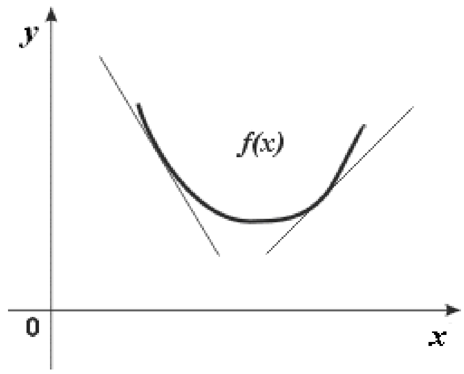
Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

8.2. Выпуклость и вогнутость кривых

Определение 1. Непрерывная кривая на промежутке $[a; b]$ *выпукла вверх*, или просто *выпукла*, если график располагается ниже касательной к графику функции, проведенной через любую точку графика.

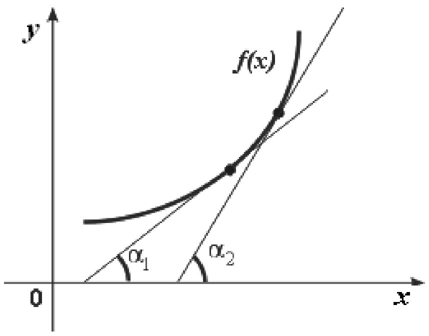


Определение 2. Непрерывная кривая на промежутке $[a; b]$ *выпукла вниз*, или *вогнута*, если ее график располагается выше касательной к графику функции, проведенной через любую точку графика.



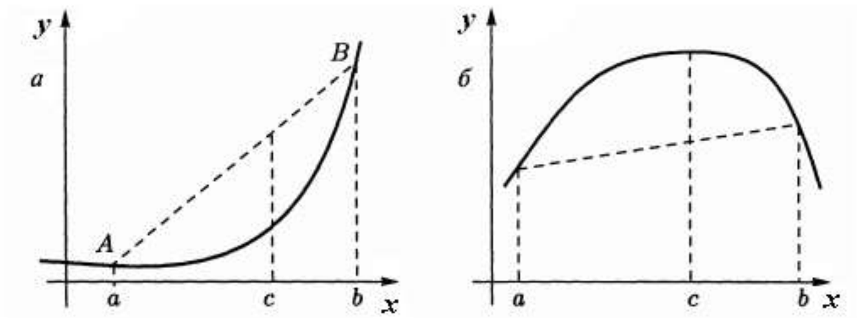
Теорема. **Функция выпукла вниз (вверх) на промежутке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).**

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что если $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке $[a; b]$, то возрастает (убывает) угол наклона α касательных к графику. Это и означает выпуклость функции вниз (вверх).



Геометрически ясно, что вертикальный луч, проведенный из произвольной точки $c \in (a;b)$:

- для выпуклой функции пересекает сначала график $y = f(x)$, а потом секущую AB,
- для вогнутой функции пересекает сначала секущую AB, а потом график $y = f(x)$.



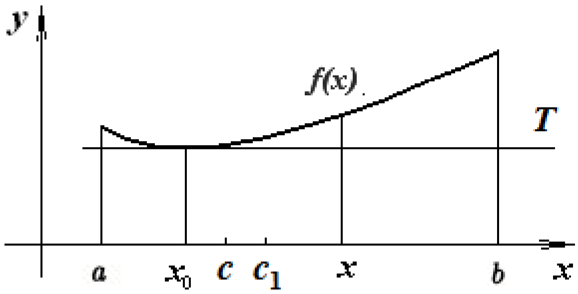
Это свойство иногда используют для определения вогнутости (выпуклости) кривой.

Теорема. **Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке [*a*; *b*]. Если на этом промежутке $f''(x) < 0$, то на [*a*; *b*] график функции выпуклый, а если $f''(x) > 0$, то на промежутке [*a*; *b*] график функции вогнутый.**

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$.

Проведем в точке $x = x_0$ касательную T к графику функции. По условию теоремы необходимо доказать, что все точки графика функции лежат выше касательной, т. е. ординаты любой точки кривой $y = f(x)$ больше ординаты y касательной при том же значении аргумента.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет вид $y_{\text{кас}} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, откуда $y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $y_{\text{кас}}$ – ординаты точек касательной.



Разность ординат точек кривой и касательной равна

$$y - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применим теорему Лагранжа к функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

и тогда $y - y_{\text{кас}} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, или

$$y - y_{\text{кас}} = \left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0),$$

где $c \in [x_0, x] \subset (a;b)$.

Применим теперь теорему Лагранжа к функции $\left(f'(c) - f'(x_0)\right)$ на $[x_0, c]$:

$$y - y_{\text{кас}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0),$$

где $c_1 \in [x_0, c] \subset (a;b)$.

В последнем равенстве $f''(c_1) > 0$, а $\begin{cases} c - x_0 > 0, & \text{если } x - x_0 > 0; \\ c - x_0 < 0, & \text{если } x - x_0 < 0. \end{cases}$

Следовательно, $y > y_{\text{кас}}$, т. е. ординаты точек кривой больше ординат точек касательной при одной и той же абсциссе.

Значит, график функции $y = f(x)$ на $(a;b)$ вогнутый.

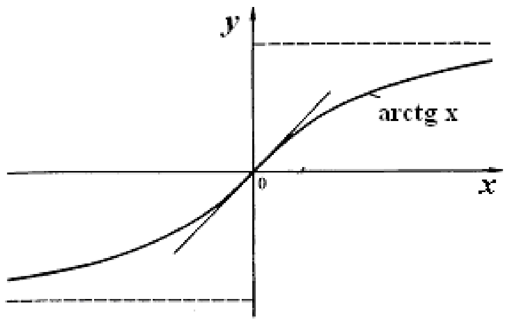
Доказательство выпуклости графика функции на $(a;b)$ проводится аналогично.

П р и м е р 1. Найти интервалы выпуклости функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Решение:

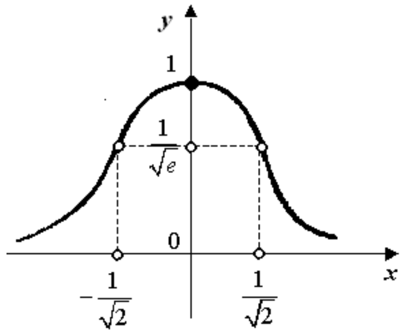
Данная функция определена и бесконечно дифференцируема на всей числовой оси:

$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y'' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Очевидно, что при $x < 0$ функция вогнута, а при $x > 0$ выпукла.



Пример 2. Найти интервалы выпуклости функции кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$.

Решение:

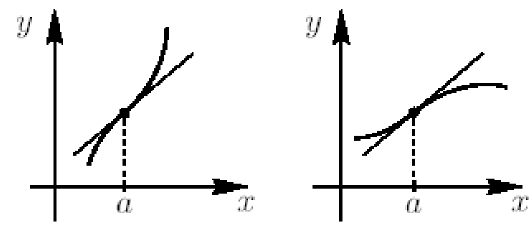


Так как $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, то уравнение $f''(x) = 0$ дает две точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

В интервалах $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$, на которые разделяется ось $-\infty < x < \infty$ этими точками, знак $f''(x)$ будет соответственно «+», «–», «+». Следовательно, кривая Гаусса вогнута в интервалах $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ и выпукла в интервале $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.3. Точки перегиба

Определение 1. Точка на графике функции $f(x)$, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется *точкой перегиба*.



Очевидно, что в точке перегиба касательная разделяет график функции: он лежит по разные стороны касательной.

Из определения также следует, что при прохождении через точку перегиба вторая производная меняет знак.

Определение 2. Критическими точками второго рода (или *подозрительными на перегиб* точками) называются точки x_0, в которых либо $f''(x_0) = 0$, или $f''(x_0) = \infty$, или $f''(x_0)$ не существует.

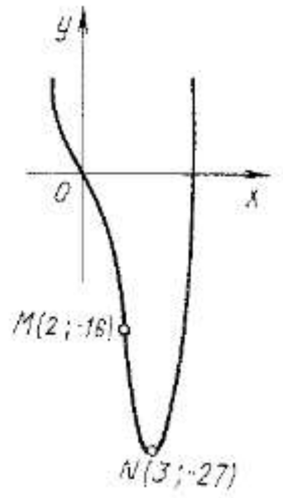
П р и м е р 1. Найти точки перегиба графика функции $y = x^4 - 4x^3$.

Решение:

$y' = 4x^3 - 12x^2$, $y'' = 12x^2 - 24x$, и точками, подозрительными на перегиб, являются $x = 0$ и $x = 2$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
y''	> 0	0	< 0	0	> 0
y	Вогнута	Перегиб	Выпукла	Перегиб	Вогнута

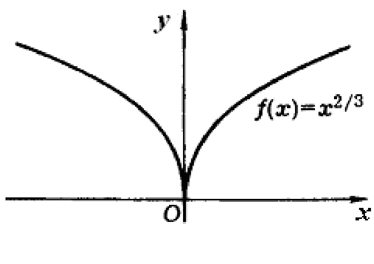
На рисунке приведен схематически график функции.



П р и м е р 2. Найти точку перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение:

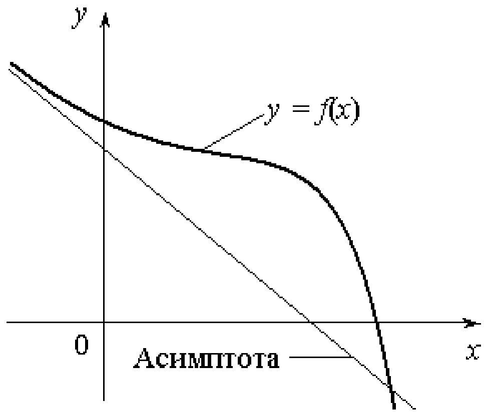
$y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, и точка $x = 0$ не является точкой перегиба, т.к. вторая производная не меняет знак.

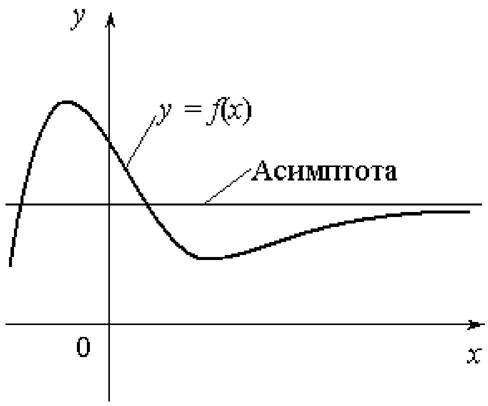


В этом случае говорят о *точке возврата* графика функции.

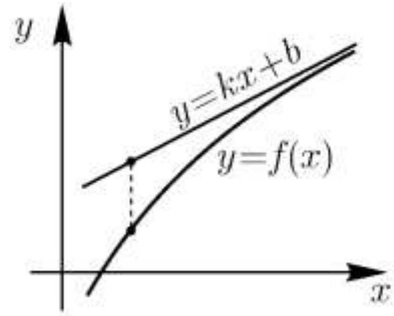
8.4. Асимптоты кривых

Определение. Прямая линия называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние между текущей точкой графика и этой прямой стремится к нулю по мере удаления точки от начала координат.





Предположим, что график функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ $(k \neq \pm\infty)$.



Очевидно, что $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left| f(x) - y_{ac} \right| = 0$, т. е.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0 .$$

Вследствие того, что $\dfrac{b}{x} \to 0$, при $x \to \pm\infty$, то ясно, что последнее предельное равенство может иметь место лишь тогда, когда выражение в квадратной скобке стремится к нулю, а тогда имеем $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

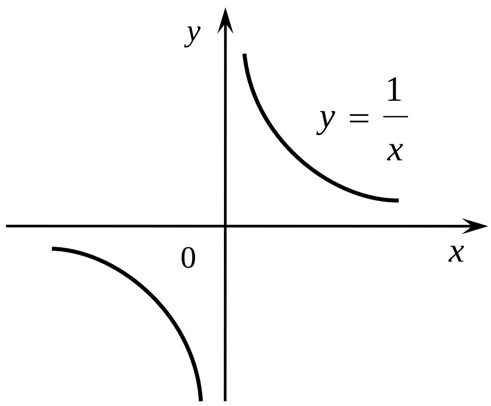
Если k найдено, то не составит труда найти и b: $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$.

В частности, если окажется, что $k = 0$, то мы будем иметь частный случай наклонной асимптоты – горизонтальную асимптоту.

Вертикальные асимптоты – прямые, задаваемые уравнениями вида $x = a$. В этом случае определение асимптоты подтверждается, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a бесконечен.

Замечание. Число вертикальных асимптот графика функции не ограничено, а наклонных и горизонтальных в сумме может быть не более двух (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

Пример 1. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ является прямая $x = 0$, т. е. ось ординат.



Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$.

Решение:

Точка $x = 2$ является точкой разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2+1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2+1}{x-2} = +\infty.$$

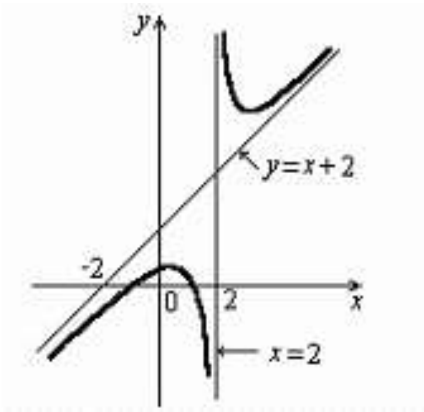
Следовательно, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$.

Так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \pm\infty$, то горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)} = 1, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2,$$

следовательно, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой при $x \to \pm\infty$.



П р и м е р 3. Найти асимптоты графика функции $y = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + 1$.

Решение:

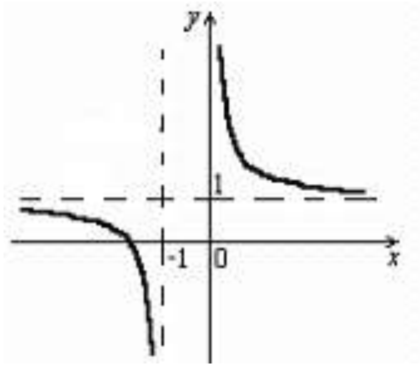
Областью определения функции является множество всех решений неравенства $1 + \dfrac{1}{x} > 0$. Решая его, получим $\dfrac{1+x}{x} > 0$, откуда следует, что $x < -1$ или $x > 0$.

Найдем односторонние пределы в границах области определения:

$$\lim_{x \to 1-0}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1\right) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+0}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1\right) = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой при $y \to -\infty$, а прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой при $y \to +\infty$.

Так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + 1\right) = 1$, то прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой при $x \to \pm\infty$. Наклонных асимптот нет.



П р и м е р 4. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

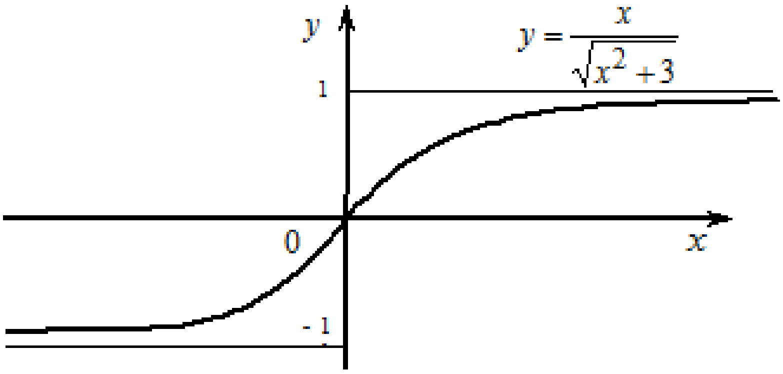
Решение:

Данная функция определена и непрерывна на R, следовательно, вертикальных асимптот нет. Для определения наклонных асимптот находим пределы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} = 0\,,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \begin{cases} 1, \text{ при } & x \to -\infty; \\ -1, \text{ при } & x \to +\infty. \end{cases}$$

Следовательно, у графика данной функции две односторонние горизонтальные асимптоты $y = 1,$ при $x \to -\infty$ и $y = 1,$ при $x \to -\infty$.



8.5. Общая схема исследования функции

Принимая во внимание все вышесказанное, можем привести такой план исследования дифференцируемой функции:

1. Определить область существования функции.
2. Выяснить, является данная функция четной или нечетной.

3. Найти точки, подозрительные на экстремум, и выяснить характер экстремумов с помощью первой или второй производной, а также вычислить $y_{\min}$ и $y_{\max}$.

4. Определить интервалы возрастания и убывания функции.

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции.

6. Найти точки перегиба.

7. Найти асимптоты графика функции.

8. Вычислить значение функции в некоторых контрольных точках (например, значение функции в начале координат), точки пересечения с координатными осями.

9. Нарисовать график функции.

Очевидно, что порядок следования пунктов может быть изменен при решении каждой конкретной задачи.

Пример 1. Построить график функции $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$.

1. Функция определена и непрерывна при всех $x \in R$, кроме точек $x = \pm 2$.

2. Область значения функции – $y \in R$.

3. Функция нечетна, т. к. $y(-x) = -y(x)$, график функции симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно провести исследование в интервале $[0, \infty)$.

4. Прямые $x = \pm 2$ являются вертикальными асимптотами, т. к. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3}{x^2 - 4} = \infty$.

Найдем наклонную асимптоту:

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2 - 4} = 2$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - 2x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{8x}{x^2 - 4} = 0$, т. е. данная кривая имеет наклонную асимптоту $y = 2x$.

5. Для нахождения промежутков возрастания и убывания найдем первую производную $y' = \dfrac{6x^2(x^2 - 4) - 4x^4}{(x^2 - 2)^2} = \dfrac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$.

В промежутке $[0,\infty)$ функция обращается в нуль в точках $x = 0$, $x = 2\sqrt{3}$ и обращается в бесконечность в точке $x = 2$.

x	(0,2)	2	$(2{,}2; \sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; \infty)$
y'	< 0		< 0		> 0
y	↓	–	↓	min	↑

6. Для нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{2x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}\right)' = \frac{\left(4x(x^2-12)+4x^3\right)(x^2-4)^2-2x^2(x^2-12)4x(x^2-4)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2-4)\left[\left[x^2-12+x^2\right](x^2-4)-2x^2(x^2-12)\right]}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{8x\left[(x^2-6)(x^2-4)-x^2(x^2-12)\right]}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{8x(x^4-6x^2-4x^2+24-x^4+12x^2)}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3} = \frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

y'' обращается в нуль в точке $x = 0$ и в бесконечность в точке $x = 2$.

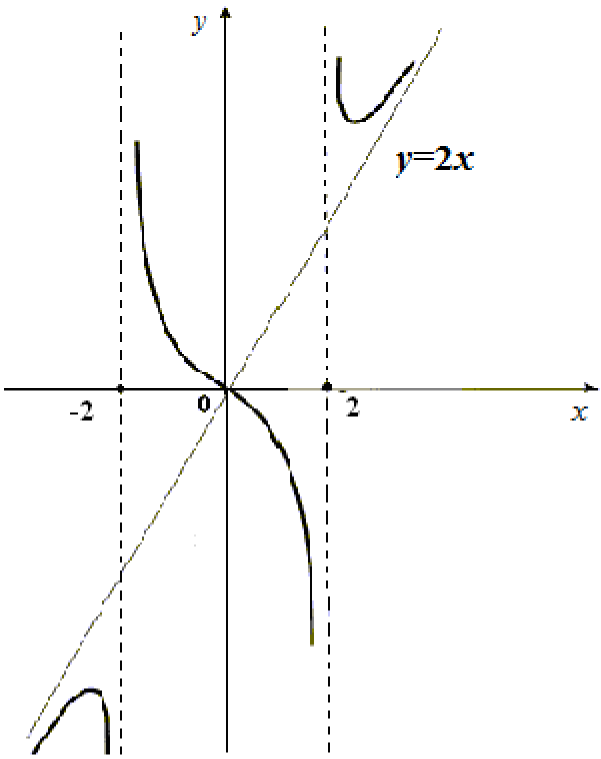
x	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
y	Выпукла	∞	Вогнута
y''	< 0		> 0

Точка $x = 0$ является точкой перегиба, т. к. вторая производная меняет знак при переходе через эту точку.

7. $y_{\min}(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$, $y(0) = 0$.

Используя результаты исследования и учитывая нечетность функции, получим следующий график функции:

$$y = \frac{2x^3}{x^2-4}.$$



Практическая часть 7

Исследование функций с помощью второй производной

1. Асимптоты функции

Пример 1. Найти наклонные асимптоты графика $y = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 1}$.

Решение:

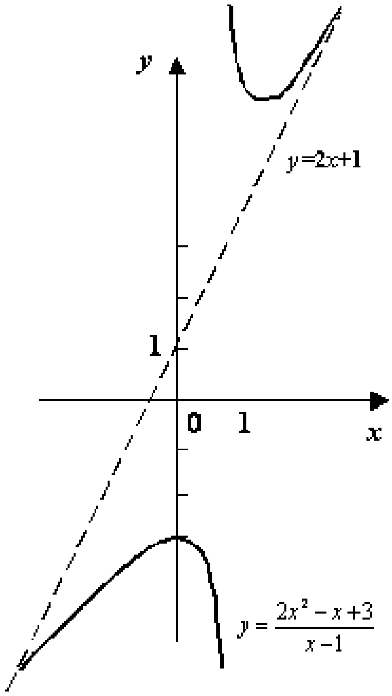
Попробуем находить сразу оба предела при $x \to \pm\infty$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x - 1} = 2;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - 2x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 3 - 2x^2 + 2x}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1.$$

Итак, и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ имеем $k = 2$ и $b = 1$, так что обе наклонные асимптоты совпадают друг с другом и имеют уравнение $y = 2x + 1$, т. е., фактически, асимптота только одна.

Имеется также вертикальная асимптота $x = 1$.



Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = 2\sqrt{x \quad + x + 1} - x$.

Решение:

Покажем, что обе ее наклонные асимптоты существуют, но не совпадают друг с другом.

Сначала найдем асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = 2 - 1 = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to \pm\infty} 2\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right) =$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} =$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Таким образом, при $x \to +\infty$ наклонной асимптотой служит прямая $y = x + 1$.

Теперь найдем асимптоту при $x \to -\infty$.

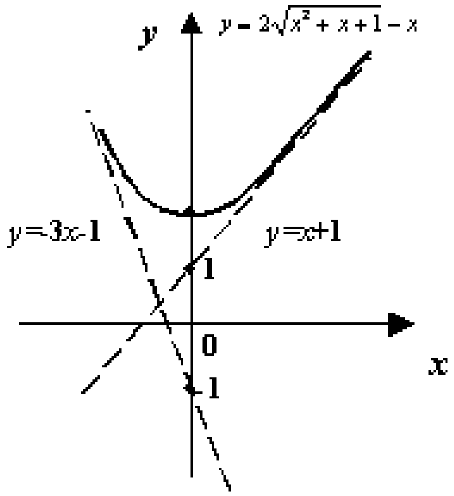
Имеем

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(2 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-2\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = -2 - 1 = -3;$$

Здесь деление под знаком радикала произведено с учетом того, что $x < 0$, т. е. на $(-x)^2 = x^2$.

Вычисление b проводятся аналогично. При этом получается $b = -1$, так что наклонная асимптота при $x \to -\infty$ имеет уравнение $y = -3x - 1$.



2. Исследование функции на «Выпуклость – вогнутость»

П р и м е р 1. Исследовать график функции $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ на выпуклость и вогнутость.

Решение:

1. Поскольку знаменатель положителен при всех *x*, область определения функции – вся ось *Ox*.

2. Функция *f* (*x*) – нечетная, поскольку при смене знака *x* числитель меняет знак, а знаменатель остается без изменения, откуда *f* (–*x*) = – *f* (*x*). Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

3. Найдем производные:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{\left(x^2+1\right)^2};$$

$$f''(x) = \frac{\left(4x^3+6x\right)\left(x^2+1\right)^2 - \left(x^4+3x^2\right)\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех x. Числитель имеет корни $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$.

4. Разобьем область определения точками $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ на интервалы, в каждом из которых вторая производная сохраняет знак.

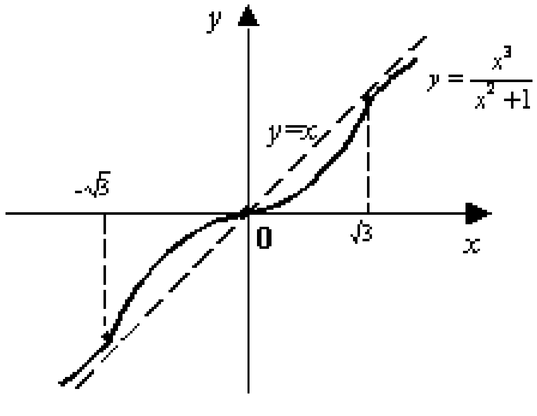
x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
y''	> 0	0	< 0	0	> 0	0	< 0
y	Вогнута	Перегиб	Выпукла	Перегиб	Вогнута	Перегиб	Выпукла

При этом $f''(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$, т. е. на этих интервалах функция выпукла.

На интервалах $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ выполняется обратное неравенство $f''(x) < 0$, здесь функция вогнута.

Все три точки, в которых $f''(x) = 0$, т. е. точки $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$, являются точками перегиба.

На рисунке приведен схематически график функции.



Пример 4. Исследовать график функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ на выпуклость и вогнутость.

Решение:

1. Функция определена при всех действительных значениях x таких, что $x^2 - 4 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 2$.

2. Найдем вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2 - 4}\right)' = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}.$$

$$y'' = -\frac{2x(x^2 - 4)^2 - 2(x^2 - 4)2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^4} =$$

$$= -\frac{2x(x^2 - 4)^2 - 2(x^2 - 4)2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^4} = -\frac{2x(x^2 - 4 - 2x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$$

$$y''(0) = 0.$$

$y''(\pm 2)$ не существует, но т. к. они не входят в область определения функции, они не могут быть абсциссами точек перегиба.

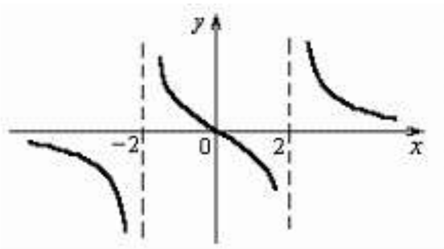
3. Разобьем область определения точкой $x = 0$ на интервалы $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$, в каждом из которых вторая производная сохраняет знак.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
y''	<0	∞	>0	0	<0	∞	>0
y	Выпукла $\frown$	–	Вогнута $\smile$	Перегиб	Выпукла $\frown$	–	Вогнута $\smile$

4. Функция выпукла вверх в интервалах $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$, вогнута (выпукла вниз) в интервалах $(-2; 0)$, $(2; \infty)$.

5. В интервалах $(-2; 0)$, $(0; 2)$ y'' имеет разные знаки. Значит, точка (0; 0) является точкой перегиба функции.

На рисунке приведен схематически график функции.



3. Полное исследование функции

Пример 1. Провести полное исследование функции $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$ и построить ее график.

Решение:

1. Заметим, что знаменатель имеет корни 1 и 2, так что функцию можно представить в виде $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(x-1)(x-2)}$.

Теперь легко видеть, что области определения функции не принадлежат только точки 1 и 2:

$$D(f) = R \setminus \{1;2\} = (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (2;\infty).$$

2. Поскольку область определения $D(f)$ не симметрична относительно точки 0, функция не может быть ни четной, ни нечетной. Очевидно также, что она не периодична (хотя бы потому, что ее область определения не имеет периодической структуры).

3. Область определения этой элементарной функции имеет две граничных точки: 1 и 2. Поэтому прямые $x = 1$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 + x}{(x-1)(x-2)} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 + x}{(x-1)(x-2)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2 + x}{(x-1)(x-2)} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2 + x}{(x-1)(x-2)} = +\infty.$$

4. Поскольку числитель и знаменатель – многочлены одной и той же (второй) степени, то легко видеть, что $f(x)$ имеет предел при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x}} = 1.$$

Следовательно, горизонтальная прямая $y = 1$ служит горизонтальной асимптотой графика как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$. (Искать наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$ и находить k и b по общим формулам нам теперь нет никакой необходимости.)

5. Найдем точки пересечения графика с осями координат: $x^2 + x = 0$, откуда $x = 0$ и $x = -1$. Значит, график пересекает ось Ox в этих двух точках.

x	$(-\infty;-1)$	(–1;0)	(0;1)	(1;2)	$(2;+\infty)$
y	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

6. Найдем производную: $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 4x + 2}{(x-1)^2(x-2)^2}$.

Найдем точки, подозрительные на экстремум:

а) точки, в которых $f'(x) = 0$, т. е. $x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

б) точки, в которых производная обращается в бесконечность, т. е. $x_3 = 1$ и $x_4 = 2$.

x	$(-\infty;x_1)$	x_1	$(x_1;1)$	1	$(1;x_2)$	x_2	$(x_2;2)$	2	$(2;\infty)$
y'	< 0	0	> 0	∞	> 0	0	< 0	∞	< 0
y	$\downarrow$	min	$\uparrow$		$\uparrow$	max	$\downarrow$		$\downarrow$

$$f_{\min} = f(x_1) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0{,}2.$$

$$f_{\max} = f(x_2) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} - 7 \approx -13{,}8.$$

7. Найдем вторую производную: $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{4(x-1)^3(x-2)^3}$.

Для нахождения интервалов выпуклости решаем неравенство $f''(x) > 0$.

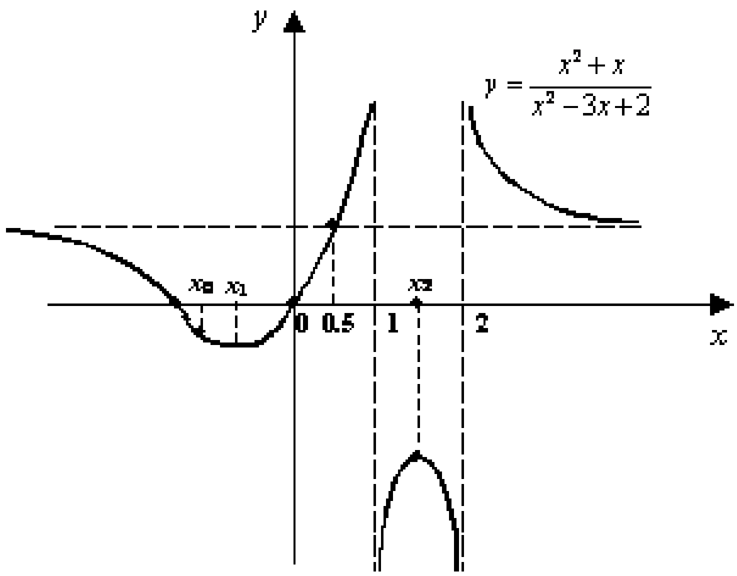
Числитель $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ целых корней не имеет. Вычисляя его значения в некоторых целых точках, например:

$$g(-2) = -25\,; \quad g(-1) = -1\,; \quad g(0) = 5\,; \quad g(1) = 5\,; \quad g(2) = 11\,,$$

убеждаемся, что уравнение имеет только один корень x_0, лежащий на интервале (–1;0), причем ближе к точке –1, чем к 0. (Действительно, если применить какой-либо из методов приближенного нахождения корней алгебраического уравнения, мы получим, что $x_0 \approx -0{,}919$).

x	$(-\infty;x_0)$	x_0	$(x_0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;\infty)$
y''	< 0	0	> 0	∞	< 0	∞	> 0
y	Выпукла	Перегиб	Вогнута	–	Выпукла	–	Вогнута

8. С учетом предыдущих пунктов строим график функции $y = f(x)$.



Глядя на график, замечаем, что для полноты картины хорошо бы найти ту точку, где график пересекается с горизонтальной асимптотой $y = 1$. Для этого решим уравнение $\frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = 1$.

Его решением служит число $x = 0{,}5$. Отметим эту точку на оси Ox. Теперь наш чертеж отмечает все особенности графика.

Пример 2. Провести полное исследование функции $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ и построить ее график.

Решение:

1. Ясно, что $D(f) = R$, поскольку оба сомножителя в выражении $f(x)$ определены при любом x.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной; не является она и периодической.

3. Область определения не имеет граничных точек, значит, нет и вертикальных асимптот графика.

4. Будем искать наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.

При $x \to +\infty$ имеем $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2)e^x = +\infty$, т. е. при $x \to +\infty$ асимптоты нет, причем функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ имеем

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-2x)e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

(для раскрытия неопределенности мы применили правило Лопиталя).

Теперь найдем значение b:

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{e^{-x}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

(здесь мы применили правило Лопиталя два раза подряд).

Таким образом, $k = 0$; $b = 0$, так что при $x \to -\infty$ асимптота имеет уравнение $y = 0$, т. е. совпадает с осью Ox.

5. Найдем точки пересечения с осью Ox, решая уравнение $(x^2-2x)e^x = 0$. Поскольку $e^x \neq 0$, получаем два корня: $x = 0$ и $x = 2$.

x	$(-\infty;0)$	(0; 2)	$(2,\infty)$
y	>0	<0	>0

6. Вычислим производную:

$$f'(x) = (x^2-2x)e^x + (2x-2)e^x = (x^2-2)e^x.$$

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},\infty)$
y'	>0	0	<0	0	>0
y	$\uparrow$	max	$\downarrow$	min	$\uparrow$

$$f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1{,}17;$$

$$f_{\max} = f(\sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -3{,}41.$$

7. Найдем точки перегиба. Для этого найдем вторую производную:

$$f''(x) = (x^2-2)e^x + 2xe^x = f(x) = (x^2+2x-2)e^x.$$

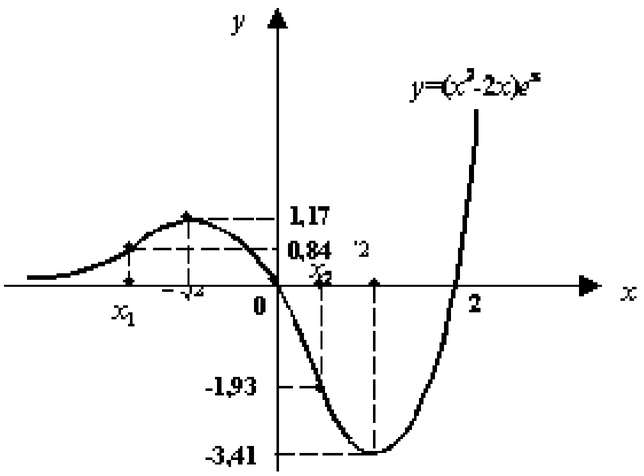
Решим неравенство $f''(x) > 0$. Поскольку $e^x \neq 0$, то $x^2+2x-2>0$. Решением этого квадратного неравенства служит объединение двух интервалов $(-\infty;-1-\sqrt{3}) \approx (-\infty;-2{,}7)$ и $(-1+\sqrt{3};+\infty) \approx (0{,}7;+\infty)$.

x	$(-\infty;-2{,}7)$	–2,7	(–2,7;0,7)	0,7	$(0{,}7,\infty)$
y''	>0	0	<0	0	>0
y	Вогнута	Перегиб	Выпукла	Перегиб	Вогнута

$$f\ (x_1) = f(-2{,}7) = (6+4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}} \approx 0{,}84;$$

$$f\ (x_2) = f(0{,}7) = (6-4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}} \approx -1{,}93.$$

7. Построим окончательный чертеж:



Пример 3. Провести полное исследование функции $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения функции $D(f) = R$.

2. Функция ни четная, ни нечетная. Очевидно также, что она не периодична.

3. График пересекает ось Ox в точках $x = 0$, $x = -1$.

4. Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$ $(x \neq -1)$.

5. Асимптот нет, т. к.

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{(x+1)^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{(x+1)^2} = -\infty.$$

6. Найдем производную: $f'(x) = \dfrac{5\left(x + \dfrac{3}{5}\right)}{3\sqrt[3]{x+1}}$.

Точки, подозрительные на экстремум:

а) точки, в которых $f'(x) = 0$, т. е. $x_1 = -\dfrac{3}{5}$,

б) точки, в которых производная обращается в бесконечность, т. е. $x_2 = -1$.

x	$(-\infty\,;\,-1)$	–1	$(-1;-\frac{3}{5})$	$\frac{3}{5}$	$(-\frac{3}{5};\,\infty)$
y'	>0	∞	<0	0	>0
y	↑	Острый max	↓	min	↑

Значение функции в экстремальных точках равно

$$f_{\min} = f\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{20} \approx -0{,}3, \qquad f_{\max} = f(-1) = 0.$$

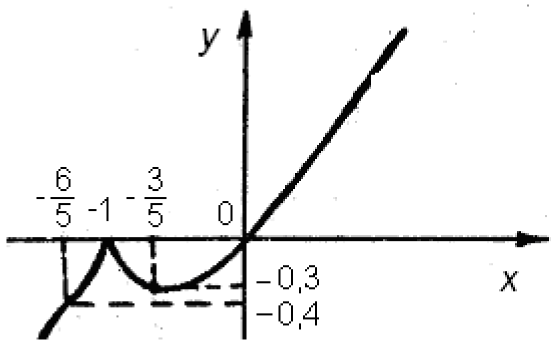
7. Найдем вторую производную: $f''(x) = \dfrac{10\left(x + \dfrac{6}{5}\right)}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}}$.

Критические точки $x_3 = -\dfrac{6}{5}$ и $x_2 = -1$.

x	$\left(-\infty;\,-\frac{6}{5}\right)$	$-\frac{6}{5}$	$\left(-\frac{6}{5};\,-1\right)$	–1	$(-1;\,\infty)$
y''	<0	0	>0	∞	>0
y	Выпукла	Перегиб	Вогнута	–	Вогнута

$$f_{\text{пер}} = f(-\frac{6}{5}) = -\frac{6}{25}\sqrt[3]{5} \approx -0{,}4.$$

8. С учетом предыдущих пунктов строим график функции $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.



П р и м е р 4. Провести полное исследование функции $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ и построить ее график.

Решение:

1. Ясно, что $D(f)$: $x \in (-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной; не является она и периодической.

3. Область определения имеет граничную точку, значит, есть вертикальная асимптота графика $x = 0$:

$$\lim_{x \to +0} \frac{(x-2)}{e^{\frac{1}{x}}} = 0; \qquad \lim_{x \to -0} \frac{(x-2)}{e^{\frac{1}{x}}} = -\infty.$$

4. Будем искать наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-2)}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^0 = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 2 - xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = -3.$$

Таким образом, $k = 1$ и $b = -3$, так что при $x \to \pm\infty$ асимптота имеет уравнение $y = x - 3$.

5. Найдем точки пересечения с осью Ox, решая уравнение $(x-2)e^{-\frac{1}{x}} = 0$, откуда получаем корень $x = 2$. С учетом точки разрыва, имеем три интервала знакопостоянства функции:

x	$(-\infty; 0)$	$(0;\ 2)$	$(2, \infty)$
y	< 0	< 0	> 0

6. Вычислим производную:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2}\right).$$

Найдем точки, подозрительные на экстремум:

а) точки, в которых $f'(x) = 0$, т. е. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$;

б) точки, в которых производная обращается в бесконечность, т. е. $x_3 = 0$.

x	$(-\infty; -2)$	–2	$(-2;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	> 0	0	< 0	∞	< 0	0	> 0
y	$\uparrow$	max	$\downarrow$		$\downarrow$	min	$\uparrow$

$f_{\max} = f(-2) = -4\sqrt{e} \approx -6{,}62$;

$f_{\min} = f(1) = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}37$.

7. Найдем точки перегиба. Для этого найдем вторую производную:

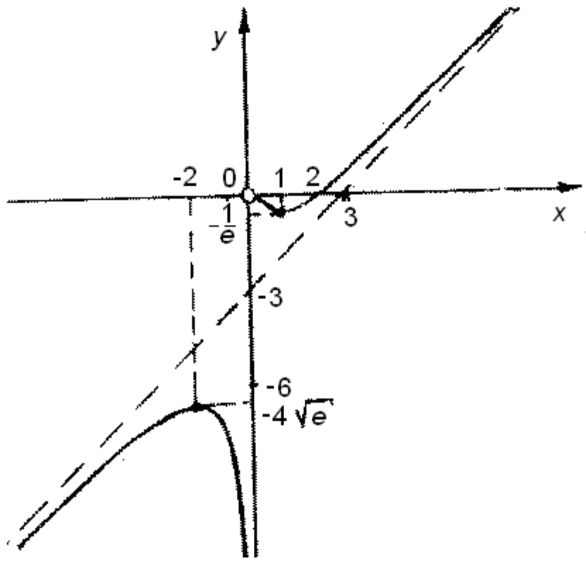
$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{5x - 2}{x^4}\right).$$

Критическими точками являются точки $x_3 = 0$ и $x_4 = \dfrac{2}{5}$.

x	$(-\infty; 0)$	0	(0;0,4)	0,4	$(0{,}4;\infty)$
y''	<0	∞	<0	0	>0
y	Выпукла	–	Выпукла	Перегиб	Вогнута

$f_{\text{перегиб}} = f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0{,}15.$

8. Построим окончательный чертеж.



П р и м е р 5. Провести полное исследование функции $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения функции $D(f)$: $x \in (0,+\infty)$.

2. Функция ни четная, ни нечетная. Очевидно также, что она не периодична.

3. График пересекает ось Ox в точках $\ln x = 0$, т. е. $x = 1$. Пересечения графика с осью Oy не существует.

4. Вертикальная асимптота $x = 0$: $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x\sqrt{x}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Полученная прямая $y = 0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой графика функции.

5. Найдем производную: $f'(x) = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{2}}}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$.

Найдем точки, подозрительные на экстремум:

а) точки, в которых $f'(x) = 0$, т. е. $x_1 = e^2$;

б) точки, в которых производная обращается в бесконечность, т. е. $x_2 = 0$.

x	$(0;\, e^2)$	e^2	$(e^2;+\infty)$
y'	> 0	0	< 0
y	$\uparrow$	max	$\downarrow$

Значение функции в экстремальных точках равно $f_{\max} = f(e^2) \approx 0{,}74$.

6. Найдем вторую производную:

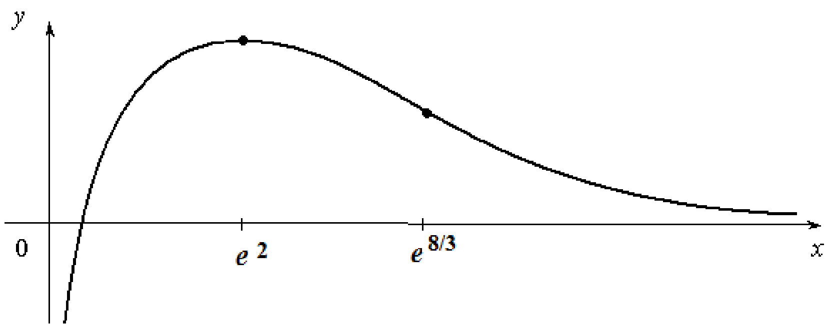
$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} 2x^{\frac{3}{2}} - (2 - \ln x) 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}{4x^3} = \frac{\sqrt{x}(3\ln x - 8)}{4x^3}.$$

Критические точки $x_3 = e^{\frac{8}{3}}$ и $x_2 = 0$.

x	$(0;\, e^{\frac{8}{3}})$	$e^{\frac{8}{3}}$	$(e^{\frac{8}{3}};+\infty)$
y''	< 0	0	> 0
y	Выпукла	Перегиб	Вогнута

$$f_{\text{пер}} = f(e^{\frac{8}{3}}) = f(14{,}4) \approx 0{,}7.$$

7. С учетом предыдущих пунктов строим график функции $y = f(x)$.



Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–10 найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегибы следующих функций:

1. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. 2. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

3. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$. 4. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$. 5. $y = e^{-x^2}$.

6. $y = x \cdot e^{-x^2}$. 7. $y = x^2 \ln x$. 8. $y = \operatorname{arctg} x - x$.

9. $y = \dfrac{x^3}{x-2}$. 10. $y = \sqrt[3]{x^3 - 12x}$.

В задачах 11–22 найти асимптоты графиков следующих функций:

11. $y = \dfrac{2-x^2}{x+3}$. 12. $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 1}{1-x}$. 13. $y = \dfrac{x^3+1}{x^2-4}$.

14. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-3}$. 15. $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$. 16. $y = \dfrac{x^2}{(x+3)^2}$.

17. $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 18. $y = x + \ln x$. 19. $y = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

20. $y = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$. 21. $y = x \operatorname{arctg} x$. 22. $y = \operatorname{arctg} x$.

В задачах 23–37 исследовать функции и построить их графики:

23. $y = 3x(1-x^2)$. 24. $y = x^2(x-3)$. 25. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

26. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. 27. $y = \dfrac{x-2}{x^2}$. 28. $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

29. $y = x \cdot e^{-x^2}$. 30. $y = x^2 \cdot e^{-x}$. 31. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

32. $y = x \cdot e^{-x}$. 33. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 34. $y = x - 2\ln x$.

35. $y = (x-5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$. 36. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$. 37. $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$.

Ответы:

1) $\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right)$ – интервал выпуклости, $\left(\frac{5}{3};\ +\infty\right)$ – интервал вогнутости, $M\left(\frac{5}{3};\ -\frac{250}{27}\right)$ – точка перегиба;

2) $(-\infty;\ 1)$ – интервал выпуклости, $(1;\ +\infty)$ – интервал вогнутости, $M\,(1;\ -1)$ – точка перегиба;

3) $(-\infty;\ -\sqrt{3}),\ (0;\ \sqrt{3})$ – интервалы выпуклости, $(-\sqrt{3};\ 0),\ (\sqrt{3};\ +\infty)$ – интервалы вогнутости, $M\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ O(0;\ 0),\ N\left(\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ – точки перегиба;

4) $(-\infty;\ 2)$ – интервал выпуклости, $(2;\ +\infty)$ – интервал вогнутости, точек перегиба нет;

5) $\left(-\infty;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right)$ – интервалы вогнутости, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – интервал выпуклости, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right),\ N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба;

6) $\left(-\infty;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(0;\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ – интервалы выпуклости, $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\ 0\right),\ \left(\frac{\sqrt{6}}{2};\ +\infty\right)$ – интервалы вогнутости, $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $O(0;\ 0),\ N\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$ – точки перегиба;

7) $\left(0;\ e^{-\frac{3}{2}}\right)$ – интервал выпуклости, $\left(e^{-\frac{3}{2}};\ +\infty\right)$ – интервал вогнутости, $M\left(e^{-\frac{3}{2}};\ -\frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$ – точка перегиба;

8) $(-\infty;\ 0)$ – интервал вогнутости, $(0;\ +\infty)$ – интервал выпуклости, $O(0;\ 0)$ – точка перегиба;

9) $(-\infty;0),(2;+\infty)$ – интервалы вогнутости, $(0;2)$ – интервал выпуклости, $O(0;0)$ – точка перегиба;

10) $(-\infty;-\sqrt{3}),(0;\sqrt{3})$ – интервалы вогнутости, $(-\sqrt{3};0),(\sqrt{3};+\infty)$ – интервалы выпуклости, $M(-\sqrt{3};0), O(0;0), N(\sqrt{3};0)$ – точки перегиба;

11) $x=-3;\ y=3-x$; 12) $x=1;\ y=-5x-7$;

13) $x=-2;\ x=2;\ y=x$; 14) $x=3;\ y=x+5$;

15) $x=-1;\ x=1;\ y=-1$; 16) $x=-3;\ y=1$;

17) $x=-1$ при $x\to-1+0;\ y=0$ при $x\to+\infty$;

18) $x=0$ при $x\to+0$; 19) $x=0$ при $x\to-0$; 20) $x=0;\ y=x$;

21) $y=-\frac{\pi}{2}\cdot x-1$ при $x\to-\infty;\ y=\frac{\pi}{2}\cdot x-1$ при $x\to+\infty$;

22) $y=-\frac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty;\ y=\frac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$;

23) $D(y)=(-\infty;+\infty)$, асимптот нет; $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$ – интервалы убывания; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ – интервал возрастания; $y_{\min}=y\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y_{\max}=y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $(-\infty;0)$ – интервал вогнутости, $(0;+\infty)$ – интервал выпуклости, $O(0;0)$ – точка перегиба;

24) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, асимптот нет; $(-\infty;0),(2;+\infty)$ – интервалы возрастания; $(0;2)$ – интервал убывания; $y_{\min}=y(2)=-4, y_{\max}=y(0)=0$; $(-\infty;1)$ – интервал выпуклости, $(1;+\infty)$ – интервал вогнутости, $M(1;-2)$ – точка перегиба;

25) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; $x=2, y=x+2$ – асимптоты; $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$ – интервалы возрастания; $(0;2),(2;4)$ – интервал убывания; $y_{\min}=y(4)=8, y_{\max}=y(0)=0$; $(-\infty;2)$ – интервал выпуклости, $(2;+\infty)$ – интервал вогнутости, точек перегиба нет;

26) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$; $x=-1, x=1, y=1-$ асимптоты; $(-\infty;-1),(-1;0)$ – интервалы возрастания; $(0;1),(1;+\infty)$ – интервал убывания; $y_{\max}=y(0)=0$; $(-1;1)$ – интервал выпуклости, $(-\infty;-1),(1;+\infty)$ – интервал вогнутости, точек перегиба нет;

27) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; $x=0, y=0$ – асимптоты; $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$ – интервалы убывания, $(0;4)$ – интервал возрастания;

$y_{\max} = y(4) = \frac{1}{8}$; $(-\infty;0),(0;6)$ – интервал выпуклости, $(6;+\infty)$ – интервал вогнутости, $M\left(6;\frac{1}{9}\right)$ – точка перегиба;

28) $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$; $x = 1$, $y = x + 2$ асимптоты; $(-\infty;1)$, $(3;+\infty)$ – интервалы возрастания; $(1;3)$ – интервал убывания; $y_{\min} = y(3) = \frac{27}{4}$; $(-\infty;0)$ – интервал выпуклости, $(0;1) \cup (1;+\infty)$ – интервал вогнутости, $O(0;0)$ – точка перегиба;

29) $D(y) = (-\infty;+\infty)$; $y = 0$ – асимптота; $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ – интервалы убывания; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – интервал возрастания; $y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2e}}{2e}$, $y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2e}$; $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(0;\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ – интервал выпуклости; $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};0\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$ – интервал вогнутости; $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right), O(0;0), N\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ – точки перегиба;

30) $D(y) = (-\infty;+\infty)$; $y = 0$ – асимптота при $x \to -\infty$; $(-\infty;0),(2;+\infty)$ – интервалы убывания; $(0;2)$ – интервал возрастания; $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^2}$; $\left(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$ – интервал выпуклости; $\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right),\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$ – интервал вогнутости; $M\left(2-\sqrt{2};\left(6-4\sqrt{2}\right)\cdot e^{\sqrt{2}-2}\right), N\left(2+\sqrt{2};\left(6+4\sqrt{2}\right)\cdot e^{-\sqrt{2}-2}\right)$ – точки перегиба;

31) $D(y) = (-\infty;+\infty)$; $y = 0$ – асимптота; $(0;+\infty)$ – интервалы убывания; $(-\infty;0)$ – интервал возрастания; $y_{\max} = y(0) = 1$; $(-1;1)$ – интервал выпуклости; $(-\infty;-1),(1;+\infty)$ – интервал вогнутости; $M\left(-1;e^{-\frac{1}{2}}\right), N\left(1;e^{-\frac{1}{2}}\right)$ – точки перегиба;

32) $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $y=0$ – асимптота при $x\to+\infty$, $(1;+\infty)$ – интервалы убывания; $(-\infty;1)$ – интервал возрастания; $(-\infty;2)$ – интервал выпуклости; $(2;+\infty)$ – интервал вогнутости; $M\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$ – точка перегиба;

33) $D(y)=(0;+\infty)$; $x=0$, $y=0$ – асимптота; $\left(e^2;+\infty\right)$ – интервалы убывания; $\left(0;e^2\right)$ – интервал возрастания; $y_{\max}=y\left(e^2\right)=\frac{2}{e}$; $\left(0;e^{\frac{8}{3}}\right)$ – интервал выпуклости; $\left(e^{\frac{8}{3}};+\infty\right)$ – интервал вогнутости; М$\left(e^{\frac{8}{3}};\frac{8}{3}\cdot e^{\frac{-4}{3}}\right)$ – точка перегиба;

34) $D(y)=(0;+\infty)$; $x=0$ – асимптота; $(0;2)$ – интервалы убывания; $(2;+\infty)$ – интервал возрастания; $y_{\min}=y(2)=2-\ln 4$; $(0;+\infty)$ – интервал вогнутости; точек перегиба нет;

35) $D(y)=(-\infty;+\infty)$; асимптот нет; $(0;2)$ – интервалы убывания; $(-\infty;0),(2;+\infty)$ – интервал возрастания; $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(2)=-3\sqrt[3]{4}$; $(-\infty;-1)$ – интервал выпуклости; $(-1;+\infty)$ – интервал вогнутости; $M(-1;-6)$ – точка перегиба;

36) $D(y)=(-\infty;+\infty)$, $y=x-\frac{1}{3}$ – асимптота; $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ – интервалы убывания; $(-\infty;0),\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ – интервал возрастания; $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $(1;+\infty)$ – интервал выпуклости; $(-\infty;1)$ – интервал вогнутости; $M(1;0)$ – точка перегиба;

37) $D(y)=(0;+\infty)$, $x=0$ – асимптота; $(0;1)$ – интервалы убывания; $(1;+\infty)$ – интервал возрастания; $y_{\min}=y(1)=\frac{1}{2}$; $(0;+\infty)$ – интервал вогнутости; точек перегиба нет.

Задания

Выполните задания 29–34 из прил. 1.

Глава 4. Приложение дифференциального исчисления к геометрии

9. Вектор-функция скалярного аргумента

9.1. Определение вектор-функции

Кривые и поверхности удобно задавать функциями, принимающими векторные значения, или вектор-функциями. Кратко сформулируем основные понятия анализа применительно к вектор-функциям.

Пусть E_3 – трехмерное евклидово пространство и I – некоторый числовой промежуток.

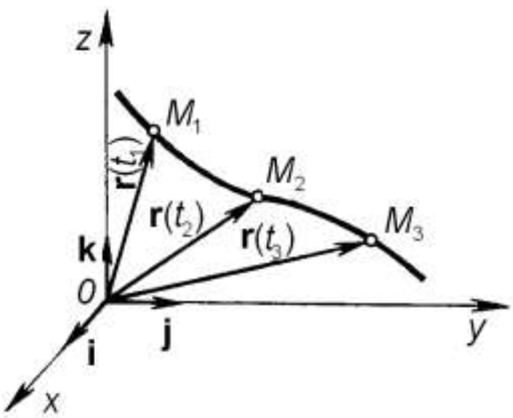
Определение 1. Если каждому числу $t \in I$ по некоторому закону поставлен в соответствие определенный вектор $\bar{r}(t)$ из пространства E_3, то говорят, что в промежутке I задана векторная функция скалярного аргумента или вектор-функция

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}.$$

Здесь $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – некоторые непрерывные скалярные функции.

Вектор $\bar{r}(t)$ может изменяться как по величине, так и по направлению. Выберем общую точку приложения O векторов $\bar{r}(t)$. При непрерывном изменении аргумента t конец вектора $\bar{r}(t)$ описывает некоторую линию L.

Определение 2. Линия L, описываемая в пространстве концом вектора $\bar{r}(t)$ при непрерывном изменении аргумента $t \in I$, называется годографом вектор-функции скалярного аргумента $t \in I$.



С физической точки зрения годограф радиус-вектора $\bar{r}(t)$ можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве точки, а всякую линию L в пространстве – как годограф некоторой вектор-функции.

Пример. Найти частные значения вектор-функции $\bar{r}(t) = 4\cos t\,\bar{i} + 3\sin t\,\bar{j} + 2\,\bar{k},\ \ t \in [0, 2\pi]$ при $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$ и изобразить ее годограф.

Решение:

Координатами вектора $\bar{r}(t)$ является числовые функции $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 3\sin t$, $z(t) = 2$.

При $t_1 = 0$ имеем $x(0) = 4$, $y(0) = 0,\ z(0) = 2$.

Следовательно, $\bar{r}(0) = 4\,\bar{i} + 2\,\bar{k}$.

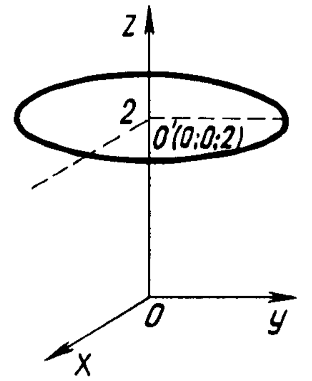
Аналогично находим частное значение вектор-функции при $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\bar{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{4}\,\bar{i} + 3\sin\frac{\pi}{4}\,\bar{j} + 2\,\bar{k} = 2\sqrt{2}\,\bar{i} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\bar{j} + 2\,\bar{k}.$$

Годографом данной вектор-функции является кривая, параметрическое уравнение которой $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = 2\,\bar{k}, \end{cases}$ Получим ее явное выражение, для чего исключим из первых двух уравнений параметр t: $\begin{cases} \cos t = \dfrac{x}{4}, \\ \sin t = \dfrac{y}{3}. \end{cases}$ Тогда по основному тригонометрическому тождеству $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, и уравнения годографа в декартовых координатах имеют вид

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z = 2.$$

Эти уравнения определяют эллипс с полуосями $a = 4,\ b = 3$, расположенные в плоскости $z = 2$.



9.2. Дифференцирование вектор-функции

Вектор-функция $\bar{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда все три ее компоненты – скалярные функции $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывны в точке t_0. Сумма, разность, скалярное и векторное произведения непрерывных вектор-функций непрерывны.

Определение 1. Векторная функция $\bar{r}(t)$ имеет в точке t производную, если существует предел отношения $\frac{\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$.

Обозначается производная через $\frac{d\bar{r}}{dt}$, или $\bar{r}'(t)$.

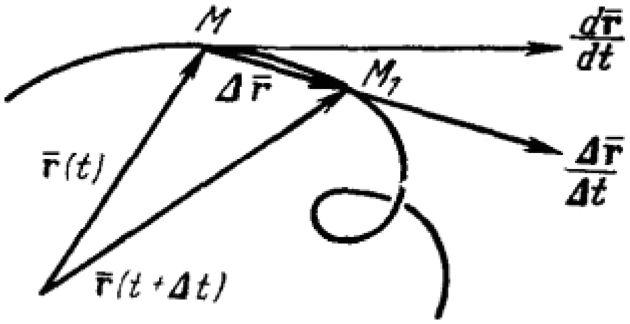
Таким образом, $\bar{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \overline{r(t)}}{\Delta t}$.

Легко проверить, что существование $\bar{r}'(t)$ равносильно существованию трех производных $x'(t)$, $y'(t)$ *и* $z'(t)$, причем

$$\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}.$$

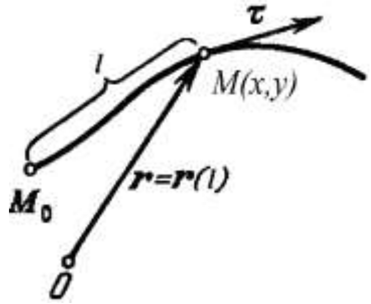
Определение 2. Векторная функция $\bar{r}(t)$ называется дифференцируемой на множестве или простой дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Вектор $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ направлен по секущей MM_1 годографа функции $\bar{r}(t)$, а направление вектора $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ – это направление предельной прямой, к которой стремится эта секущая, когда точка M_1 приближается к M, т. е. направление касательной к годографу в точке M.



Отсюда следует, что вектор $\bar{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t}$ совпадает по направлению с касательной к годографу в точке M и направлен в сторону возрастания *t*.

Итак, с геометрической точки зрения, производная вектор-функции в точке M есть вектор $\bar{r}'(t)$, направленный по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания *t*.



Очевидно, что если в качестве параметра t вдоль кривой взять длину ее дуги l, отсчитываемую от некоторой точки M_0 этой линии, т. е. положить $\bar{r} = \bar{r}(l)$, то тогда

$$\frac{d\bar{r}}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta l}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta l} = 1$ как предел бесконечно малой дуги и стягивающей ее хорды.

Таким образом, производная $\frac{d\bar{r}}{dl}$ дает единичный вектор, направленный по касательной к кривой. Будем называть его *единичным вектором касательной* к линии в точке M и обозначать через $\bar{\tau}$, т.е.

$$\frac{d\bar{r}}{dl}=\bar{\tau}, \quad \text{или} \quad \bar{r}'(l)=\bar{\tau}, \text{ причем } |\bar{\tau}|=1.$$

Для вектор-функции имеют место следующие правила дифференцирования:

1) если $\bar{r}(t)=\text{const}$, то $\bar{r}'(t)=0$;

2) $\left(k\bar{r}(t)\right)'=k\bar{r}'(t)$, где $k=\text{const}$;

3) $(u(t)\bar{r}(t))'=u'(t)\bar{r}(t)+u(t)\bar{r}'(t)$, где $u(t)$ – скалярная функция;

4) $(\bar{r}_1(t)\pm\bar{r}_2(t))'=\bar{r}_1'(t)\pm\bar{r}_2'(t)$;

5) $(\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2(t))'=(\bar{r}_1'(t)\cdot\bar{r}_2(t))+(\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2'(t))$ – для скалярного произведения;

6) $\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right]'=\left[\bar{r}_1'(t),\bar{r}_2(t)\right]+\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2'(t)\right]$ – для векторного произведения;

7) если $\bar{r}=\bar{r}(t)$ и $t=t(\tau)$, то $\dfrac{d\bar{r}}{d\tau}=\dfrac{d\bar{r}}{dt}\dfrac{dt}{d\tau}$ – правило дифференцирования сложной функции.

Пример. Задана векторная функция $\bar{r}(t)=(a\cos t)\bar{i}+(a\sin t)\bar{j}+(bt)\bar{k}$, где a, b – const. Найти $\bar{r}'(t)$.

Решение:

Координатами вектора $\bar{r}(t)$ являются числовые функции

$$x(t)=a\cos t,\ y(t)=a\sin t,\ z(t)=bt.$$

Тогда $\bar{r}'(t)=-(a\sin t)\bar{i}+(a\cos t)\bar{j}+b\bar{k}$.

Отметим следующие частные случаи дифференцирования вектор-функции:

а) производная вектора постоянного направления.

Пусть вектор $\bar{r}(t)$ имеет постоянное направление (т. е. от t зависит лишь его длина). Тогда векторы $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}'(t)$ *коллинеарны*.

Действительно, в этом случае $\bar{r}(t)$ можно записать в виде $\bar{r}(t)=u(t)\cdot\bar{e}$, где $u(t)$ – скаляр, а $\bar{e}$ – постоянный вектор, например, единичный. Тогда $\bar{r}'(t)=u'(t)\cdot\bar{e}$, т. е.

$$\bar{r}'(t)=\frac{u'(t)}{u(t)}\bar{r}(t);$$

б) производная вектора постоянной длины.

Если $|\ \bar{r}(t)\ |$ = const, то векторы $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}'(t)$ взаимно ортогональны. Действительно, в этом случае $(\bar{r}(t)\cdot\bar{r}'(t))$ = const; дифференцируя это равенство, получаем $2(\overline{r}(t), \overline{r}'(t)) = 0$, т. е. $(\overline{r}(t) \cdot \overline{r}'(t)) = 0$, что и требовалось доказать.

Определение 3. Дифференциалом вектор-функции $\overline{r}(t)$ называется вектор $d\overline{r} = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k}$.

Иначе говоря, $d\overline{r} = x'(t)dt \cdot \overline{i} + y'(t)dt \cdot \overline{j} + z'(t)dt \cdot \overline{k} = \overline{r}'(t)dt$.

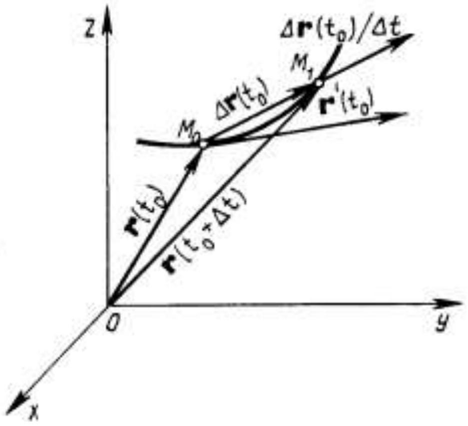
Дифференциал вектор-функции равен произведению ее производной на дифференциал (т. е. приращение) независимой переменной. Как и в случае скалярной функции, дифференциал $d\overline{r}$ вектор-функции отличается от ее приращения $\Delta\overline{r}$ на величину выше первого порядка малости относительно Δt.

9.3. Механический смысл производной вектор-функции

Выясним механический смысл производной вектор-функции.

Предположим, что материальная точка движется по траектории, являющейся годографом вектор-функции $\overline{r}(t)$, где роль параметра t играет время движения.

За промежуток времени Δt точка на кривой переместится из положения M_0 в положение M. Вектор $\Delta\overline{r}(t_0)$ задает перемещение материальной точки за время Δt.



Отношение $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ есть средняя скорость перемещения точки за время Δt. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим мгновенную скорость V точки в момент времени t_0:

$$V = \overline{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta r(t_0)}}{\Delta t} = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k}.$$

Таким образом, *механический смысл производной от вектор-функции состоит в том, что $\bar{r}'(t_0)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции.*

Производная вектор-функции $\bar{r}'(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и ее также можно продифференцировать.

Вектор $\bar{a}(t_0)$, равный производной скорости $V(t)$ по времени t в момент t_0, называется *ускорением*:

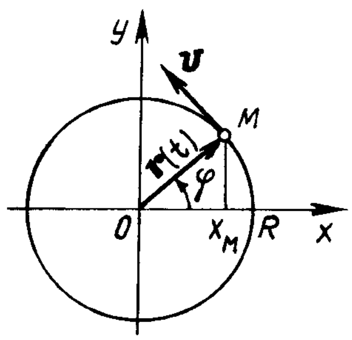
$$\bar{a}(t_0) = \overline{V}'(t_0) = \bar{r}''(t_0).$$

Механический смысл второй производной от вектор-функции состоит в том, что $\bar{r}''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени t_0.

Пример 1. Найти скорость и ускорение материальной точки *М*, движущейся с постоянной скоростью ω по окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение:

Пусть *М* – произвольная точка окружности. Обозначим через φ угол между радиус-вектором точки *М* и положительным направлением оси *Ox*.



По условию $\varphi = \omega t$, где t – время движения. Выразим координаты точки *М* как функции времени:

$$x = R\cos\varphi = R\cos\omega t,\ y = R\sin\varphi = R\sin\omega t.$$

Следовательно, радиус-вектор точки *М*:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} = R\cos\omega t\bar{i} + R\sin\omega t\bar{j}.$$

Скорость движения точки *М*:

$$\overline{V} = \overline{r}'(t) = -R\omega\sin\omega t\,\overline{i} + R\omega\cos\omega t\,\overline{j},$$

а модуль ее скорости

$$|V| = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2} = \omega R.$$

Для определения направления скорости движения найдем скалярное произведение векторов $\overline{V}$ и $\overline{r}$:

$\overline{V}\,\overline{r} = -R^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + R^2\omega\cos\omega t\sin\omega t = 0.$

Таким образом, вектора $\overline{V}$ и $\overline{r}$ взаимно перпендикулярны, откуда следует, что вектор $\overline{V}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка *M*.

Найдем ускорение $\overline{a}(t)$:

$$\overline{a}(t_0) = \overline{V}'(t) = -R\omega^2\cos\omega t\,\overline{i} - R\omega^2\sin\omega t\,\overline{j} =$$
$$= -\omega^2\left(R\cos\omega t\,\overline{i} - R\sin\omega t\,\overline{j}\right) = -\omega^2\,\overline{r}(t).$$

Следовательно, вектора $\overline{r}$ и $\overline{a}$ имеют противоположные направления.

Таким образом, ускорение материальной точки, движущейся с постоянной скоростью по окружности, в каждый момент времени направлено к центру этой окружности.

Пример 2. Найти скорость и ускорение материальной точки, движущейся по закону $\overline{r}(t) = 2\cos t\,\overline{i} + 2\sin t\,\overline{j} + 3t\,\overline{k}$ в произвольный момент времени.

Решение:

По определению

$$\overline{V} = \overline{r}'(t) = -4\sin t\,\overline{i} + 3\cos t\,\overline{j} + 3\overline{k}, \quad \begin{cases} V_x = -2\sin t, \\ V_y = 2\cos t, \\ V_z = 3, \end{cases}$$

и

$$|V| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 9} = \sqrt{13},$$

т. е. скорость точки по модулю не изменяется в процессе движения.

Ускорение точки

$\overline{a}(t) = \overline{V}'(t) = -2\cos t\,\overline{i} - 2\sin t\,\overline{j}$, и $|a| = \sqrt{(-2\cos t)^2 + (2\sin t)^2} = 2$ при любом t.

10. Уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой

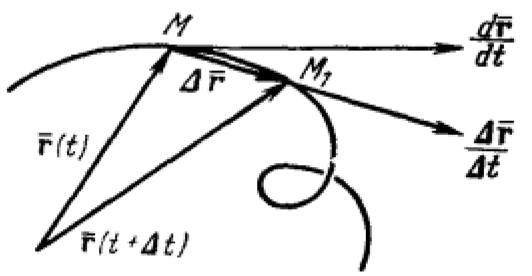
Пусть задана гладкая кривая γ, и ее уравнение имеет вид $\bar{r} = \bar{r}(t)$, или

$$\bar{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Определение 1. Система равенств $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ называется параметрическими уравнениями кривой γ.

Определение 2. Кривая γ называется регулярной (k-раз дифференцируемой), если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют непрерывные производные до порядка k включительно. При $k = 1$ кривая называется гладкой.

Возьмем на линии γ две точки M и M_1, соответствующие значениям параметра t и $t + \Delta t$.



Вектор $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$ является направляющим вектором секущей прямой MM_1. Следовательно, вектор $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ также направляющий вектор секущей MM_1. Когда $\Delta t \to 0$, точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, вектор $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ стремится занять положение касательной в точке M (касательная к кривой в точке определяется как предельное положение секущей).

Вместе с тем отношение $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ стремится к производной $\bar{r}'$ как к своему пределу. Отсюда следует, что производная от радиус-вектора точки параметрической кривой есть вектор, направленный по касательной к этой кривой в сторону возрастания параметра t.

Чтобы получить уравнение касательной к вектор-функции, выразим радиус-вектор $\overline{\rho} = \{X(t), Y(t), Z(t)\}$ любой точки касательной прямой через радиус-вектор $\overline{r}$ начальной точки, направляющий вектор $\overline{r}'$ и параметр λ.

Тогда $\overline{\rho} = \overline{r} + \lambda \overline{r}$ – уравнение касательной в параметрическом виде.

Заменяя это векторное уравнение скалярными функциями, получим параметрические уравнения касательной:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) + \lambda\, x'(t), \\ Y(t) = y(t) + \lambda\, y'(t), \\ Z(t) = z(t) + \lambda\, z'(t), \end{cases}$$

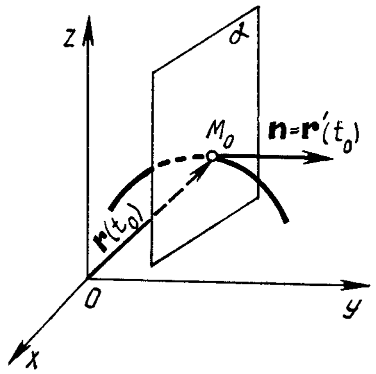
или, исключив параметр λ, *каноническое уравнение касательной*:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}.$$

Указанный способ определения касательной, очевидно, неприменим к той точке t_0, для которой $\overline{r}'(t_0) = 0$. Такие точки будем называть *особыми* точками кривой, и будем исключать их из рассмотрения.

Определение 3. Нормальной плоскостью к пространственной кривой называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка касания.



Уравнение плоскости, проходящей через эту точку, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\overline{n} = (A, B, C)$.

Из определения нормальной плоскости следует, что вектора $\overline{n} = (A, B, C)$ и $\overline{r}'(t_0)$ коллинеарны, поэтому можно положить $A = x'(t_0)$, $B = y'(t_0)$, $C = z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение нормальной плоскости будет иметь вид

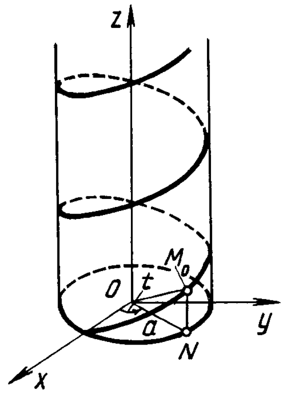
$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0 .$$

Пример. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к годографу L, заданному параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad t \in R,\ a = \text{const},\ \ b = \text{const}, \\ z = bt\ , \end{cases}$ в точке M_0, соответствующей параметру $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Замечание. Кривая, заданная по условию задачи, носит название *винтовой линии*. При любом t

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2 .$$

Это означает, что винтовая линия расположена на цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$. Отсюда следует, что если точка M движется по винтовой линии, ее проекция N на плоскости Oxy перемещается по окружности радиуса a с центром в начале координат, причем t является полярным углом точки N. При изменении параметра t от 0 до 2π точка N описывает полную окружность, а аппликата z точки M увеличивается на $h = 2\pi b$. Эта величина называется *шагом винтовой линии*.



Решение:

Определим координаты точки касания:

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}, \quad y_0 = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad z_0 = b\frac{\pi}{3}.$$

Найдем проекции вектора $\bar{r}'(t_0)$ на оси координат:

$$x'(t_0) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad y'(t_0) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}, \quad z'(t_0) = b.$$

Уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z - b\frac{\sqrt{3}}{2}}{b}.$$

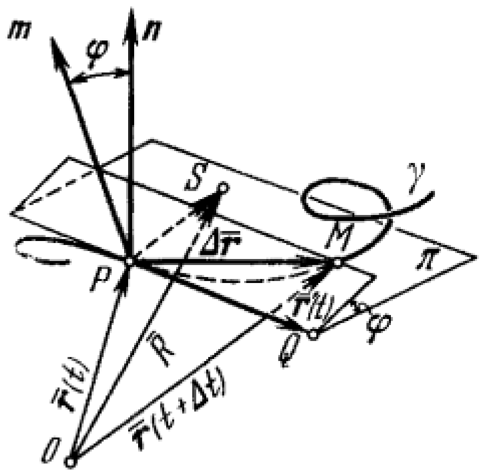
Уравнение нормальной плоскости:

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - b\left(z - b\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

11. Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой

Пусть PQ – касательная в точке P к кривой γ.

Через касательную PQ и точку М кривой проведем плоскость PQM. Плоскость π, к которой стремится плоскость PQM при $M \to P$, называется *соприкасающейся плоскостью* к кривой γ в точке P.



Справедливо следующая теорема.

Т е о р е м а. **Регулярная, дважды дифференцируемая кривая γ без особых точек имеет соприкасающуюся плоскость π в каждой точке, в которой векторы $\bar{r}'(t)$ и $\bar{r}''(t)$ не коллинеарны.**

Получим уравнение соприкасающейся плоскости в другой форме. Так как векторы $\bar{R} - \bar{r}(t)$, $\bar{r}'(t)$, $\bar{r}''(t)$ компланарны, то вектор $\bar{R}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(\bar{R} - \bar{r}(t)\right)\bar{r}'(t)\,\bar{r}''(t) = 0\,.$$

Если X, $У$, Z – координаты вектора $\bar{R}$ (координаты переменной точки s плоскости π), а $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты вектора $\bar{r}(t)$, то в координатной форме уравнение запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix} = 0\,.$$

Полученное уравнение, очевидно, представляет собой уравнение соприкасающейся плоскости.

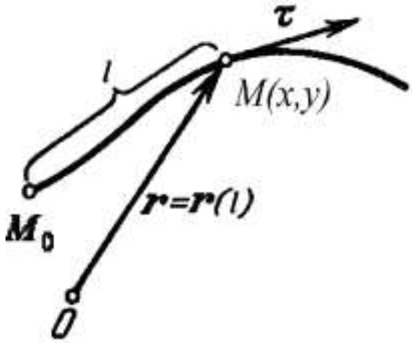
Замечание. Соприкасающаяся плоскость определена геометрически с помощью предельного перехода, и поэтому в случае ее существования она будет единственна. Отсюда и из доказанного в этом пункте утверждения вытекает, что если в данной точке кривой существует соприкасающаяся плоскость, то при любой параметризации кривой вектор $\bar{r}''(t)$ параллелен этой плоскости.

12. Кривизна и кручение кривой

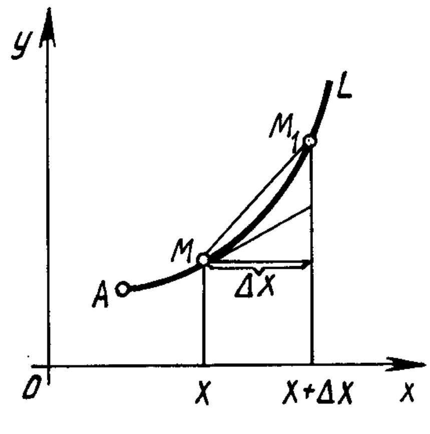
12.1. Дифференциал длины дуги

Выберем на гладкой кривой $\gamma: \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ некоторую точку M_0, соответствующую значению параметра $t = t_0$ и назовем ее начальной точкой.

Возьмем на гладкой кривой γ точку $M(x,y)$, которой соответствует значение t-параметра. Длина l дуги M_0M является функцией параметра t: $l = l(t)$.



Найдем дифференциал этой функции. Дадим параметру t приращение Δt (для определенности считаем, что $\Delta t > 0$), тогда переменные x и y получат соответственно приращения Δx и Δy, длина дуги $l(t)$ получит приращение Δl, а точка M перейдет в точку M_1.



Длина хорды MM_1 связана с Δx и Δy равенством $MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Разделим обе части этого равенства на Δt:

$$\frac{MM_1}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,.$$

Умножим и разделим левую часть этого равенства на длину Δl дуги $M\breve{M}_1$:

$$\frac{MM_1}{M\breve{M}_1} \cdot \frac{\Delta \breve{l}}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$. Так как при этом $M \to M_1$, то длина дуги $M\breve{M}_1 \to 0$, в силу сказанного выше $\dfrac{MM_1}{M\breve{M}_1} \to 1$.

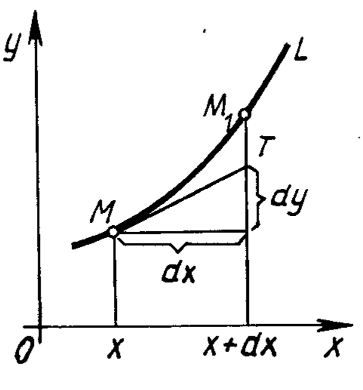
Таким образом, при $\Delta t \to 0$ получаем

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,,$$

откуда и следует равенство

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\,,$$

которое представляет собой искомое выражение для дифференциала дуги плоской кривой.



Как видно из последнего равенства, dl – длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами dx и dy, т. е. dl – длина отрезка MT с касательной к кривой в точке с абсциссой x, который соответствует интервалу $[x, x + \Delta x]$. Таким образом, за приближенное значение дуги MM_1 при достаточно малом Δx принимают дифференциал этой дуги, т. е. отрезок MT.

Итак, в случае параметрического задания плоской кривой дифференциал длины дуги есть

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt .$$

В случае явного задания кривой имеем

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

При параметрическом задании пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Это равенство можно переписать в следующем виде (для определенности полагаем $dt > 0$):

$$dl = \sqrt{[x'_t(t)]^2 + [y'_t(t)]^2 + [z'_t(t)]^2}\,dt .$$

Последнюю формулу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dl}{dt} = |r'(t)|.$$

Таким образом, модуль производной вектор-функции $\bar{r}'(t)$ равен производной от длины годографа по аргументу t.

Необходимо подчеркнуть, что модуль производной $|r'(t)|$ не равен производной от модуля $|\bar{r}(t)|'$. Особенно наглядно это видно на примере производной вектор-функции с постоянным модулем: в этом случае производная модуля вектор-функции как постоянного числа просто равна нулю, когда производная же самой вектор-функции есть вектор, к нему перпендикулярный.

Пример. Составить уравнение винтовой линии, если радиус основания цилиндра $a = 4$, шаг $h = 6\pi$, и найти дифференциал ее дуги.

Решение:

Уравнение искомой винтовой линии имеет вид $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 3t. \end{cases}$ Дифференцируя, имеем $\begin{cases} x' = -4\sin t, \\ y' = 4\cos t, \\ z' = 3. \end{cases}$

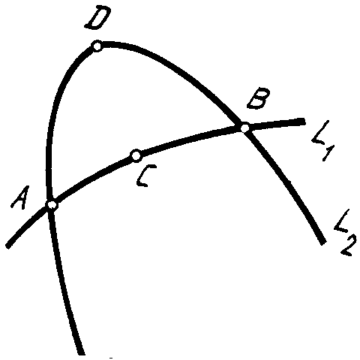
Следовательно, дифференциал дуги равен

$$dl = \sqrt{[x']^2 + [y']^2 + [z']^2}\,dt = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9}\,dt = 5dt.$$

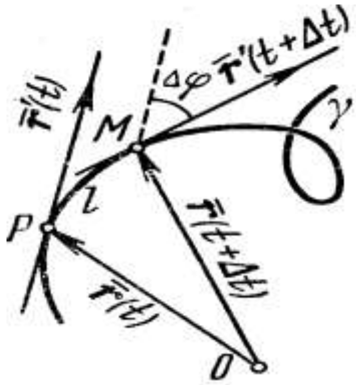
12.2. Кривизна кривой

Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости – кривизна.

Например, о двух плоских кривых $ACB \subset L_1$ и $ADB \subset L_2$ можно сказать, что кривая L_1 более изогнута, чем L_2.



Пусть P – произвольная фиксированная точка регулярной кривой γ без особых точек и M – точка этой кривой, отличная от P. При переходе по кривой из точки P в точку M касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется *углом смежности*.



Отношение угла смежности дуги к ее длине называется *средней кривизной дуги*:

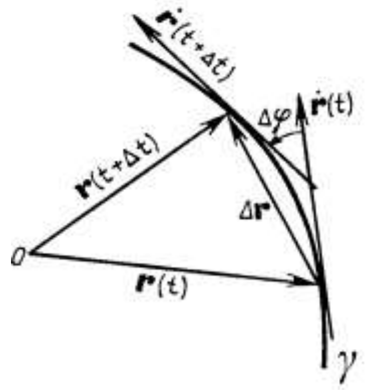
$$k_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

Средняя кривизна характеризует среднюю изогнутость кривой по всей дуге. На отдельных участках кривизна может значительно отличаться от средней. Чтобы избежать такой неопределенности, вводится количественная мера изогнутости кривой в точке P. Эта характеристика основана на том, что чем меньше дуга l, тем лучше средняя кривизна характеризует изогнутость кривой в точке P.

Определение. *Кривизной* k-кривой γ в точке P называется предел, к которому стремится средняя кривизна k_{cp} дуги PM при стремлении $M \to P$:

$$k = \lim_{M \to P} k_{\text{cp}} = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|.$$

Пусть кривая γ является годографом дважды дифференцируемой функции действительно аргумента $\vec{r}(t)$.



Кривизна кривой

$$k = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|.$$

Угол смежности $\Delta\varphi$ – угол между $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,'(t + \Delta t)$. Вектор $\vec{r}\,'(t + \Delta t) = \vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'$. Из векторного произведения векторов $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,'(t + \Delta t)$ находим

$$\sin \Delta\varphi = \frac{\left|\vec{r}\,', (\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,')\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|\left|\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'\right|} = \frac{\left|\vec{r}\,', \Delta\vec{r}\,'\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|\left|\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'\right|}.$$

Знаменатель в этом выражении не равен нулю. Поэтому при $\Delta t \to 0$ знаменатель стремится к $\left|\vec{r}\,'\right|\left|\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'\right| \to \left|\vec{r}\,'\right|^2$, а числитель – к нулю.

Будем теперь предполагать, что радиус-вектор $\vec{r}(t)$ кривой имеет вторую производную $\vec{r}\,''(t)$, и при этом условии докажем существование конечной кривизны в точке кривой.

Учтем, что при $\Delta t \to 0 \quad \Delta l \to 0$ и $\Delta\varphi \to 0$, а также $\Delta\varphi \sim \sin\Delta\varphi$.

Кривизна в точке равна

$$k = \left|\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right| = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta l}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\left[\vec{r}\,', \Delta\vec{r}\,'\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|\left|\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'\right|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\left[\vec{r}\,', \dfrac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t}\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|\left|\vec{r}\,'(t+\Delta t)\right|\left|\dfrac{\Delta l}{\Delta t}\right|}.$$

Если $\Delta t \to 0$, то $\vec{r}\,'(t+\Delta t) \to \vec{r}\,'(t)$ и $\Delta l \approx \Delta r$. Тогда

$$k = \frac{\left|\left[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)\right]\right|}{\left|\bar{r}'(t)\right|^3}.$$

Пример. Найти кривизну винтовой линии $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3t. \end{cases}$

Решение:

Найдем производные:

$$\bar{r}\,' = -2\sin t\,\bar{i} + 2\cos t\,\bar{j} + 3\bar{k}\,;\ \left|\bar{r}\,'\right| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 9} = \sqrt{13}\,;$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -2\cos t\,\bar{i} + 2\sin t\,\bar{j}.$$

Тогда $\left[\bar{r}\,', \bar{r}\,''\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2\sin t & 2\cos t & 3 \\ -2\cos t & -2\sin t & 0 \end{vmatrix} = 6\sin t\,\bar{i} - 6\cos t\,\bar{j} + 4\bar{k}$, и

$$\left|\left[\bar{r}\,', \bar{r}\,''\right]\right| = \sqrt{36\sin^2 t + 36\cos^2 t + 16} = \sqrt{52}.$$

Кривизна равна $\quad k = \dfrac{\left|\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]\right|}{\left|\bar{r}'\right|^3} = \sqrt{\dfrac{52}{13^3}} = \sqrt{\dfrac{4}{13^2}} = \dfrac{2}{13}.$

Таким образом, кривизна винтовой линии постоянна во всех ее точках.

12.3. Вычисление кривизны плоской кривой

Все сказанное выше для пространственной кривой справедливо и для плоской кривой.

Пусть плоская кривая задана уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где $t \in T$.

Тогда

$$\bar{r}' = \bar{x}'\bar{i} + \bar{y}'\bar{j}, \ \bar{r}'' = \bar{x}''\bar{i} + \bar{y}''\bar{j}, \ \left[\bar{r}', \bar{r}''\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = \left(x'y'' - x''y'\right)\bar{k},$$

и кривизна плоской кривой, заданной параметрически, определяется формулой

$$k = \frac{\left|\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]\right|}{\left|\bar{r}'\right|^3} = \frac{\left|x'y'' - x''y'\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если уравнение плоской линии задано в явном виде $y = f(x)$, то формулу для вычисления кривизны можно получить из последней формулы, положив в ней $t = x$.

Поэтому

$$k = \frac{\left|y''\right|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Последние формулы показывают, что только окружность (и прямая) имеют постоянную кривизну. Кривизна прямой линии равна нулю, что вполне согласуется с нашими непосредственными представлениями о неизогнутости прямой.

Только прямые имеют всюду равную нулю кривизну. Поэтому кривизна наглядно показывает, насколько (в данной точке) кривая отличается от прямой линии: чем ближе кривизна к нулю, тем это отличие меньше.

Если уравнение плоской линии задано в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то формула для вычисления кривизны имеет вид

$$k = \frac{\left|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''\right|}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

где $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\varphi}, \quad \rho'' = \dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}.$

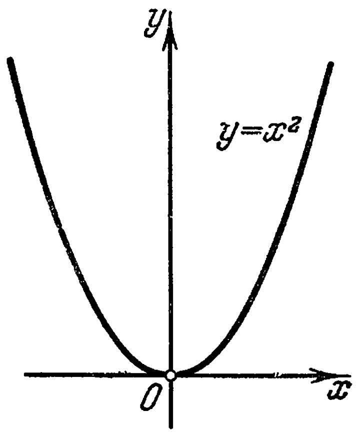
Пример. Найти кривизну параболы $y = x^2$. В какой ее точке кривизна будет наибольшая?

Решение:

$$k = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

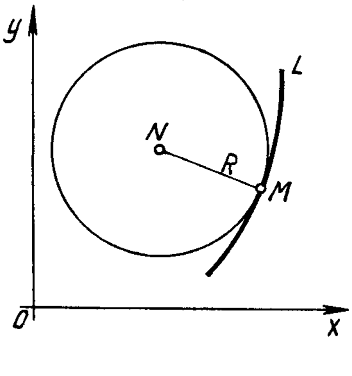
Эта величина будет наибольшей при наименьшем знаменателе, т. е. при $x = 0$, для которого, соответственно, $k = 2$.

Этот результат вполне соответствует геометрической картине, поскольку при $x = 0$ парабола искривлена более всего.



12.4. Радиус, круг и центр кривизны

Проведем к кривой γ нормаль в точке $M(x; y)$ и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MN = R$, по величине обратный кривизне k: $R = \frac{1}{k}$.



Отрезок MN называется *радиусом кривизны*, точка N – *центром кривизны*, а круг с центром в точке N радиуса R – *кругом кривизны* кривой в точке $M(x;y)$.

Если кривая γ задана в декартовой системе Oxy уравнением $y = f(x)$, то ее радиус кривизны равен

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Если кривая γ задана параметрически, то ее радиус кривизны определяется по формуле

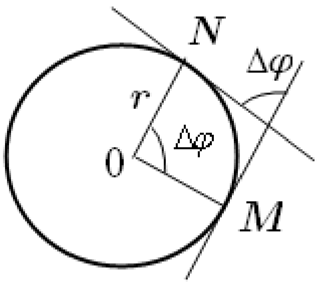
$$R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''x' - y'x''|}.$$

Если γ – годограф вектор-функции $\bar{r} = \bar{r}(t)$, то $R = \dfrac{|\bar{r}'|^3}{\left|\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]\right|}$.

Пример 1. Найти кривизну и радиус кривизны окружности радиуса r.

Решение:

Рассмотрим дугу $\breve{MN}$ этой окружности длиной Δl и обозначим угол смежности дуги $\breve{MN}$ через $\Delta\varphi$.



Центральный угол, опирающийся на дугу $\breve{MN}$, также равен $\Delta\varphi$, поэтому

$$\Delta l = r\Delta\varphi \quad \text{и} \quad k = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\left|\frac{d\varphi}{r\,d\varphi}\right| = \frac{1}{r};\ R = \frac{1}{k} = r.$$

Таким образом, кривизна и радиус кривизны окружности являются величинами постоянными, не зависящими от точки окружности, в которой они вычисляются, причем радиус кривизны окружности равен радиусу этой окружности.

Пример 2. Найти кривизну и радиус кривизны прямой.

Решение:

Пусть прямая задана уравнением $y = kx + b$. Тогда $y' = k$, $y'' = 0$, следовательно, в любой точке прямой $k = 0$, $R = \infty$.

Пример 3. Найти кривизну линии $\bar{r} = 3t^2\bar{i} + \left(3t - t^3\right)\bar{j} + 2\bar{k}$ при $t = 1$.

Решение:

$$k = \frac{\left|\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3}.$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 6t\bar{i} + \left(3 - 3t^2\right)\bar{j} + 0\bar{k}, \qquad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 6\bar{i} + (-6t)\bar{j} + 0\bar{k},$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{(6t)^2 + \left(3 - 3t^2\right)^2} = \sqrt{\left(3^2 + 18t^2 + 9t^4\right)} = \left(3 + 3t^2\right).$$

Вычислим векторное произведение

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6t & \left(3 - 3t^2\right) & 0 \\ 6 & -6t & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}\left(-36t^2 - 6\left(3 - 3t^2\right)\right) = \bar{k}\left(-18 - 18t^2\right) =$$

$$= -18\bar{k}\left(1 + t^2\right).$$

$$\left|\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]\right| = \sqrt{\left(-18\left(1 + t^2\right)\right)^2} = 18\left(1 + t^2\right).$$

Тогда $k = \dfrac{18\left(1 + t^2\right)}{\left(3 + 3t^2\right)^3} = \dfrac{2}{3\left(1 + t^2\right)^2}$, и $k\big|_{t=1} = \dfrac{2}{3\left(1 + 1^2\right)^2} = \dfrac{1}{6}$.

Следовательно, радиус кривизны равен $R = \dfrac{1}{k} = 6$.

В качестве меры локальной изогнутости линии можно вместо кривизны использовать радиус кривизны, причем линия тем больше изогнута в данной точке, чем меньше радиус кривизны.

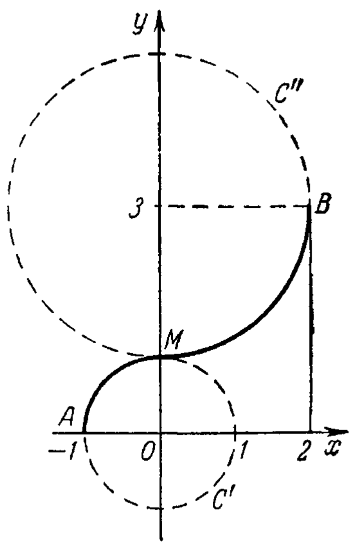
Замена бесконечно малой дуги линии вблизи точки M соответствующим отрезком касательной сопровождается бесконечно малой погрешностью не ниже второго порядка, а, как можно показать, замена ее соответствующей дугой окружности кривизны – бесконечно малой погрешностью не ниже третьего порядка. Таким образом, малую дугу линии мы можем считать «почти» дугой окружности кривизны, причем с большим правом, т. е. меньшей ошибкой, чем отрезком касательной.

Таким образом, введенные здесь понятия служат для более точной характеристики линии в ее точке M. Они указывают степень изогнутости линии посредством сравнения ее с окружностью, имеющей с ней общую точку M, общую касательную в этой точке и ту же кривизну.

Как известно, первая производная $f'(x)$ имеет очень простую геометрическую интерпретацию, вторая же производная $f''(x)$ не может быть столь же просто геометрически интерпретирована.

Однако, как это хорошо видно из формулы для радиуса кривизны, существует тесная связь между второй производной $f''(x)$ и радиусом кривизны графика функции $y = f(x)$ в соответствующей его точке. В частности, если радиус кривизны не существует или равен бесконечности, то $f''(x)$ при соответствующем значении x не существует или $f''(x) = 0$. Обратно, в тех точках графика, для которых $f''(x)$ не существует или $f''(x) = 0$, радиус кривизны не существует или равен бесконечности. Так, в точке перегиба линия или не имеет радиуса кривизны или ее радиус кривизны бесконечен.

Возьмем, например, функцию, график которой представлен на рисунке ниже.



Линия *АМН* составлена из дуг двух окружностей *С* и *С''*. Прямо по графику видно, что функция везде в интервале (–1, 2) имеет производную (линия – касательную), притом непрерывно изменяющуюся. Что касается второй производной, то оказывается, что она вовсе не существует в точке $x = 0$.

Можно убедиться в этом непосредственным вычислением, но с помощью радиуса кривизны этот факт можно объяснить просто и наглядно.

В самом деле, слева от точки *М* радиус кривизны везде равен 1, а справа везде равен 2, значит, в точке *М* не существует радиуса кривизны, а потому не существует и второй производной при $x = 0$. Подобно тому как линия в угловой точке имеет две касательные, линия *АМВ* имеет в точке *М* два радиуса кривизны: один, соответствующий дуге *АМ* слева от точки *М*, другой – дуге *ВМ* справа от этой точки.

Пусть функция $y = f(x)$ в заданном интервале гладкая, т. е. везде имеет непрерывную первую производную. Ее график имеет в каждой своей точке касательную и представляется непрерывной, гладкой линией, вдоль которой касательная «вращается» непрерывно. Но при этом может случиться, что функция не имеет в некоторых точках второй производной и, следовательно, линия – радиуса кривизны. С точки зрения изменения кривизны линию тогда нельзя рассматривать как особенно «гладкую» – кривизна ее терпит разрывы в точках стыка отдельных частей с непрерывно меняющейся кривизной. Эти точки линии играют такую же роль относительно кривизны, какую угловые точки линии играют относительно ее направления.

Например, линия *АМВ* не является «гладкой» в смысле кривизны, ибо, несмотря на кажущуюся плавность линии, ее кривизна терпит разрыв в точке *М* – она переходит от значения, равного 1, к значению, равному 2 (радиус кривизны в точке *М* перескакивает от значения, равного 1, к значению, равному $\frac{1}{2}$.

Если $f(x)$ везде имеет и вторую непрерывную производную, то график ее в каждой точке имеет непрерывную кривизну, и линию $y = f(x)$ можно считать «гладкой» в более сильном смысле: вдоль нее непрерывно меняется не только касательная, но и кривизна.

Эти обстоятельства имеют большое значение в некоторых практических вопросах, например при проведении железнодорожных путей. Дело в том, что, как известно из механики, при движении тела по окружности радиуса R величина центробежной силы F определяется по формуле $F = \dfrac{mV^2}{R}$, где m – масса тела, а V – его скорость; эта сила направлена по радиусу окружности.

При движении по какой-нибудь другой траектории по нормали к ней также направлена сила, определяющаяся по той же формуле, причем под R понимается радиус кривизны траектории в данной точке.

Допустим, что скорость сохраняется постоянной, тогда сила будет испытывать разрывы непрерывности в точках разрыва кривизны линии, по которой происходит движение. Этим объясняются толчки вагонов на поворотах, хотя обычно и кажется, что путь имеет плавные закругления. Во избежание толчков стараются повороты осуществлять так, чтобы кривизна изменялась непрерывно. Например, прямую соединяют с дугой окружности при помощи так называемых переходных кривых, допускающих непрерывный переход кривизны от нуля до кривизны данной окружности. Часто в качестве переходной кривой используется кубическая парабола $y = ax^3$. Для нее мы имеем

$$y' = 3ax^2, \quad y'' = 6ax, \quad k = \left| \frac{6ax}{\left(1 + 9a^2x^4\right)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

При $x = 0$, $y = 0$ – парабола касается оси Ox в начале координат и имеет в этой точке кривизну, равную нулю. (Это понятно: начало координат – точка перегиба параболы $y = ax^3$). Затем до некоторого x кривизна возрастает. Таким образом, полуось Ox можно соединить с подобранной дугой окружности посредством кубической параболы так, что кривизна образованной линии будет непрерывно увеличиваться от нуля до кривизны окружности.

Если траектория настолько «гладка», что кривизна существует и непрерывна в любой точке, то движение остается плавным без всякого изменения скорости на поворотах.

12.5. Первая и вторая производные вектор-функции по длине дуги

Ранее нами был установлен геометрический смысл первой производной $\frac{d\bar{r}(l)}{dl}$ и показано, что это есть единичный вектор, направленный по касательной:

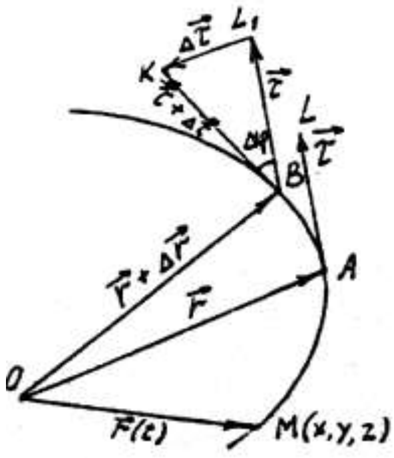
$$\frac{d\bar{r}(l)}{dl} = \bar{\tau}.$$

При этом $\bar{\tau} = \frac{dx}{dl}\bar{i} + \frac{dy}{dl}\bar{j} + \frac{dz}{dl}\bar{k}$, и $\sqrt{\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2} = 1$.

Рассмотрим далее вторую производную вектор-функции $\bar{r}(l)$ и выясним ее геометрическое значение:

$$\frac{d^2\bar{r}(l)}{dl^2} = \frac{d}{dl}\left(\frac{d\bar{r}}{dl}\right) = \frac{d\bar{\tau}}{dl}.$$

Следовательно, нам нужно найти $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta l}$.



Из чертежа видно, что $BK = BL_1 + L_1K$, или $\bar{\tau} + \Delta\bar{\tau} + L_1K$, откуда $\Delta\bar{\tau} = L_1K$.

Так как $\bar{\tau}$ – единичный орт касательной, и его длина неизменна, то ΔBKL_1 – равнобедренный треугольник с углом $\Delta\varphi$ при вершине. Следовательно, $L_1K = \Delta\bar{\tau} = 2\tau\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$.

Поделив обе части уравнения на Δl, имеем

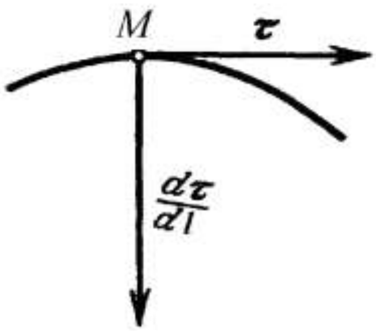
$$\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta l} = 2\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta l} = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

Переходя к пределу при $\Delta l \to 0$, используя первый замечательный предел, получим, что $\frac{d\bar{\tau}}{dl} = \lim\limits_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$, но выражение в правой части уравнения по определению является кривизной *k*-линии:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = k\ .$$

Таким образом, длина производной от единичного вектора касательной по длине дуги равняется кривизне линии в данной точке.

Выясним направление вектора кривизны $\frac{d\vec{\tau}}{dl}$. С этой целью продифференцируем равенство $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$. Имеем $2\frac{d\vec{\tau}}{dl}\vec{\tau} = 0$, т. е. оказывается, что $\frac{d\vec{\tau}}{dl} \perp \vec{\tau}$.



Условимся называть *нормалью* к кривой в точке M всякую прямую, проходящую через эту точку перпендикулярно к касательной. Таких нормалей бесконечное множество: они заполняют нормальную плоскость. Вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dl}$ – один из них. Его называют *главной нормалью*.

Единичный вектор главной нормали обозначают $\bar{n}$. Так как $\bar{n} \perp \bar{\tau}$, то

$$k\bar{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dl}.$$

Таким образом, если линия задана в естественной параметризации, то ее кривизна вычисляется по формуле

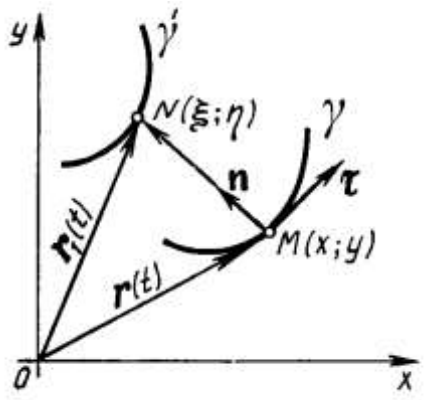
$$k = \left|\frac{d\bar{\tau}}{dl}\right| = \left|\frac{d^2\bar{r}}{dl^2}\right|,$$

или в координатах:

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dl^2}\right)^2}\ .$$

12.6. Эволюта и эвольвента

Из определения центра кривизны следует, что каждой точке M кривой γ соответствует точка N – центр кривизны для этой точки, лежащей на кривой γ'.



Определение. Множество точек γ' центров кривизны линии γ называется ее *эволютой*, а сама линия γ по отношения к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Выведем уравнение кривой γ, заданной уравнением $\bar{r}(t) = x\bar{i} + y\bar{j}$.

Пусть $N(\xi;\eta)$ – центр кривизны кривой γ в точке *М*. Тогда для любой точки $M(x;y) \in \gamma$ имеем $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$.

Обозначим $\overrightarrow{ON} = \bar{r}_1$, $\overrightarrow{OM} = \bar{r}$, $\overrightarrow{MN} = R\bar{n}$, где $\bar{n}$ – единичный вектор нормали $\overline{N}$ кривой γ.

Тогда $\bar{r}_1 = \bar{r} + R\bar{n}$ – векторное уравнение эволюты кривой γ.

Выведем уравнение кривой γ в координатной форме.

Запишем разложение векторов $\bar{r}_1, \bar{r}$ по базису $B = (\bar{i}, \bar{j})$: $\bar{r}_1 = \xi\bar{i} + \eta\bar{j}$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$, учитывая, что

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'(t)}{\left|\bar{r}'(t)\right|} = \frac{x'\bar{i} + y'\bar{j}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\bar{i} + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\bar{j}\,.$$

$$\bar{N} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)_t^{/}\bar{i} + \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)_t^{/}\bar{j} = -\,y'\frac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)^3}}\bar{i} +$$

$$+\,x'\frac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)^3}}\bar{j}\,,$$

и координаты единичного вектора нормали имеют вид

$$\bar{n} = \mp\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\bar{i} \pm \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\bar{j}\,.$$

С учетом того, что $R = \dfrac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y''x' - y'x''\right|}$, векторное уравнение эвольвенты имеет вид

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + R\bar{n} \iff \xi\bar{i} + \eta\bar{j} = x\bar{i} + y\bar{j} - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}\bar{i} + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}\bar{j}\,.$$

Приравнивая коэффициенты разложения, получаем

$$\xi = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''},\quad \eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}\,.$$

Полученные формулы являются параметрическими уравнениями эволюты γ' кривой γ. Сама же кривая γ, заданная уравнениями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t \in T$, является эвольвентой по отношению к кривой γ'.

Пример. Найти кривизну, радиус кривизны, координаты центра кривизны параболы $y = x^2$ в произвольной точке x_0. Записать уравнение ее эволюты.

Решение:

$y'(x_0) = 2x_0$, $y''(x_0) = 2$. Тогда $k = \dfrac{2}{\left(1 + 4x_0^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}$, $R = \dfrac{\left(1 + 4x_0^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$.

Координаты центра кривизны

$$\xi = x_0 - 2x_0 \frac{1+4x_0^2}{2}; \quad \eta = x_0^2 + \frac{1+4x_0^2}{2}.$$

Так, например, в точке $O(0;0)$ $k=2$, $R=\frac{1}{2}$, $\xi=0$, $\eta=\frac{1}{2}$, т. е. центром кривизны является точка $N\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Считая $x_0 = t$, запишем параметрические уравнения эволюты параболы:

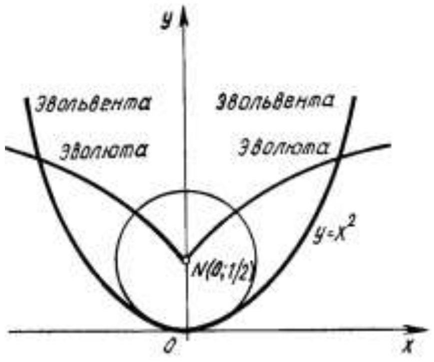
$$\begin{cases} x = t - t\left(1+4t^2\right), \\ y = t^2 + \dfrac{1+4t^2}{2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения $t = -\sqrt[3]{\frac{x}{4}}$, из второго находим $t^2 = \dfrac{y-\frac{1}{2}}{3}$. Следовательно, уравнение эволюты параболы имеет вид $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{16}} = \dfrac{y-\frac{1}{2}}{3}$, или после преобразований

$$x^2 = \frac{16}{27}\left(y - \frac{1}{2}\right)^3.$$

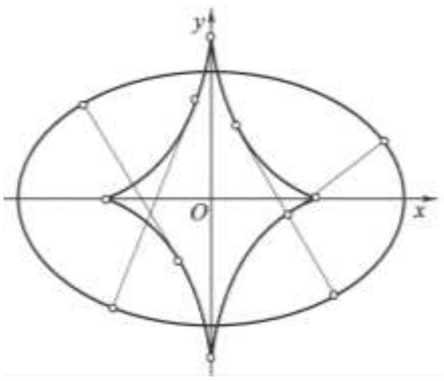
Следовательно, эволюта параболы $y = x^2$ – полукубическая парабола.

На рисунке изображена парабола $y = x^2$, ее эволюта и круг кривизны в точке $O(0;0)$.

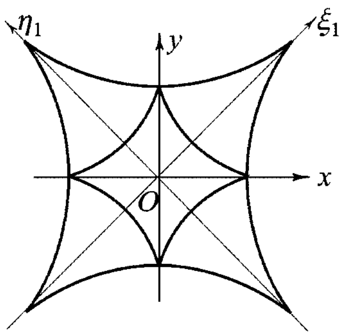


Приведем без вывода эволюты некоторых часто используемых кривых:

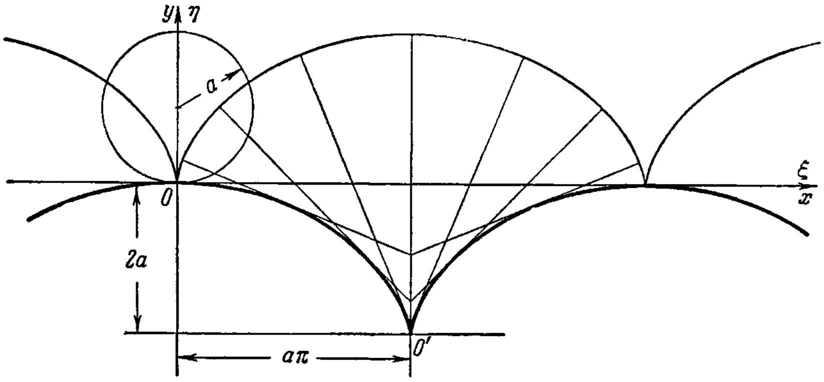
а) эллипса $x = a\cos t, \quad y = b\sin t;$



б) астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

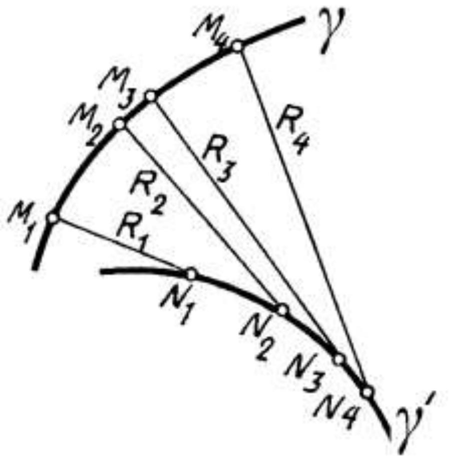


в) циклоиды $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t);$



Укажем без вывода два важных свойства эволюты и эвольвенты, устанавливающие связь между ними:

1. Нормаль к эвольвенте γ является касательной к эволюте γ' в соответствующей точке.



2. Если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты. (Так, например, $|N_1N_2| = R_2 - R_1$, $|N_2N_3| = R_3 - R_2$ и т. д.).

12.7. Кручение кривой

Пусть P – произвольная фиксированная точка регулярной кривой $\gamma : \bar{r} = \bar{r}(t)$ без особых точек и M – точка этой кривой, отличная от P. Обозначим через φ угол между соприкасающимися плоскостями в точках P и M, а через s – длину дуги PM.

Определение. *Абсолютным кручением* $|\chi|$ кривой γ в точке P называется предел отношения φ/s при $s \to 0$ (т. е. при $M \to P$).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. **Регулярная (трижды дифференцируемая) кривая γ без особых точек имеет в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, определенное абсолютное кручение:**

$$\chi = \frac{\left|\left(\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''\right)\right|}{\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]^2}.$$

Величина, обратная кручению кривой, носит название радиуса кручения и обозначается T:

$$T = \frac{1}{\chi} = \frac{\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]^2}{\left|\left(\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''\right)\right|}.$$

Пример 1. Найти кривизну и кручение винтовой линии $\bar{r} = (a\cos t)\bar{i} + (a\sin t)\bar{j} + (bt)\bar{k}$, $a > 0$.

Решение:

Найдем производные вектор-функции:

$$\bar{r}' = (-a\sin t)\vec{i} + (a\cos t)\vec{j} + b\vec{k},$$

$$\bar{r}'' = (-a\cos t)\bar{i} + (-a\sin t)\bar{j},$$

$$\bar{r}''' = (a\sin t)\vec{i} + (-a\cos t)\vec{j}.$$

Теперь определим векторное произведение:

$$\left[\bar{r}', \bar{r}''\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (ab\sin t)\vec{i} - (ab\cos t)\vec{j} + (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)\vec{k} = (ab\sin t)\vec{i} - (ab\cos t)\vec{j} + a^2\vec{k}.$$

Далее для смешанного произведения имеем

$$\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t) = a^2 b.$$

Найдем длины векторов:

$$\left|\bar{r}'\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\left|\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]\right| = \sqrt{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\left|\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]\right|^2 = a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4 = a^2(a^2 + b^2).$$

Отсюда кривизна будет равна $k = \dfrac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})} = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, кручение

$\chi = \dfrac{a^2 b}{a^2 (a^2 + b^2)} = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Следовательно, для винтовой линии кривизна и кручение постоянны.

Пример 2. Найти кручение в любой точке t кривой $\bar{r} = a \operatorname{ch} t \bar{i} + a \operatorname{sh} t \bar{j} + at\bar{k}$.

Решение:

Кручение кривой заданной вектор функцией $\bar{r}(t)$ определяется по следующей формуле:

$$\chi = \frac{1}{T} = \frac{\left(\dfrac{d\bar{r}}{dt}, \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \dfrac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\dfrac{d\bar{r}}{dt}, \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

Находим необходимые величины:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = a \operatorname{sh} t\bar{i} + a \operatorname{ch} t\bar{j} + a\bar{k},$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = a \operatorname{ch} t\bar{i} + a \operatorname{sh} t\bar{j} + 0\bar{k},$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = a \operatorname{sh} t\bar{i} + a \operatorname{ch} t\bar{j} + 0\bar{k}.$$

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} a \operatorname{sh} t & a \operatorname{ch} t & a \\ a \operatorname{ch} t & a \operatorname{sh} t & 0 \\ a \operatorname{sh} t & a \operatorname{ch} t & 0 \end{vmatrix} = a^2\left(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t\right) = a^2,$$

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right] = \sqrt{a^4 \operatorname{ch}^2 t + a^4 \operatorname{sh}^2 t} = a^2\sqrt{2 \operatorname{ch} 2t},$$

тогда

$$\chi = \frac{a^2}{a^4 \cdot 2 \operatorname{ch} 2t} = \frac{1}{2a \operatorname{ch} 2t}.$$

13. Естественный трехгранник и формулы Френе

13.1. Естественный трехгранник

Рассмотрим регулярную (трижды непрерывно дифференцируемую) кривую $\bar{r} = \bar{r}(l)$. Если в E_3 выбрана прямоугольная система координат, то

$$\gamma : \bar{r}(l) = x(l)\vec{i} + y(l)\vec{j} + z(l)\vec{k}.$$

Вектор $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{r}}{dl}$ является *единичным вектором касательной* к линии γ в точке M, где $\overline{OM} = \bar{r}$.

Вектор $\bar{n} = \dfrac{d\vec{\tau}}{dl}$ является *единичным вектором главной нормали*, т. е. $|\bar{n}|=1$.

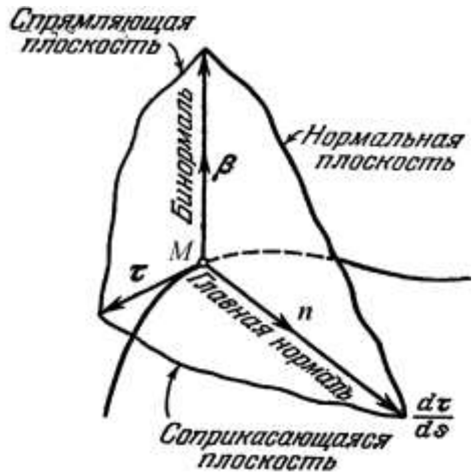
Определим еще вектор $\bar{\beta} = [\bar{\tau}, \bar{n}]$.

Замечаем, что $\bar{\beta} \perp \bar{\tau}$, $\bar{\beta} \perp \bar{n}$, $|\bar{\beta}| = |\vec{\tau}| \cdot |\bar{n}| \cdot \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, и по смыслу векторного произведения заключаем, что $\bar{\beta}$ – единичный вектор, перпендикулярный к $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$.

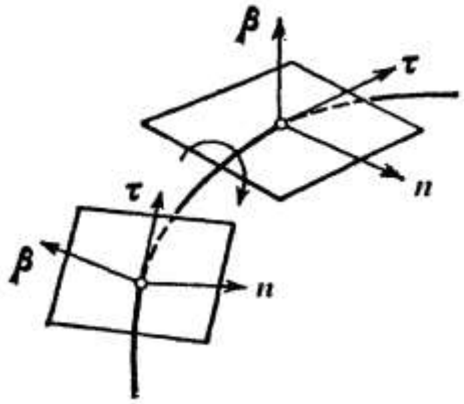
Прямая, проходящая через точку M в направлении вектора $\bar{\beta}$, называется *бинормалью* линии γ в точке M, а вектор $\bar{\beta}$ – единичный вектор бинормали.

Плоскость, содержащая векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ является *соприкасающейся плоскостью*; содержащая векторы $\bar{n}$ и $\bar{\beta}$ – *нормальной плоскостью*; содержащая векторы $\bar{\beta}$ и $\bar{\tau}$ – *спрямляющей плоскостью*.

Трехгранник с вершиной в точке M, образованный этими тремя плоскостями, называются *сопровождающим трехгранником* (*трехгранником Френе*) пространственной кривой.



При движении точки касания вдоль пространственной кривой, сопровождающий трехгранник вращается. При этом естественные координатные оси при движении точки M по этой кривой перемещаются вместе с ней, оставаясь взаимно перпендикулярными, но изменяя свое направление в пространстве.



Уравнения координатных осей и плоскостей сопровождающей системы координат могут быть найдены в произвольный момент времени.

Пример. Материальная точка движется по винтовой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = \sqrt{R^2 - a^2}\, t. \end{cases}$$

Записать в момент времени $t = 0$ уравнения координатных осей и плоскостей сопровождающей системы координат (трехгранник Френе).

Решение:

$$\bar{r}' = -a\sin t\,\bar{i} + a\cos t\,\bar{j} + \sqrt{R^2 - a^2}\,\bar{k},$$

$$|\bar{r}'| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + R^2 - a^2} = R,$$

$$\bar{r}'' = -a\cos t\,\bar{i} - a\sin t\,\bar{j}.$$

Орт касательной имеет вид в произвольный момент времени

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} = \frac{-a\sin t\,\bar{i} + a\cos t\,\bar{j} + \sqrt{R^2 - a^2}\,\bar{k}}{R} =$$

$$= -\frac{a\sin t}{R}\bar{i} + \frac{a\cos t}{R}\bar{j} + \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\bar{k}.$$

$$\left[\bar{r}',\bar{r}''\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -a\sin t & a\cos t & \sqrt{R^2-a^2}\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=$$

$$=a\sqrt{R^2-a^2}\sin t\,\bar{i}-a\sqrt{R^2-a^2}\cos t\,\bar{j}+a^2\bar{k}.$$

Тогда $\left\|\left[\bar{r}',\bar{r}''\right]\right\|=\sqrt{a^2(R^2-a^2)\sin^2 t+a^2(R^2-a^2)\cos^2 t+a^4}=aR.$

Следовательно, орт бинормали в произвольный момент времени имеет вид

$$\bar{\beta}=\frac{\left[\bar{r}',\bar{r}''\right]}{\left\|\left[\bar{r}',\bar{r}''\right]\right\|}=\frac{a\sqrt{R^2-a^2}\sin t\,\bar{i}-a\sqrt{R^2-a^2}\cos t\,\bar{j}+a^2\bar{k}}{aR}=$$

$$=\frac{\sqrt{R^2-a^2}\sin t}{R}\bar{i}-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\bar{j}+\frac{a}{R}\bar{k}.$$

И, наконец, т. к. $\bar{n}=\left[\bar{\beta},\bar{\tau}\right]$, имеем

$$\bar{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\sin t & -\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t & \frac{a}{R}\\ \frac{a}{R}\sin t & \frac{a}{R}\cos t & \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\end{vmatrix}=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}.$$

Составим уравнение соприкасающейся плоскости в произвольной точке. Эта плоскость проходит через точку $\left(a\cos t;\, a\sin t;\sqrt{R^2-a^2}t\right)$ и перпендикулярна вектору бинормали $\bar{\beta}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}\sin t}{R}\bar{i}-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\bar{j}+\frac{a}{R}\bar{k}.$

Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$\frac{\sqrt{R^2-a^2}\sin t}{R}\left(X-a\cos t\right)-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\left(Y-a\sin t\right)+$$

$$+\frac{a}{R}\left(Z-\sqrt{R^2-a^2}\,t\right)=0,$$

или

$$X\sqrt{R^2-a^2}\sin t-Y\sqrt{R^2-a^2}\cos t+aZ-a\sqrt{R^2-a^2}t=0.$$

Составим уравнение спрямляющей плоскости в произвольной точке. Эта плоскость проходит через точку $\left(a\cos t; a\sin t; \sqrt{R^2-a^2}t\right)$ перпендикулярно вектору главной нормали $\bar{n} = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$.

Поэтому уравнение спрямляющей плоскости имеет вид

$-(X - a\cos t)\cos t - (Y - a\sin t)\sin t = 0$, или $X\cos t + Y\sin t - a = 0$.

И, наконец, составим уравнение нормальной плоскости в произвольной точке. Эта плоскость проходит через точку $\left(a\cos t; a\sin t; \sqrt{R^2-a^2}t\right)$ и перпендикулярна вектору касательной

$$\bar{\tau} = -\frac{a\sin t}{R}\bar{i} + \frac{a\cos t}{R}\bar{j} + \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\bar{k}.$$

Поэтому уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$\frac{a\sin t}{R}(X - a\cos t) + \frac{a\cos t}{R}(Y - a\sin t) + \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\left(Z - \sqrt{R^2-a^2}\,t\right) = 0,$$

или

$$Xa\sin t - Ya\cos t - Z\sqrt{R^2-a^2} + \left(R^2-a^2\right)t = 0.$$

При $t = 0$:

- естественный репер имеет вид
$$\bar{\tau} = \frac{a}{R}\bar{j} + \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\bar{k}, \quad \bar{\beta} = \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\bar{i} + \frac{a}{R}\bar{k}, \quad \bar{n} = -\vec{i};$$
- уравнение соприкасающейся плоскости: $-Y\sqrt{R^2-a^2} + aZ = 0$;
- уравнение спрямляющей плоскости: $X\cos t - a = 0$;
- уравнение нормальной плоскости: $-Ya\cos t - Z\sqrt{R^2-a^2} = 0$.

Если положить, что движение происходит в плоскости *Oxy* (т. е. $z = 0$ или $R = a$), то при $t = 0$

- естественный репер имеет вид $\bar{\tau} = \bar{j}$, $\bar{\beta} = \bar{k}$, $\bar{n} = -\vec{i}$;
- уравнение соприкасающейся плоскости: $Z = 0$;
- уравнение спрямляющей плоскости: $X = a$;
- уравнение нормальной плоскости: $Y = 0$.

13.2. Формулы Френе

Основной смысл формул Френе состоит в том, что они характеризуют вращение сопровождающего трехгранника при движении точки касания вдоль пространственной кривой.

Так как вектор $\bar{n}$ – единичный, т. е. постоянной длины, то $\bar{n}' \perp \bar{n}$, и значит, вектор $\bar{n}'$ параллелен спрямляющейся плоскости. Поэтому его можно разложить по векторам $\bar{\tau}$ и $\bar{\beta}$:

$$\bar{n}' = \alpha\bar{\tau} + \chi\bar{\beta},$$

где α, χ – координаты в базисе $\bar{\tau}, \bar{\beta}$.

1. Тождество $\bar{\tau} \cdot \bar{n} = 0$ дифференцируем по параметру *l*:

$$\bar{\tau}' \cdot \bar{n} + \bar{\tau} \cdot \bar{n}' = 0.$$

Заменим $\bar{\tau}'$ и $\bar{n}'$ полученными для них формулами:

$$k\bar{n} \cdot \bar{n} + \bar{\tau} \cdot (\alpha\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}) = 0, \quad \text{или} \quad k\bar{n} \cdot \bar{n} + \alpha\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} + \chi\bar{\tau} \cdot \bar{\beta} = 0.$$

Учтем, что $\overline{nn} = \overline{\tau\tau} = 1$, т. к. это скалярное произведение единичных векторов, а $\bar{\tau} \cdot \bar{\beta} = 0$ – как скалярное произведение перпендикулярных векторов.

Уравнение принимает вид $k + \alpha = 0$, откуда получаем, что $\alpha = -k$.

Формула разложение вектора $\bar{n}'$ по базисным векторам спрямляющей плоскости принимает вид после подстановки $\alpha = -k$:

$$\bar{n}' = -k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}.$$

2. Тождество $\bar{\beta} = [\bar{\tau}, \bar{n}]$ дифференцируем по параметру *l*:

$$\bar{\beta}' = [\bar{\tau}', \bar{n}] + [\bar{\tau}, \bar{n}'].$$

Заменяя здесь векторы $\bar{\tau}'$ и $\bar{n}'$ их выражениями, находим, что

$$\bar{\beta}' = [k\bar{n}, \bar{n}] + [\bar{\tau}, [-k\bar{\tau}, \chi\bar{\beta}]].$$

Отсюда $\bar{\beta}' = \chi[\bar{\tau}, \bar{\beta}]$ или $\bar{\beta}' = -\chi\bar{n}$. Здесь взят знак минус, т. к. тройка векторов $\bar{\tau}, \bar{\beta}, \bar{n}$ – левая; а число χ есть кручение линии γ в точке *M*.

Нами получены следующие формулы Френе:

$$\begin{cases} \bar{\tau}'(l) = k\bar{n}, \\ \bar{n}'(l) = -k\tau + \chi\beta, \\ \bar{\beta}'(l) = -\chi\bar{n}, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \bar{\tau}'(l) = \dfrac{\bar{n}}{R}, \\ \bar{n}'(l) = -\dfrac{\bar{\tau}}{R} + \dfrac{\beta}{T}, \\ \bar{\beta}'(l) = -\dfrac{\bar{n}}{T}. \end{cases}$$

Вся теория гладких линий основана на применении этих формул.

Найдем кинематический смысл формул Френе.

Будем рассматривать длину дуги заданной кривой как время, а трехгранник Френе – как твердое тело, движущееся вдоль кривой.

Тогда это движение в каждый момент времени можно представить как сумму поступательного движения (вдоль касательной) и мгновенного вращения с угловой скоростью $\overline{\omega}$ (вектор Дарбу). Из формул Френе вытекает, что

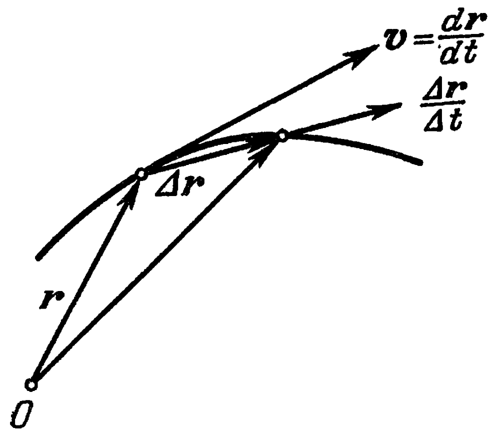
$$\overline{\omega} = -k\overline{\tau} + \chi\overline{\beta}\,.$$

Это означает, что вектор мгновенного вращения лежит в спрямляющей плоскости и распадается на две составляющие: вращение вокруг бинормали со скоростью χ (поворот) и вращение вокруг касательной со скоростью $-k$ (кручение).

14. Приложение вектор-функции в механике

Пусть $\overline{r} = \overline{r}(t)$ – радиус-вектор движущейся точки, t – время.

Перемещение точки в промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$ характеризуется вектором $\Delta\vec{r}$.



Отношение $\dfrac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}$ называют *средней скоростью* движения точки за упомянутый промежуток времени.

Предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т. е. вектор $\vec{V} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$ называют скоростью точки в момент t. Из сказанного выше следует, что вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории точки.

Скорость точки, в свою очередь, представляет собой вектор-функцию $\vec{V} = \vec{V}(t)$. Вектор $\Delta\vec{V} = V(t+\Delta t) - V(t)$ дает приращение скорости за время от момента t до момента $t + \Delta t$.

Отношение $\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ называют *средним ускорением* движения точки за упомянутый промежуток времени.

Предел среднего ускорения при $\Delta t \to 0$, т. е. вектор $\vec{a} = \dfrac{d\overline{V}}{dt}$ называют ускорением точки в момент t.

Пусть s – длина траектории, пройденной точкой к моменту t (т. е. переменная дуга траектории, отсчитываемая в направлении возрастания t).

Так как $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$, то

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, скорость $\vec{V}$ точки есть вектор, направленный по касательной к кривой, причем $\left|\vec{V}\right| = \dfrac{ds}{dt}$.

Обратимся к ускорению. Допустим сначала, что в интересующий нас момент $\vec{V} = \dfrac{d\overline{r}}{dt} \neq 0$. Следовательно, соответствующая точка M траектории не является особой. По этой причине координаты x, y, z точек кривой, близкой к M, оказываются дифференцируемыми функциями, т. е. и вектор $\overline{r}$ дифференцируем по s.

Тогда $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}$. Следовательно, $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$.

Но $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$, и тогда

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Отсюда вытекает, что в случае $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \neq 0$ имеем $\vec{a} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 k\overline{n}$, т. е. вектор ускорения компланарен с $\vec{\tau}$ и $\overline{n}$. Следовательно, вектор $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости.

Его проекция на касательную называется тангенциальным ускорением:

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dV}{dt}.$$

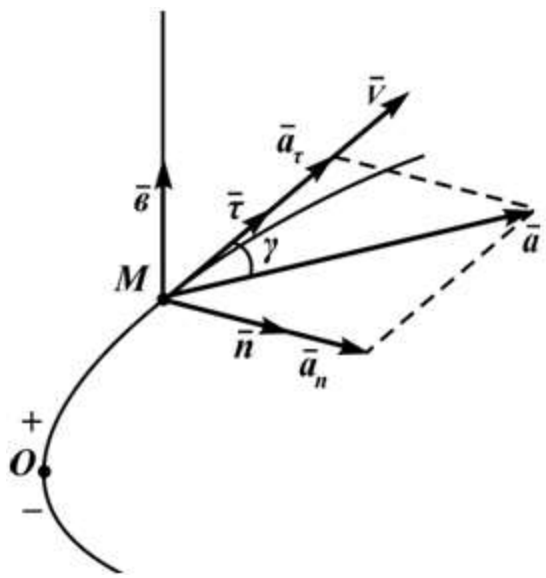
Тангенциальное ускорение всегда направлено по касательной к траектории: в случае $a_\tau > 0$ оно сонаправлено с вектором $\vec{V}$, в случае $a_\tau < 0$ – противоположно направлено.

Проекция вектора ускорения на нормаль называется нормальным ускорением:

$$a_n = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Нормальное ускорение всегда положительно, следовательно, направлено вдоль главной нормали к центру кривизны траектории.

Таким образом, $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ и $|\vec{a}| = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2}$.



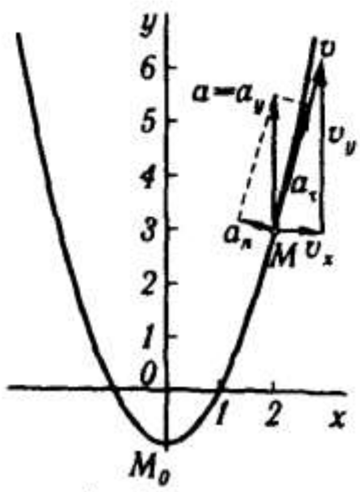
Пример. Точка M движется в плоскости Oxy. Закон движения точки задан уравнением $\bar{r} = 4t\bar{i} + 16t^2\bar{j}$, где x и y заданы в метрах, t – в секундах. Найти уравнение траектории точки и ее положение в заданный момент времени $t = 0{,}5$ с. Определить скорость и ускорение точки, а также касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории и вычислить их значение в момент времени $t = 0{,}5$ с.

Решение:

1. Найдем уравнение траектории точки. Уравнение движения можно рассматривать как параметрическое уравнение траектории $\begin{cases} x = 4t, \\ y = 16t^2. \end{cases}$

Исключая t из первого уравнения, получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией движения точки является парабола.

При $t = 0{,}5$ с местоположение точки $M\,(2;3)$.



2. Найдем скорость точки M:

$$\overline{V} \equiv \overline{r}' = 4\vec{i} + 32t\vec{j}\ .$$

Таким образом, $V_x = 4;\ \ V_y = 32t\,;\ V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = 4\sqrt{1 + 64t^2}\ .$

При $t = 0{,}5$ с, $V_x(0{,}5) = 4;\ \ V_y(0{,}5) = 16\ ;\ V(0{,}5) = 4\sqrt{17} \approx 16{,}5\,.$

3. Найдем ускорение точки M:

$$\overline{a} \equiv \overline{r}'' = 32\ \overline{j}\ .$$

Таким образом, $\grave{a}_x = 0;\ \ \grave{a}_y = 32\ ;\ V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = 32 = \mathrm{const}\ .$

При $t = 0{,}5$ с, $a_x(0{,}5) = 0;\ \ a_y(0{,}5) = 32\ ;\ a(0{,}5) = 32\ .$

4. Найдем тангенциальное ускорение точки M : $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}.$

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left[4\sqrt{1 + 64t^2}\right] = 4\frac{128\,t}{2\sqrt{1 + 64t^2}} = \frac{256\,t}{\sqrt{1 + 64t^2}}\ .$$

При $t = 0{,}5$ с, $a_\tau(0{,}5) = \dfrac{128}{\sqrt{17}} \approx 31\ .$

5. Найдем нормальное ускорение точки M : $a_n = kV^2$.

Найдем кривизну траектории $k = \dfrac{\left|\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]\right|}{\left|\bar{r}'\right|^3}$.

$$\left[\bar{r}', \bar{r}''\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 32t & 0 \\ 0 & 32 & 0 \end{vmatrix} = 128\,\bar{k}, \quad \left|\left[\bar{r}', \bar{r}''\right]\right| = 128, \quad k = \frac{128}{\left(4\sqrt{1+64t^2}\right)^3}, \text{ и}$$

$$a_n = \frac{128}{\left(4\sqrt{1+64t^2}\right)^3} 16\left(1+64t^2\right) = \frac{32}{\sqrt{1+64t^2}}.$$

При $t = 0{,}5$ с:

$$k(0{,}5) = \frac{128}{\left(4\sqrt{17}\right)^3} = \frac{2}{17\sqrt{17}} \approx 0{,}0285 \quad \text{и} \quad a_n(0{,}5) = \frac{128}{4\sqrt{17}} \approx 7{,}8.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–3 найти годографы вектор-функций:

1. $\bar{r}(t) = \cos t\,\bar{i} + \bar{j} + \sin t\,\bar{k}$. 2. $\bar{r}(t) = t(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$. 3. $\bar{r}(t) = \bar{i} + \bar{j} + t\bar{k}$.

4. Уравнение движения имеет вид $\bar{r}(t) = 3\cos t\,\bar{i} + 3\sin t\,\bar{j} + 4t\bar{k}$. Определить скорость и ускорение движения в произвольный момент времени.

5. Уравнение движения имеет вид $\bar{r}(t) = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k}$. Определить скорость и ускорение движения в момент времени $t = 1$.

6. Движение точки происходит вдоль кривой $\begin{cases} x = 6t, \\ y = 3t^2, \\ z = t^3. \end{cases}$

Записать в момент времени $t = 1$ уравнения координатных осей и плоскостей сопровождающей системы координат (трехгранник Френе), определить кривизну и кручение кривой.

Ответы:

1) Окружность $x^2 + z^2 = 1,\ y = 1$;

2) прямая, проходящая через начало координат и образующая с осями координат равные углы;

3) прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку (1;1;0);

4) $\overline{V}(t) = -3\sin\, \overline{i} + 3\cos t\, \overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{a}(t) = -3\cos t\overline{i} - 3\sin\, t\,\overline{j}$;

5) $\overline{V}(1) = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{a}(1) = 2\overline{j} + 6\overline{k}$;

6) $\overline{\tau} = \frac{2}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}$, $\overline{\beta} = \frac{1}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$, $\overline{n} = -\frac{2}{3}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$, $k = \frac{2}{27}$, $\chi = \frac{2}{27}$, соприкасающаяся плоскость $X - 2Y + 2Z - 2 = 0$, спрямляющая плоскость $2X - Y - 2Z - 7 = 0$, нормальная плоскость $2X + 2Y + Z - 19 = 0$.

Задания

Выполните задания 35–39 из прил. 1.

Библиографический список

1. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.
2. **Кудрявцев, В. А.** Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М. : АСТ, 2005.
3. **Бугров, Я. С.** Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2004.
4. **Владимирский, Б. М.** Математика. Общий курс / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. – СПб. : Лань, 2002.
5. **Введение в анализ** / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
6. **Сборник задач** по математике для втузов. Ч. 1 / под ред. Е. А. Ефимова. – М. : Наука, 1986.
7. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985.
8. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980.
9. **Руководство** к решению задач по высшей математике. Ч. 2 / под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Высш. шк., 1990.
10. **Кузнецов, Л. А.** Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1994.
11. **Сборник** индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 2 / под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышейш. шк., 1990.
12. **Гусак, А. А.** Справочное пособие к решению задач : Математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998.
13. **Демина, Е. Л.** Векторная функция действительного аргумента и ее механическое приложение / Е. Л. Демина, С. Е. Демин. – Екатеринбург : РИО УГТУ, 1995.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Индивидуальные задания

Задание 1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

Вариант	Задание 1	Задание 2
1	$f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$	$f(x) = \ln(x+3)$
2	$f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$	$f(x) = \sin(2x+1)$
3	$f(x) = \dfrac{1}{(x+3)}$	$f(x) = 3\sin 2x$
4	$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$	$f(x) = 5\cos 2x$
5	$f(x) = 3x^2 + 1$	$f(x) = \cos(2x+1)$
6	$f(x) = 2x^3 - x + 3$	$f(x) = 3\sin 5x$
7	$f(x) = x^2 - 9x + 2$	$y = 2\cos 3x$
8	$f(x) = \dfrac{1}{(x+3)}$	$f(x) = \ln 5x$
9	$f(x) = \dfrac{4}{x-1}$	$f(x) = 3\sin 5x$
10	$f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$	$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 10}$
11	$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$	$f(x) = \sin(3x+1)$
12	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$f(x) = 3\sin(5x-1)$
13	$f(x) = x^3 + 5x$	$f(x) = \cos(2x+3)$
14	$f(x) = 5x^2 - x + 1$	$f(x) = 5\cos 3x$
15	$f(x) = 4x + 5$	$f(x) = 10\ln 2x$
16	$f(x) = x^2 - 2x + 7$	$f(x) = \ln(3x+1)$
17	$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	$f(x) = \ln(x+3)$
18	$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	$f(x) = 2\ln 7x$
19	$f(x) = \dfrac{5}{x+4}$	$f(x) = 5\cos 3x$
20	$f(x) = \dfrac{x+2}{x}$	$f(x) = 2\sin 5x$
21	$f(x) = 3x^2 + x - 1$	$f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$
22	$f(x) = x^3 + 2x + 3$	$f(x) = \ln(5x+1)$

23	$f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$	$f(x) = 5\sin\dfrac{x}{2}$
24	$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$	$y = 5\ln(3x+2)$
25	$f(x) = \sqrt[3]{5x+2}$	$y = 2\cos\dfrac{x}{3}$
26	$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$	$f(x) = \ln(x+5)$
27	$f(x) = 2x-5$	$f(x) = 3\sin 2x$
28	$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$	$f(x) = \cos(x-2)$
29	$f(x) = \sqrt[3]{2x^2+1}$	$f(x) = 3\ln 4x$
30	$f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$	$f(x) = \sin(2x-1)$

Задание 2. Найти производные следующих функций:

Вариант 1		
1) $y = x^2\sqrt{1-x^3}$	2) $y = \dfrac{4\sin 3x}{e^{2x}}$	3) $y = \operatorname{arctg} e^{-2x}$
4) $y = \left(x^{-5} + 2x - 3x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{\frac{2}{5}}$	5) $y = (5x+2)^3$	6) $y = \dfrac{2}{\cos 5x}$, $y'(\dfrac{\pi}{3}) - ?$
7) $y = 3\ln^4(2x + \sin^2 3x)$	8) $y = (e^{\cos\frac{\pi}{3}x} + 3)^2$	9) $y = e^{-2t}(\cos 3t + 2\sin 3t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$	11) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 7}}{e^{-x^3}}$	12) $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5$
Вариант 2		
1) $y = x^2\sqrt{1-x^3}$	2) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$	3) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$
4) $y = \ln(3x^2 - 2x + 5)$	5) $y = \dfrac{e^{3x-5} - 2}{\ln 2x}$	6) $y = (11x^3 - x^{-0,2} - 0,2)^{-\frac{2}{3}}$
7) $y = \sin^{-2}\dfrac{\pi}{6}x$	8) $y = 3\ln^4(2x-3)$	9) $y = e^{3t}(2\cos 4t - 3\sin 4t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \dfrac{2}{x^4}$	11) $y = \dfrac{e^{-\operatorname{tg} x}}{4x^2 + 7x - 5}$	12) $y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3$
Вариант 3		
1) $y = \dfrac{2x^3}{\sqrt{4x+5}}$	2) $y = 3e^{2x} \cdot tg^3 5x$	3) $y = \sin 5x \cdot \arccos 2x$
4) $y = (3x-7)^{-5}$	5) $y = \operatorname{arctg}^{-3}(3x+5)^{3/5}$	6) $y = \ln^{-3}(2x-3)$, $y'(4) - ?$

7) $y=\sin^3\frac{\pi}{3}x$	8) $y=e^{-3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$, $y'(0)-?$	9) $y=\left(\frac{3}{x}-3x^2+2x^{-5}\right)^{-2}$
10) $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}$	11) $y=\frac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg}7x^3}$	12) $y=\operatorname{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$
	Вариант 4	
1) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	2) $y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x$	3) $y=\frac{x}{2x-1}\cdot\ln 3x$, $y'(3)-?$
4) $y=3x^2-\arccos 2x$	5) $y=(2x-4)^3$	6) $y=\left(\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+x^3-0{,}3\right)^{3/7}$
7) $y=5\ln^3(2x-3)$	8) $y=\sin^3\frac{\pi}{4}x$	9) $y=e^{-2t}(\cos 2t-3\sin 2t)$, $y'(0)-?$
10) $y=7\sqrt{x}-\frac{2}{x^5}-3x^3+\frac{4}{x}$	11) $y=\frac{\ln(5x-3)}{4\operatorname{tg}3x^4}$	12) $y=\arcsin^3 2x\cdot\operatorname{ctg}7x^4$
	Вариант 5	
1) $y=\frac{2x^3}{\sqrt{4x+5}}$	2) $y=3e^{-2x}\cdot\operatorname{tg}5x$	3) $y=\ln^{-3}(2x-3)$, $y'(5)-?$
4) $y=\frac{\sin 5x}{\arccos 2x}$	5) $y=(3x-7)^{-5}$	6) $y=\left(\frac{3}{x}-3x^2+2x^{-5}-0{,}7\right)^{4/9}$
7) $y=\cos^2\frac{\pi}{4}x$	8) $y=\frac{e^{3x}+3}{\ln 2x}$	9) $y=e^{-3t}(\cos 2t-2\sin 2t)$, $y'(0)-?$
10) $y=7x+\frac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\frac{6}{x}$	11) $y=\frac{\ln(7x+2)}{5\cos 42x}$	12) $y=\operatorname{ctg}3x\cdot\arccos 3x^2$
	Вариант 6	
1) $y=2\sqrt{2x-3}+\frac{1}{\sqrt{x^3-5}}$	2) $y=e^{-\operatorname{arctg}3x}$	3) $y=(x^2-3)(3x^2-4)^{-2}$, $y'(2)-?$
4) $y=\ln(\cos 5x-3)$	5) $y=\frac{e^{-2x}}{\sin^2(3x+1)}$	6) $y=\left(3x^3-\frac{1}{x}+x^{-2}-0{,}3\right)^{-3/5}$
7) $y=\sqrt[5]{1+\sin^2 3x}$	8) $y=\cos^3\frac{\pi}{4}x$	9) $y=e^{4t}(\cos 4t-3\sin 4t)$, $y'(0)-?$
10) $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}$	11) $y=\frac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$	12) $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$.
	Вариант 7	
1) $y=\sqrt[3]{\frac{1-2x}{1+x}}$	2) $y=x^2\arcsin 5x$	3) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 3x+\ln\sin 2$
4) $y=\frac{\operatorname{ctg}2x}{e^{3x}-x}$	5) $y=3^{2x}\cdot e^{-3x}$, $y'(1)-?$	6) $y=\left(x^2-4x^5+6x^{-4}-1+\frac{2}{x}\right)^{3/2}$
7) $y=\sin^2\frac{\pi}{4}x$	8) $y=\ln^3(2x+e^{-3x})$	9) $y=e^{-2t}(\cos 2t-3\sin 2t)$, $y'(0)-?$

10) $y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}$	11) $y = \frac{\cos^2 3x}{\mathrm{tg}\,(3x-4)}$	12) $y = \ln^5 x \cdot \mathrm{arctg}\ 7x^4$
Вариант 8		
1) $y = 3\sqrt[3]{x^5 - 3x^4 + 1}$	2) $y = \mathrm{arctg}\ (2x+3)$	3) $y = \left(4x^2 + 5x\right)^{-2}$, $y'(3) - ?$
4) $y = e^{-3x} \cdot \cos\ 5x$	5) $y = \frac{\sin\ 5x}{x^2 - 3x}$	6) $y = (3x^3 - \frac{2}{x} + x^{-0,5} + 0,3)^{5/4}$
7) $y = \left(\ln\ \sin\ 2x\right)^3$	8) $y = 5\sin^4 \frac{\pi}{2} x$	9) $y = e^{-3t}(\cos\ 3t + 4\sin\ 3t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}$	11) $y = \frac{\mathrm{tg}^3\ 2x}{\lg\,(5x+1)}$	12) $y = \mathrm{arctg}^3\ 4x \cdot 3^{\sin\ x}$
Вариант 9		
1) $y = 5\sqrt[5]{x^2 + x - \frac{1}{x}}$	2) $y = 2^x \cdot e^{-3x}$, $y'(2) - ?$	3) $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin\ 2x$
4) $y = \sin\ (3x - 5)$	5) $y = \frac{3x^2 - 1}{3\ \mathrm{tgx} + 2}$	6) $y = \left(3x^2 - 2x + 5\right)^{2/5}$
7) $y = \ln^3(2x - 5)$	8) $y = \mathrm{tg}^5 \frac{\pi}{3} x$	9) $y = e^{2t}(\cos\ 3t - 4\sin\ 3t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}$	11) $y = \frac{\log_3(4x+5)}{2\ \mathrm{ctg}\ \sqrt{x}}$	12) $y = 2^{\cos\ x} \cdot \mathrm{arcctg}\ 5x^3$
Вариант 10		
1) $y = x^{-5}\sqrt{x^2 + 2}$	2) $y = \frac{5}{\mathrm{tg}^2\ 3x}$	3) $y = \arccos\ (3x - 2)$, $y'(1) - ?$
4) $y = \cos^3 2x \cdot e^{-5x}$	5) $y = \ln^3(2x + 3)$	6) $y = \left(x^{-2} + \frac{2}{x} - 3x^5 + 3,5\right)^{-1/7}$
7) $y = \sin^{-4} \frac{\pi}{3} x$	8) $y = \left(e^{-3x}\right)\left(x^2 - 1\right)$	9) $y = e^{5t}(2\cos\ 3t - 3\sin\ 3t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}$	11) $y = \frac{\ln\,(7x - 3)}{3\ \mathrm{tg}^2\ 4x}$	12) $y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x + 2)$
Вариант 11		
1) $y = 2\sqrt{4x + 3} - \frac{2}{\sqrt{x^3 - 5}}$	2) $y = \left(e^{-\sin\ 2x} + 1\right)^2$	3) $y = e^{-2x} \cdot 3x^3$, $y'(2) - ?$
4) $y = \frac{x - 1}{5x^2 + 3}$	5) $y = \ln^3(5x + 4)$	6) $y = \left(x^3 + 5x^{-2} + \frac{1}{x} - 3,4\right)^{4/3}$
7) $y = (9 - x)\arccos\ 2x$	8) $y = \mathrm{tg}^3 \frac{\pi}{3} x$	9) $y = e^{2t}(-3\cos\ 2t + 4\sin\ 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}$	11) $y = \frac{\lg\,(11x + 3)}{\cos^2\ 5x}$	12) $y = 3^{\mathrm{tg}\ x} \cdot \arcsin\ 7x^4$

Вариант 12		
1) $y=5\sqrt[3]{2x^2-3x+\frac{1}{x}}$	2) $y=\frac{\sin 5x}{(1+2x)^3}$	3) $y=\left(x^2+4x\right)^{-3/2}, y'(2)-?$
4) $y=\operatorname{arctg}^{-3}(2x-5)$	5) $y=e^{-2x}\cdot\cos 5x$	6) $y=\sin^3\frac{\pi}{6}x$
7) $y=3^{-2\sqrt{x}}\cdot 2^{x^2}$	8) $y=\ln(\operatorname{ctg} 5x)$	9) $y=e^{7t}(2\cos 3t+3\sin 3t)$, $y'(0)-?$
10) $y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$	11) $y=\frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$	12) $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$
Вариант 13		
1) $y=e^{-\sin 3x}$	2) $y=\ln(\arccos 2x)$	3) $y=5\sqrt{2x+3}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}$
4) $y=(x+2)\operatorname{tg}^3 2x$	5) $y=\frac{e^{2x}}{3x^7-8}, y'(1)-?$	6) $y=(x^2-2x+\frac{1}{x}-x-3)^{5/6}$
7) $y=3tg^3(2x-3)$	8) $y=\sin^2\frac{\pi}{4}x$	9) $y=e^{-3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$, $y'(0)-?$
10) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}$	11) $y=\frac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\operatorname{tg}(x+3)}$	12) $y=\sin^4 3x\cdot\operatorname{arctg} 2x^3$
Вариант 14		
1) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$	2) $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$	3) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
4) $y=(3x-1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}$	5) $y=\frac{e^{3x}}{2x^5-1}$	6) $y=\left(x^3-x+\frac{2}{x}-1\right)^{3/4}$
7) $y=2\operatorname{ctg}^{-2}\frac{x}{4}$	8) $y=\cos^2\frac{\pi}{4}x$	9) $y=e^{2t}(3\cos 2t-2\sin 2t)$, $y'(0)-?$
10) $y=\frac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4$	11) $y=\frac{\sin^3(5x+1)}{\lg(3x-2)}$	12) $y=\cos^3 4x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$
Вариант 15		
1) $y=(x+1)e^{3x}$	2) $y=\cos^2 x-2\ln\cos x$	3) $y=\left(\frac{1}{2}x+3\right)\cos^2 2x$
4) $y=\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}$	5) $y=e^{\operatorname{tg}^2 x}$	6) $y=\left(2x^2-\frac{1}{x}+0{,}1\right)^{-\frac{1}{2}}$
7) $y=\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)^{-4}$	8) $y=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}x$	9) $y=e^{-3t}(2\cos 3t-5\sin 3t)$, $y'(0)-?$
10) $y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$	11) $y=\frac{\cos^4(7x-1)}{\lg(x+5)}$	12) $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$

Вариант 16		
1) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1-3x}}$	2) $y=e^{-5x}\cdot\cos^2 3x$	3) $y=(2x-5)^{-3},\ y'(4)-?$
4) $y=\sin 3x\cdot\operatorname{arctg} 2x$	5) $y=\dfrac{3x^2-1}{e^{3x}+x}$	6) $y=\left(\dfrac{5}{x}+5x^3-2x^{-2}+3\right)^{-4/7}$
7) $y=\ln^5(3x+5)$	8) $y=\operatorname{tg}^{-3}\dfrac{\pi}{6}x$	9) $y=e^{-3t}(4\cos 2t-3\sin 2t)$, $y'(0)-?$
10) $y=\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$	11) $y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$	12) $y=\operatorname{ctg}^7 x\cdot\arccos 2x^3$
Вариант 17		
1) $y=e^{\operatorname{arctg} 3x}$	2) $y=\dfrac{3x-5}{x^4+3x-1}$	3) $y=5\sqrt{2x-3}+\sin^{-2}3x$
4) $y=e^{3x}(x^2-3),\ y'(2)-?$	5) $y=\ln\lvert\cos(5x+1)\rvert$	6) $y=\left(\dfrac{1}{x}+x^{-2}+3x^3+1\right)^{-2/3}$
7) $y=2\cos^2\dfrac{\pi}{4}x$	8) $y=3\operatorname{tg}^3 2x$	9) $y=e^{3t}(-\cos 2t+4\sin 2t)$, $y'(0)-?$
10) $y=5x^2+\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$	11) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$	12) $y=e^{-\sin x}\cdot\operatorname{tg} 7x^6$
Вариант 18		
1) $y=e^{-2x}\cdot\cos 3x$	2) $y=2^{-\sqrt{x+3}}$	3) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}-3\sqrt[3]{2x+1}$
4) $y=\dfrac{x^3-5x}{\ln 3x},\ y'(2)-?$	5) $y=\operatorname{arctg}^{-2}x\cdot 3x$	6) $y=\left(8x^3-\dfrac{1}{x^2}-3x+2\right)^{4/5}$
7) $y=2\sin^3\dfrac{\pi}{4}x$	8) $y=3\operatorname{tg}^{-2}(2x-1)$	9) $y=e^{2t}(-3\cos 2t+4\sin 2t)$, $y'(0)-?$
10) $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^4}$	11) $y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$	12) $y=e^{\cos x}\cdot\operatorname{ctg} 8x^3$
Вариант 19		
1) $y=\dfrac{1}{3}\sin^3 5x-\dfrac{1}{\cos 2x}$	2) $y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3-5x}$	3) $y=2\sqrt{5x+3}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$
4) $y=x^3\operatorname{arctg} 2x,\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right)-?$	5) $y=\ln^5(1-2x)$	6) $y=\left(-3x^2+5x-\dfrac{2}{x^3}-1\right)^{2/7}$
7) $y=3^{-x^2}$	8) $y=2\operatorname{tg}^3\dfrac{\pi}{4}x$	9) $y=e^{-3t}(2\cos 5t-4\sin 5t)$, $y'(0)-?$
10) $y=\sqrt{x^5}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}-3x^3$	11) $y=\dfrac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$	12) $y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$

Вариант 20		
1) $y = 2\sqrt[4]{1-2x}$	2) $y = \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin 5x}$	3) $y = \arcsin(5x-3),\ y'(2) - ?$
4) $y = e^{-2x}\cdot\cos 3x$	5) $y = 5^{-x^3+1}$	6) $y = \left(3x^2 - \frac{1}{x} + 2x^{-3} + 1\right)^{-3/4}$
7) $y = \ln^5 2x - 3x^2$	8) $y = 3\operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{6}x$	9) $y = e^{-6t}(2\cos 5t - 3\sin 5t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}$	11) $y = \frac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$	12) $y = \sin^3 7x\cdot\operatorname{arcctg} 5x^2$
Вариант 21		
1) $y = -2\sqrt[3]{2x - x^2 + 3}$	2) $y = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sqrt{1+x^2}}$	3) ó $= \ln\lvert\sin 3x\rvert,\ y'(\frac{\pi}{9}) - ?$
4) $y = 3^{-2x}\cdot(x^2-3x)$	5) $y = 3e^{x^2-2x} + 5x^3$	6) $y = \left(x^{-3} + \frac{1}{x^2} - x^5 + 2\right)^{2/5}$
7) $y = 3\operatorname{tg}^{-2}(3x-1)$	8) $y = 2\cos^3\frac{\pi}{4}x$	9) $y = e^{3t}(2\cos 4t - 4\sin 4t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}$	11) $y = \frac{\log_3(4x-2)}{\operatorname{ctg} 2x}$	12) $y = \sin^2 3x\cdot\operatorname{arcctg} 3x^5$
Вариант 22		
1) $y = x^3\sqrt{1-x^3}$	2) $y = \frac{\sin 5x}{e^{-2x}}$	3) $y = (3x^2-2)\cdot\operatorname{tg} 5x$
4) $y = \operatorname{arctg}(3x-1)$	5) $y = \frac{3}{\cos 6x}$	6) $y = (x^{-3} + 4x^2 - 2x + 3)^{3/4}$
7) $y = 3\cos^2\frac{\pi}{6}x$	8) $y = \ln^2(3x-5)$	9) $y = e^{-t}(3\cos 2t - 2\sin 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3$	11) $y = \frac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg}(1/x)}$	12) $y = \cos\sqrt[5]{x}\cdot\operatorname{arctg} x^4$
Вариант 23		
1) $y = \ln(\operatorname{arctg} 5x)$	2) $y = e^{-\sin^3 2x}$	3) $y = -3\sqrt[3]{3x-5} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$
4) $y = (x^2-1)\cdot(5x^3+3)^{-3}$	5) $y = \frac{e^{-3x}}{3x^5-1}$	6) $y = \left(x^{-3} + \frac{1}{x} + 2x + 0{,}2\right)^{5/2}$
7) $y = 4^{x^3-2x}$	8) $y = 2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}x$	9) $y = e^{-4t}(2\cos 3t - 3\sin 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}$	11) $y = \frac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$	12) $y = \operatorname{tg}^6 2x\cdot\cos 7x^2$

Вариант 24		
1) $y = x^{-3}\sqrt{1-x^2}$	2) $y = \frac{\mathrm{tg}\,3x}{e^{5x}}$	3) $y = 3^{-x^2+3x}$
4) $y = \ln 3x \cdot \sin 2x$	5) $y = \mathrm{arctg}^2\, 3x$	6) $y = \left(x^{-2} + \frac{1}{x} - 5x + 3\right)^{3/2}$
7) $y = 2\cos^3 \frac{\pi x}{6}$	8) $y = \frac{2}{\cos 3x}$	9) $y = e^{-3t}(-3\cos 2t + 4\sin 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}$	11) $y = \frac{\mathrm{tg}^3\, 7x}{\ln(3x+2)}$	12) $y = \mathrm{ctg}^3\, 4x \cdot \arcsin \sqrt{x}$
Вариант 25		
1) $y = x^{-5} \cdot \sqrt[3]{2+x^2}$	2) $y = \frac{2}{\mathrm{tg}\,2x}$	3) $y = \arcsin^3 4x,\ y'\left(\frac{1}{4}\right) - ?$
4) $y = \left(x^3 - 5x\right)\left(e^{-3x} + 5\right)$	5) $y = \ln(2x-3)$	6) $y = \left(x^{-2} + \frac{4}{x} + x^3 + 0{,}3\right)^{-4/3}$
7) $y = \frac{3e^{2x} + 3x}{2x^2 - 1}$	8) $y = 3\cos^2 \frac{\pi}{6} x$	9) $y = e^{6t}(2\sin 3t - 4\cos 3t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}$	11) $y = \frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$	12) $y = \mathrm{ctg}\,\frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$
Вариант 26		
1) $y = x^{-3}\sqrt{x^5+5}$	2) $y = \mathrm{tg}^5\, 2x \cdot e^{-3x}$	3) $y = \frac{3}{\sin^2 5x},\ y'\left(\frac{\pi}{10}\right) - ?$
4) $y = \arccos(5x-2)$	5) $y = \ln^{-3}(2x-3)$	6) $y = \left(x^3 + \frac{2}{x} - 3x^5 + 3\right)^{1/2}$
7) $y = 3\cos^2 \frac{\pi}{3} x$	8) $y = 3^{\sqrt[3]{2x}}$	9) $y = e^{2t}(3\sin 2t - 4\cos 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x$	11) $y = \frac{\mathrm{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$	12) $y = \mathrm{tg}\sqrt{x} \cdot \mathrm{arcctg}\, 3x^5$
Вариант 27		
1) $y = x^{-5}\sqrt[4]{x^2-3}$	2) $y = \frac{2}{\mathrm{tg}\,3x}$	3) $y = \arccos 3x,\ y'\left(\frac{1}{3}\right) - ?$
4) $y = 4^{-\sqrt{3x}}$	5) $y = \sin 2x \cdot e^{-3x}$	6) $y = \left(x^5 - 2x^{-2} + \frac{3}{x} - 4\right)^{1/3}$
7) $y = 2\cos^{-3} \frac{\pi}{6} x$	8) $y = \ln^{-3} 2x$	9) $y = e^{-t}(-\cos 2t + 3\sin 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}$	11) $y = \frac{\cos^2 x}{\lg\left(x^2 - 2x + 1\right)}$	12) $y = \mathrm{tg}^3\, 2x \cdot \arccos 2x^3$

Вариант 28		
1) $y = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{2x-5}$	2) $y = \dfrac{\sin 5x}{e^{2x}-5}$	3) $y = \ln^2 3x,\ y'(2) - ?$
4) $y = 5\,\mathrm{tg}^5 \dfrac{\pi}{6} x$	5) $y = x^3 \cos 5x$	6) $y = \left(3x^2 - \dfrac{2}{x} + x^{-3} + 0{,}2\right)^{1/2}$
7) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$	8) $y = 5^{-x^3+1}$	9) $y = e^{3t}(3\cos 2t - 5\sin 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = 4x^5 - \dfrac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{2}{x^3}$	11) $y = \dfrac{\log_2(3x+7)}{\mathrm{tg}\, 3x}$	12) $y = 2^{\mathrm{tg}\, x} \cdot \mathrm{arctg}^5\, 3x$
Вариант 29		
1) $y = 3\sqrt[3]{2x+3} - \cos^3 2x$	2) $y = \ln(\arcsin 2x)$	3) $y = e^{-2x} \cdot (x^4 - 3)$
4) $y = e^{\sin 2x} - 3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - ?$	5) $y = \dfrac{2x^3 - 5x}{x^4 - 3x + 2}$	6) $y = \left(\dfrac{2}{x} + x^{-3} - 3x + 2\right)^{1/5}$
7) $y = 3^{-x^2+5x}$	8) $y = -2\cos^3 \dfrac{\pi}{6} x$	9) $y = e^{-3t}(2\cos 2t - 5\sin 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = \dfrac{7}{x} + \dfrac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6$	11) $y = \dfrac{\ln^3 x}{\mathrm{ctg}\,(x-3)}$	12) $y = \sin^5 3x \cdot \mathrm{arctg}\, \sqrt{x}$
Вариант 30		
1) $y = 3\sqrt[3]{2x+3} - \cos^3 2x$	2) $y = \dfrac{2x^3 - 5x}{x^4 - 3x + 2}$	3) $y = 3^{-x^2+5x}$
4) $y = e^{\sin 2x} - 3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - ?$	5) $y = e^{-2x} \cdot (x^4 - 3)$	6) $y = \left(\dfrac{2}{x} + x^{-3} - 3x + 2\right)^{1/5}$
7) $y = \ln(\arcsin 2x)$	8) $y = -2\cos^3 \dfrac{\pi}{6} x$	9) $y = e^{-3t}(2\cos 2t - 5\sin 2t)$, $y'(0) - ?$
10) $y = \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}$	11) $y = \dfrac{\mathrm{tg}^4\, 5x}{\ln(x+7)}$	12) $y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2$

Задание 3. Найти производные следующих функций:

Вариант 1	
1) $y = \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$	2) $y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$
3) $y = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$	4) $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$
5) $y = \mathrm{arctg}\, \dfrac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x}{\sqrt{2}}$	6) $y = \dfrac{1}{24}(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \dfrac{x^4}{16}\arcsin \dfrac{2}{x}$
7) $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$	8) $y = \dfrac{1}{\sin a}\ln(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, a)$

Вариант 2	
1) $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$	2) $y=e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)/8$
3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	4) $y=\cos\ln 2-\dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$
5) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$	6) $y=\dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}$
7) $y=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$	8) $y=x\cos a+\sin a\ln\sin(x-a)$
Вариант 3	
1) $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$	2) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-3}{2}$
3) $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$	4) $y=\operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$
5) $y=\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\dfrac{9}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$	6) $y=2x-\ln(1+\sqrt{1-e^{4x}})-e^{-2x}\arcsin(e^{2x})$
7) $y=x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1}+3\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	8) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sin\ln x-(\sqrt{2}-1)\cos\ln x)x^{\sqrt{2}+1}$
Вариант 4	
1) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$	2) $y=\dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$
3) $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$	4) $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$
5) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	6) $y=\sqrt{9x^2-12x+5}\cdot\operatorname{arctg}(3x-2)-\ln(3x-2+$ $+\sqrt{9x^2-12x+5})$
7) $y=x^3\arcsin x+\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$	8) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}$
Вариант 5	
1) $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$	2) $y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$
3) $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$	4) $y=\dfrac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$
5) $y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$	6) $y=\dfrac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$
7) $y=3\arcsin\dfrac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$	8) $y=3\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+2\dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$

Вариант 6	
1) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$	2) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$
3) $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$	4) $y=\dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$
5) $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}}$	6) $y=\dfrac{x^4}{81}\arcsin\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}$
7) $y=\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	8) $y=(a^2+b^2)^{-1/2}\arcsin\dfrac{(a^2+b^2)\sin x}{b}$
Вариант 7	
1) $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$	2) $y=\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg}(e^x)$
3) $y=\ln^2(x+\cos x)$	4) $y=\dfrac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$
5) $y=\dfrac{(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}}{2}-9\arccos\sqrt{\dfrac{x-1}{6}}$	6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}$
7) $y=3\arcsin\dfrac{2}{3x+4}+2\sqrt{9x^2+24x+12}$	8) $y=\dfrac{7^x(3\sin 3x+\cos 3x\ln 7)}{(9+\ln^2 7)}$
Вариант 8	
1) $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$	2) $y=\ln(e^x+1)+\dfrac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$
3) $y=\ln^3(1+\cos x)$	4) $y=\cos\operatorname{ctg} 2-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$
5) $y=\dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}+\dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$	6) $y=3x-\ln(1+\sqrt{1-e^{6x}})-e^{-3x}\arcsin(e^{3x})$
7) $y=x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	8) $y=\ln\dfrac{\sin x}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$
Вариант 9	
1) $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$	2) $y=2(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1})/\ln 2$
3) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$	4) $y=\operatorname{ctg}\cos 2+\dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$
5) $y=\dfrac{x^3}{3}\arccos x-\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$	6) $y=\ln(3x-1+\sqrt{16x^2-8x+2})-$ $-\sqrt{16x^2-8x+2}\cdot\operatorname{arctg}(4x-1)$
7) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$	8) $y=\dfrac{1}{a(1+a^2)}\operatorname{arctg}(a\cos x)+a\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

Вариант 10	
1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$	2) $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$
3) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$	4) $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$
5) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	6) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\dfrac{4}{2x+1}\arcsin\sqrt{-x-x^2}$
7) $y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}$	8) $y=-\dfrac{1}{3\sin^3 x}-\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$
Вариант 11	
1) $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$	2) $y=e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)/(\alpha^2+\beta^2)$
3) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$	4) $y=\dfrac{1}{3}\cos\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$
5) $y=\dfrac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)}+3\arccos\sqrt{\dfrac{x}{2}}$	6) $y=(2x+3)^4\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+$ $+\dfrac{2}{3}(4x^2+12x+11)\sqrt{x^2+3x+2}$
7) $y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x})$	8) $y=2x^3-\ln(1+e^{2x})-2e^{x/2}\operatorname{arctg}(e^{-x/2})$
Вариант 12	
1) $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$	2) $y=e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x-\alpha\cos\beta x)/(\alpha^2+\beta^2)$
3) $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)+a^{\pi^{\sqrt{2}}}$	4) $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$
5) $y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}$	6) $y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}$
7) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{3\sqrt{3}}$	8) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}x+x}{1-x\operatorname{ctg}x}$
Вариант 13	
1) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$	2) $y=e^{ax}\left[\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$
3) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$	4) $y=8\sin\operatorname{ctg}3+\dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$
5) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	6) $y=5x-\ln(1+\sqrt{1-e^{10x}})-e^{-5x}\arcsin(e^{5x})$
7) $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^3-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$	8) $y=\dfrac{1}{2\sin(a/2)}\operatorname{arctg}\dfrac{2x\sin(a/2)}{1-x^2}$

Вариант 14	
1) $y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$	2) $y = x + 1/(1+e^x) - \ln(1+e^x)$
3) $y = \log_{16}\log_5 \operatorname{tg} x$	4) $y = \frac{\cos\operatorname{ctg}3\cdot\cos^2 14x}{\sin 28x}$
5) $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{\arccos x}{2x^2}$	6) $y = \sqrt{x^2-8x+17}\cdot\operatorname{arctg}(x-4) - \ln(x-4+\sqrt{x^2-8x+17})$
7) $y = 4\arcsin\frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2+12x-7}$	8) $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x}$
Вариант 15	
1) $y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$	2) $y = 3\ln[(1+e^{x/6})\sqrt{(1+e^{x/3})} - 3\operatorname{arctg} e^{x/6}$
3) $y = \log_4\log_2\operatorname{tg} x$	4) $y = \frac{\cos\operatorname{ctg}(1/3)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$
5) $y = 6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$	6) $y = \ln\frac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x} + \frac{2}{2-x}\arcsin\sqrt{-3+4x-x^2}$
7) $y = 2\arcsin\frac{4}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3}$	8) $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}$
Вариант 16	
1) $y = \frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$	2) $y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}$
3) $y = (\cos\ln x + \sin\ln x)/2$	4) $y = \frac{\sin\operatorname{tg}(1/7)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$
5) $y = \frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}-1}$	6) $y = (3x^2-4x+2)\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x-2)^4\arcsin\frac{1}{3x-2}$
7) $y = (2+3x)\sqrt{x-1} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	8) $y = \frac{6^x(\sin 4x\ln 6 - 4\cos 4x)}{16+\ln^2 6}$
Вариант 17	
1) $y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$	2) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1} + \arcsin(e^{-x})$
3) $y = \ln\cos\frac{2x+3}{2x+1}$	4) $y = \frac{\operatorname{ctg}\sin(1/3)\sin^2 17x}{17\cos 34x}$
5) $y = \frac{(1+x)\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}$	6) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{x^2-2x+3}$

7) $y=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\ln(\sqrt{x+1}+1)$	8) $y=\operatorname{arctg}\frac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}$
Вариант 18	
1) $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+1/x}$	2) $y=x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln(x+\sqrt{1-e^{2x}})$
3) $y=\lg\ln\operatorname{tg}x$	4) $y=\frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$
5) $y=\frac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$	6) $y=\ln(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1})-\arcsin(e^{-5x})$
7) $y=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$	8) $y=\frac{5^x(2\sin 2x+\cos 2x\ln 5)}{4+\ln^2 5}$
Вариант 19	
1) $y=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$	2) $y=x-\ln(1+e^x)-\frac{2\operatorname{arctg}(e^{x/2})}{e^{x/2}}-(\operatorname{arctg}(e^{x/2}))^2$
3) $y=\log_a\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$	4) $y=\frac{\operatorname{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$
5) $y=\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}$	6) $y=\ln(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10})-$ $-\sqrt{4x^2-12x+10}\cdot\operatorname{arctg}(2x-3)$
7) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-1}\right)\operatorname{arctg}x$	8) $y=\ln\frac{\sqrt{2}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}-\operatorname{tg}x}$
Вариант 20	
1) $y=\frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$	2) $y=3e^{\sqrt[3]{x}}[\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-6\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120]$
3) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$	4) $y=\operatorname{ctg}\cos 5-\frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$
5) $y=\operatorname{arctg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$	6) $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2}+\frac{2}{x+2}\arcsin\sqrt{-3-4x-x^2}$
7) $y=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)$	8) $y=\frac{3^x(4\sin 4x+\ln 3\cos 4x)}{16+\ln^2 3}$
Вариант 21	
1) $y=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$	2) $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$
3) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$	4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}4}+\frac{1}{21}\frac{\sin^2 21x}{\cos 42x}$
5) $y=\arcsin\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$	6) $y=\frac{2}{3}(4x^2-4x+3)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\frac{1}{2x-1}$

7) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$	8) $y=\dfrac{4^x(\ln 4\sin 4x-4\cos 4x)}{16+\ln^2 4}$
Вариант 22	
1) $y=2\sqrt{(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})}$	2) $y=e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)$
3) $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$	4) $y=\cos\ln 13-\dfrac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$
5) $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}$	6) $y=\dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}$
7) $y=3\arcsin\dfrac{3}{x+2}+\sqrt{x^2+4x-5}$	8) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$
Вариант 23	
1) $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$	2) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$
3) $y=\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})$	4) $y=\ln\cos\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{23}\dfrac{\sin^2 23x}{\cos 46x}$
5) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$	6) $y=\arcsin(e^{-4x})+\ln(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1})$
7) $y=\sqrt{(3-x)(2+x)}+5\arcsin\sqrt{\dfrac{x+2}{5}}$	8) $y=\dfrac{5^x(\sin 3x\ln 5-3\cos 3x)}{9+\ln^2 5}$
Вариант 24	
1) $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$	2) $y=e^{\sin x}\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)$
3) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$	4) $y=\operatorname{ctg}\sin\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$
5) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$	6) $y=\ln(5x+\sqrt{25x^2+1})-\sqrt{25x^2+1}\cdot\operatorname{arctg} 5x$
7) $y=x(\arcsin x)^2-\dfrac{x^2+2}{3}\arcsin x-2x$	8) $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}(e^{x/2})$
Вариант 25	
1) $y=3\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)^2}$	2) $y=\dfrac{e^x}{2}[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]$
3) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	4) $y=\sin\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{25}\dfrac{\sin^2 25x}{\cos 50x}$
5) $y=(2x^2+6x+5)\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-x$	6) $y=\dfrac{2}{3x-2}\arcsin\sqrt{-3+12x-9x^2}+$ $+\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}$

7) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x$	8) $y=\frac{2^x(\sin x-\cos x\ln 2)}{1+(\ln 2)^2}$
Вариант 26	
1) $y=(x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7})$	2) $y=\mathrm{arctg}(e^x-e^{-x})$
3) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$	4) $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\frac{1}{52}\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$
5) $y=\frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x}+\frac{1}{8}\ln(1-4x^2)$	6) $y=(3x+1)^4\arcsin\frac{1}{3x+1}+(3x^2+2x+1)\sqrt{9x^2+6x}$
7) $y=x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$	8) $y=\frac{\ln(\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,a)}{\sin a}$
Вариант 27	
1) $y=(x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$	2) $y=\frac{e^{x^3}}{1+x^3}$
3) $y=\frac{\sqrt{5}+\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\mathrm{tg}(x/2)}$	4) $y=\sqrt[7]{\mathrm{tg}\cos 2}+\frac{1}{27}\frac{\sin^2 27x}{\cos 54x}$
5) $y=(2x^2-x+\frac{1}{2})\,\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{x^3}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x$	6) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+\frac{2x+1}{4x^2+4x+3}$
7) $y=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}$	8) $y=2\frac{\cos x}{\sin^4 x}+3\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
Вариант 28	
1) $y=(x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4})$	2) $y=-e^{3x}/(3\,\mathrm{sh}^3 x)$
3) $y=\ln\frac{\ln x}{\sin(1/x)}$	4) $y=\sin\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,2}-\frac{1}{56}\frac{\cos^2 28x}{\sin 56x}$
5) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x$	6) $y=\ln(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1})+\arcsin(e^{-3x})$
7) $y=\frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin\frac{x}{2}$	8) $y=\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}}$
Вариант 29	
1) $y=((x+3)\sqrt{2x-1})/(2x+7)$	2) $y=\arcsin(e^x)-\sqrt{1-e^{2x}}$
3) $y=\ln\ln\sin(1+1/x)$	4) $y=\cos^2\sin 3+\frac{1}{29}\frac{\sin^2 29x}{\cos 58x}$
5) $y=\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x}-\sqrt{2}\ln(1+x)$	6) $y=\sqrt{49x^2+1}\cdot\mathrm{arctg}\,7x-\ln(7x+\sqrt{49x^2+1})$
7) $y=\arcsin\frac{1}{2x+3}+2\sqrt{x^2+3x+2}$	8) $y=\frac{3^x((\ln 3)\sin 2x-2\cos 2x)}{\ln^2 3+4}$

Вариант 30	
1) $y=(3x+\sqrt{x})/(\sqrt{x^2+2})$	2) $y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$
3) $y=\ln\ln^3\ln^2 x$	4) $y=\sin^3\cos 2-\frac{1}{60}\frac{\cos^2 30x}{\sin 60x}$
5) $y=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}$	6) $y=\frac{1}{x}\arcsin\sqrt{1-4x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$
7) $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	8) $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{3\cos^3 x}$

Задание 4. Составить уравнение нормали (в вариантах 1–12) или уравнение касательной (в вариантах 13–30) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y=\frac{4x-x^2}{4},\quad x_0=2$	2	$y=2x^2+3x-1,\quad x_0=-2$
3	$y=x-x^3,\quad x_0=-1$	4	$y=x^2+8\sqrt{x}-32,\quad x_0=4$
5	$y=x+\sqrt{x^3},\quad x_0=1$	6	$y=\sqrt[3]{x^2}-20,\quad x_0=-8$
7	$y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\quad x_0=4$	8	$y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16$
9	$y=2x^2-3x+1,\quad x_0=1$	10	$y=\frac{x^2-3x+6}{x^2},\quad x_0=3$
11	$y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\quad x_0=64$	12	$y=\frac{x^3+2}{x^3-2},\quad x_0=2$
13	$y=2x^2+3,\quad x_0=-1$	14	$y=\frac{x^{29}+6}{x^4+1},\quad x_0=1$
15	$y=2x+\frac{1}{x},\quad x_0=1$	16	$y=-\frac{2\left(x^8+2\right)}{3\left(x^4+1\right)},\quad x_0=1$
17	$y=\frac{x^5+1}{x^4+1},\quad x_0=1$	18	$y=\frac{x^{16}+9}{1-5x^2},\quad x_0=1$
19	$y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right),\quad x_0=1$	20	$y=\frac{1}{3x+2},\quad x_0=2$
21	$y=\frac{x}{x^2+1},\quad x_0=-2$	22	$y=\frac{x^2-3x+3}{3},\quad x_0=3$

23	$y=\dfrac{2x}{x^2+1}, \quad x_0=1$	24	$y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right), \quad x_0=1$
25	$y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0=1$	26	$y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2, \quad x_0=1$
27	$y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}, \quad x_0=1$	28	$y=\dfrac{3x-2x^3}{3}, \quad x_0=1$
29	$y=\dfrac{x^2}{10+3x}, \quad x_0=2$	30	$y=\dfrac{x^2-2x-3}{4}, \quad x_0=4$

Задание 5. Найти углы, под которыми пересекаются указанные линии:

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
1	$y=\dfrac{1}{x}, \quad y=x$	2	$y=x^2-5x, \quad y+x+3=0$
3	$x^2+4y^2=4, \quad 4y=4-5x^2$	4	$y=2x-x^2, \quad y+3x-4=0$
5	$x^2+4y^2=16, \quad x^2-y^2=6$	6	$y^2=4x, \quad x^2=\dfrac{1}{2}y$
7	$y=(x-2)^2, \quad y=-4+6x-x^2$	8	$x^2+y^2=8, \quad y^2=2x$
9	$x^2+y^2=2, \quad x=y$	10	$y=x^2, \quad y=x$
11	$y=\sin x, \quad y=\cos x$	12	$xy=a^2, \quad x^2-y^2=b^2$
13	$y=x^2, \quad y=x^3$	14	$y=(x-2)^2, \quad y=-4+6x-x^2$
15	$y=e^{0,5x}, \quad x=2$	16	$y=\cos x, \quad y=0$
17	$y=\sin x, \quad y=0.5$	18	$y=\sin x, \quad y=0$
19	$2y=x^2, \quad 2y=8-x^2$	20	$y=\cos x, \quad y=0.5$
21	$y=\dfrac{x^2}{4}, \quad 2y-3x+4=0$	22	$y=1-x^2, \quad y=0$
23	$y=\ln(x+1), \quad y=0$	24	$x^2+y^2=2, \quad y^2=x$

25	$x^2+y^2+2x-4y-20=0$, $x-y-4=0$	26	$x^2+y^2-8xy+4x-6y+8=0$, $5x-y-4=0$
27	$11x^2-y^2-16xy-26x+22y+10=0$, $x-1=0$	28	$x^2+y^2+4xy-8x+2y-9=0$, $x-y+1=0$
29	$x^2+y^2-3xy-4x+6y-1=0$, $x+y-2=0$	30	$x^2+y^2+2xy-8x+8y+16=0$, $3x-y-4=0$

Задание 6. Определить, в каких точках заданной линии L касательная к этой линии параллельна прямой $y=kx$ и написать уравнение этой касательной.

Вариант	Уравнение линии L	k	Вариант	Уравнение линии L	k
1	$y^2=x$	0,25	16	$y^2=x$	–0,25
2	$x^2+y^2=52$	$\frac{4}{3}$	17	$x^2+y^2=52$	$-\frac{4}{3}$
3	$y=\frac{3x}{x+1}$	3	18	$y=\frac{3x}{x+1}$	$\frac{1}{3}$
4	$y=-\frac{1}{x}$	1	19	$y=-\frac{1}{x}$	0,25
5	$x^2+y^2=2x$	1	20	$x^2+y^2=2x$	–1
6	$x^2-y^2=1$	2	21	$x^2-y^2=1$	–2
7	$y=\frac{x+9}{x+5}$	–1	22	$y=\frac{x+9}{x+5}$	1
8	$y=x-\sqrt{x}$	0	23	$y=x-\sqrt{x}$	–1
9	$7x^2-2y^2=14$	2	24	$7x^2-2y^2=14$	–2
10	$y=2x-x^2$	3	25	$y=2x-x^2$	–3
11	$y=x^2-2x$	2	26	$y=x^2-2x$	–2
12	$y=1-\frac{1}{x}$	1	27	$y=1-\frac{1}{x}$	0,25
13	$x^2+y^2=1$	–1	28	$x^2+y^2=1$	1
14	$x^2+3y^2-2x=0$	0	29	$x^2+3y^2-2x=0$	1
15	$y=4-x^2$	–2	30	$y=4-x^2$	2

Задание 7. Решить задачу:

Вариант	Условие задачи
1	Тело движется прямолинейно так, что $S^2 = 5t$. Определить ускорение движения в конце 5 секунды.
2	Точка массы *m* колеблется по оси *Ox* так, что в момент времени *t* ее отклонение *x* от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки.
3	Зависимость между количеством *x* вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем *t* выражается уравнением $x = A(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.
4	Количество электричества, протекшего через проводник, начиная с момента времени *t* = 0, дается формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов). Найти силу тока в конце 5-й секунды.
5	Тело движется по прямой *OX* по закону $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление?
6	Тело движется по параболе $y = 5 - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется с течением времени *t* по закону $x = at^2$. С какой скоростью изменяется ордината точки.
7	Зависимость между количеством *X* вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем *t* выражается уравнением $X = A(1 - 2e^{-3kt})$. Определить скорость реакции.
8	Угол поворота шкива в зависимости от времени *t* задан функцией $\alpha = 3t^2 - 5t - 3$. Найти угловую скорость при *t* =5 сек.
9	Точка движется прямолинейно так, что $V^2 = 2ax$, где *V* – скорость, *x* – пройденный путь, *a* = const. Найти ускорение движения.
10	Движение точки по оси *Ox* определяется формулой $X = (t - 2)^2 e^{-t}$. Определить скорость движения точки в конце 3-й секунды.
11	Точка движется по прямой так, что расстояние *S* от начального пункта через *t* секунд равно $S = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. Найти скорость и ускорение движения. В какой момент скорость равна 0?
12	Тело движется по прямой *OX* по закону $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление?
13	Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за *t* сек. поворачивается на угол $\varphi = \grave{a} + bt - ct^2$, где *a, b, c* – положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения. Когда колесо остановится?
14	Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\cos\omega t$. Определить скорость и ускорение движения точки при

	$t = \frac{\pi}{10}$.
15	Зависимость количества вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q = a(1 + be^{-mt})$. Определить скорость и ускорение реакции.
16	Тело массой в 5 кг движется прямолинейно по закону $S = 2 + t^2 + 4t^3$, определить кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ тела через 3 секунды после начала движения.
17	Тело массой в 3 кг движется прямолинейно по закону $S = 2 + t^2 + 4t^3$, определить кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ тела через 5 с после начала движения.
18	Угол поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\alpha = 3t^2 - 5t - 3$. Найти угловую скорость при t =8 сек.
19	Угол θ, на который поворачивается колесо через t секунд, равен $\theta = at^2 - bt + c$, где a, b, c – положительные постоянные. Найти угловую скорость движения колеса. Через сколько времени угловая скорость будет равна 0?
20	Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = 3\cos 4\omega t$. Определить скорость и ускорение движения точки при $t = \frac{\pi}{10}$.
21	Точка движется по прямой так, что расстояние S от начального пункта через t секунд равно $S = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. Найти скорость и ускорение движения. В какой момент скорость равна 0?
22	Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t сек. поворачивается на угол $\varphi = \grave{a} + bt - ct^2$, где a, b, c – положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения. Когда колесо остановится?
23	Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени t =0, дается формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов). Найти силу тока в конце 6-й секунды.
24	Точка массы m колеблется по оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки.
25	Движение точки по оси Ox определяется формулой $X = (t-2)^2 e^{-t}$. Определить скорость движения точки.
26	Зависимость количества вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q = a(1 + be^{-mt})$. Определить скорость и ускорение реакции.
27	Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\sin \omega t$. Определить скорость и ускорение движения точки при

	$t=\frac{2\pi}{\omega}$.
28	Тело движется по параболе $y=5-x^2$ так, что ее абсцисса изменяется с течением времени t по закону $x=at^2$. С какой скоростью изменяется ордината точки.
29	Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x=A\sin\omega(t+\pi)$. Определить скорость и ускорение движения точки при $t=\frac{2\pi}{\omega}$.
30	Тело движется прямолинейно так, что $S^2=5t$. Определить ускорение движения в конце 7 секунды.

Задание 8. Найти производную функций:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	1) $y=(\mathrm{arctgx})^{(1/2)\ln\operatorname{arctg}x}$; 2) $y=(x^2-3)^{\sqrt{x^2-3}}$; 3) $y=\frac{\sqrt{x+3}(x-2)^5}{(x+6)^2}$	2	1) $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$; 2) $y=(x^2-3)^{\sqrt[3]{2x}}$; 3) $y=\frac{(x-2)^5(x+1)^3}{(x+6)^2}$
3	1) $y=(\sin x)^{5e^x}$; 2) $y=(3x)^{e^{-x^2}}$; 3) $y=\frac{(x-5)^5(x+1)^3}{\sqrt{(x+2)^5}}$	4	1) $y=(\arcsin x)^{e^x}$; 2) $y=\left(\sqrt{x^2-3}\right)^{\operatorname{tg}2x}$; 3) $y=\frac{\sqrt{x+1}(x-2)^{25}}{(x-1)^3}$
5	1) $y=(\ln x)^{3^x}$; 2) $y=\left(\sqrt[3]{1-2x^2}\right)^{3x}$; 3) $y=\frac{(x-3)^2(x+2)^3}{(x+1)^2}$	6	1) $y=x^{\arcsin x}$; 2) $y=(\operatorname{tg}3x)^{x^2-1}$; 3) $y=\frac{\sqrt{x+3}(x-1)^3}{(x+2)^2}$
7	1) $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$; 2) $y=(x^3)^{\sqrt{x-3}}$; 3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(x-1)^3}{(x+5)^2}$	8	1) $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$; 2) $y=(\cos 3x)^{2x}$; 3) $y=\frac{(x-1)^3(x+1)^2}{\sqrt{(x+2)^3}}$
9	1) $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$; 2) $y=(x^3+1)^{2x}$;	10	1) $y=(\cos 5x)^{e^x}$; 2) $y=(x^3)^{\operatorname{tg}2x}$;

	3) $y=\dfrac{(x-1)^4(x+1)^3}{\sqrt{(x+3)^3}}$		3) $y=\dfrac{(x-2)^5x^3}{(x+1)^2}$
11	1) $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$; 2) $y=\left(x^3+2\right)^{x^2+4}$; 3) $y=\dfrac{(x-1)^5(x+1)^2}{(x+2)^2}$	12	1) $y=(x-5)^{\cos x}$; 2) $y=\left(x^2-3x\right)^{x^3+1}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}(x+2)^3}{(x+1)^2}$
13	1) $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$; 2) $y=\sqrt[x]{x}$; 3) $y=\dfrac{(x-1)^3(x+1)^2}{x^5}$	14	1) $y=x^{\sin x^3}$; 2) $y=\left(x^2-3x+1\right)^{2x}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}(x-1)^3}{(x-2)^2}$
15	1) $y=(x^2-1)^{\sin x}$; 2) $y=\left(2x+5\right)^{1/x}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(x-2)^5}{(x+1)^4}$	16	1) $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$; 2) $y=\left(3x^2-1\right)^{x^3}$; 3) $y=\dfrac{x^5(x+2)^3}{\sqrt{(x+1)^3}}$
17	1) $y=(\sin x)^{5^{x/2}}$; 2) $y=(3x+2)^{x^2-3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x-4}(x-1)^5}{(x+3)^3}$	18	1) $y=(x^2+1)^{\cos x}$; 2) $y=\left(3-x^2\right)^{5x}$; 3) $y=\dfrac{(x+4)^5(x-1)^3}{(x+1)^2}$
19	1) $y=x^{19}\cdot 19^{x^{19}}$; 2) $y=(2x-1)^{x^3+x}$; 3) $y=\dfrac{(x-2)(x+2)^2}{\sqrt{(x+1)^5}}$	20	1) $y=x^{3^x}2^x$; 2) $y=\left(2x-3\right)^{x^2+1}$; 3) $y=\dfrac{(x-4)^3(x+1)^3}{(x+3)^5}$
21	1) $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{(1/x)}}$; 2) $y=\left(3x+2\right)^{x^2-1}$; 3) $y=\dfrac{x^5(x-1)^3}{(x-3)^3}$	22	1) $y=x^{e^{\operatorname{ctg}x}}$; 2) $y=\left(x^3-x\right)^{x^2-3}$; 3) $y=\dfrac{(x+2)^2(x+1)^3}{\sqrt{(x+3)^3}}$
23	1) $y=x^{e^{\cos x}}$; 2) $y=\left(2x+3\right)^{-x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x}(x-2)^3}{(x+6)^2}$	24	1) $y=x^{2^x}5^x$; 2) $y=\left(x^3-2\right)^{3x}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(x-5)^2}{(x+1)^3}$
25	1) $y=x^{e^{\sin x}}$; 2) $y=\left(3x\right)^{x^3+2}$;	26	1) $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln\operatorname{tg}(x/4)}$; 2) $y=(-3x+2)^{2x^3}$;

	3) $y = \dfrac{x^5(x-1)^3}{(x+2)^2}$		3) $y = \dfrac{(x+5)^2(x+1)^3}{\sqrt{(x-2)^3}}$
27	1) $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$; 2) $y = \left(2x - x^2\right)^{3x}$; 3) $y = \dfrac{(x-3)^3(x+1)^2}{(x+2)^2}$	28	1) $y = (x^8+1)^{\operatorname{tg} x}$; 2) $y = \left(2x^3+5\right)^{-x^2}$; 3) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}\,(x-3)^5}{x^2}$
29	1) $y = x^{29^x} x^{29}$; 2) $y = \left(\sqrt{x}-3\right)^{2x}$; 3) $y = \dfrac{(x-1)^5 x^3}{\sqrt{(x+1)^3}}$	30	1) $y = (\cos 2x)^{\ln(\cos(2x)/4)}$; 2) $y = \left(3+x^2\right)^{-x^3}$; 3) $y = \dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{x^2}$

Задание 9. Найти производную:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y = \sqrt{2-5x} + 2^{-\sin x^3} + x^{\frac{2}{x}}$	2	$y = \sqrt{1-5x^2} + e^{-\operatorname{tg}^3 x} + 2x^{\sqrt{x}}$
3	$y = \sqrt[5]{5x^3+8x} + 2^{-\frac{2}{x}} + (\sin x)^{\frac{2}{x}}$	4	$y = \sqrt[5]{5x^3+8x} + \dfrac{1}{e^{x^3}} + (\operatorname{tg} x)^{\frac{2}{x}}$
5	$y = \sqrt[3]{1-3x^3} + \dfrac{1}{e^{-x}+1} + x^{2\sqrt{x}}$	6	$y = \sqrt[3]{x+x^3} + \dfrac{1}{e^{-x^2}+1} + x^{\sin x}$
7	$y = \sqrt[7]{3x-2x^3} + \dfrac{1}{\sin 3x+1} + (\sin x)^{2\sqrt{x}}$	8	$y = \sqrt[7]{1-2x^4} + \dfrac{3x}{\sin 3x} + (\cos x)^{\frac{1}{x}}$
9	$y = \sqrt[7]{x-2x^4} + \dfrac{3}{\operatorname{tg}^2 3x} + (2x)^{\operatorname{tg} x}$	10	$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-4x}} + e^{1-2x^5} + (x)^{\cos x}$
11	$y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x-4x^3}} + e^{\sin x - x^2} + (\cos x)^x$	12	$y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{5-2x}} + e^{\sin 5x^2} + (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$
13	$y = \dfrac{1}{\sqrt[6]{3-4x}} + 2^{\cos x^2} + (\ln x)^{\frac{1}{x}}$	14	$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-4x^5}} + \sin\dfrac{2}{x^2} + (x)^{\ln x}$
15	$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-x^3}} + \operatorname{tg}\dfrac{1}{x^4} + (x)^{\frac{2}{x}}$	16	$y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-\sin^2 x}} + \cos\dfrac{2}{x} + x^{\sqrt{3x}}$
17	$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}} + \operatorname{tg}\dfrac{2}{x} + (\sqrt{3x})^x$	18	$y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-2x^2}} + \cos^4 2x + x^{\sqrt[3]{x}}$
19	$y = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x-3x^5}} + \operatorname{tg}^4 2x + (x)^{\operatorname{tg} x}$	20	$y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x-x^7}} + \arcsin^3 2x + x^{1-2x}$

21	$y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1 - \ln x}} + \arccos^2 6x + x^{1-x}$	22	$y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1 - \ln^2 x}} + \mathrm{arctg}^2\, x + x^{-x^4}$
23	$y = \dfrac{1}{x + \sqrt{x}} + 3^{\sin^2 x - 2} + x^{-3x}$	24	$y = \dfrac{1}{x^4 - \sqrt{x}} + 2^{\mathrm{tg}^2 6x} + x^{-x^3}$
25	$y = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x^2 - 1}} + 3^{\mathrm{tg}\, x - x} + (\mathrm{tg}\, x)^{\sin x}$	26	$y = \dfrac{5}{\sqrt{2 \ln x^2}} + 3^{-\cos x} + (\mathrm{tg}\, x)^{\cos x}$
27	$y = \sqrt[3]{1 - \ln x^3} + \dfrac{1}{e^x - 1} + x^{2\sqrt{x}}$	28	$y = \sqrt[5]{\ln x - x^3} + \dfrac{1}{e^x + x^2} + x^{\sin x}$
29	$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3 - x}} + e^{\cos x^5} + (x)^{\arccos x}$	30	$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x - 3}} + e^{\sin x^2} + (x)^{\mathrm{arcctg}\, x}$

Задание 10. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ неявной функции, заданной уравнением $f(x, y) = 0$.

Вариант	Задание 1	Задание 2
1	$x \sin y - y^2 \cos x = 0$	$3^x + 3^y = 3 \cdot (x - y)$
2	$\cos(x + y) + y^2 = 0$	$e^{\frac{x}{y}} + x = y$
3	$\sin(x - y) + y^2 = 0$	$(x + 2y)^4 = \mathrm{tg}(xy)$
4	$\sin(xy) - \dfrac{y}{x} = 0$	$y = x^{3y^2}$
5	$\sin(xy) + y^2 = 0$	$y^4 + x^4 = \ln \dfrac{x}{y}$
6	$\cos(xy) + y^2 = 0$	$x \cos y = y \cos x$
7	$xe^{y^2} + y^2 = 0$	$\sin(x + y) = y^2$
8	$ye^{x^2} + y^3 x = 0$	$\sin(xy) = x + y$
9	$xe^{xy} + y^2 = 0$	$\dfrac{y}{x} = \arccos(x - y)$
10	$xe^{\frac{y}{x}} + y^2 = 0$	$e^y \sin x = \sin(x + y)$
11	$xy^3 + y^2 \ln x = 0$	$\mathrm{arcctg}(xy) = x^3 y^2$
12	$xy^3 + y^2 \sin x = 0$	$\dfrac{y}{x} = \arccos(x - y)$
13	$xy^3 + y^2 \cos x = 0$	$y \ln y = x^2 + 3$
14	$y^3 + y^2\, \mathrm{tg}\, x = 0$	$xy^3 + \cos(x - y) = 0$
15	$x^3 y^2 + \cos y = 0$	$y = \arcsin xy$
16	$x^3 y^2 + \sin y = 0$	$y = (1 + x)^y$

17	$y^2\cos 3x + y = 0$	$y^3 = \arccos\,(x-y)$
18	$y^2\sin\,3x - y = 0$	$x - y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$
19	$x\sin\,y + y^2 = 0$	$e^x\sin\,y - e^y\cos\,x = 0$
20	$x\cos\,y + y^2 = 0$	$y + x = \sin(\,x - y)$
21	$x^2\cos\,y + y^2 = 0$	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
22	$x^3e^y + y^2 = 0$	$(x+y)^2 = \sin\,y$
23	$x^2e^y - y^3 = 0$	$yx\sin + y\sin\,x = y^3$
24	$x\cos\,y^2 - y^2 = 0$	$y^2\sin\,(x+y) = 2$
25	$x\sin\,y^2 - y^2 = 0$	$e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$
26	$xe^y + x^2y = 0$	$y^5 - x^4 = \sin\,(xy)$
27	$xe^{\frac{y}{x}} + y = 0$	$y^3\cos\,x = x^3\sin\,y$
28	$xe^{xy^2} + y = 0$	$xy = \operatorname{arctg}\,\dfrac{x}{y}$
29	$x\cos\,y^2 + y = 0$	$x^4 + y^4 = x^2y^2$
30	$x\sin\,y^2 + y = 0$	$\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0$

Задание 11. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Вариант 1		
1) $\begin{cases} x = e^{-t^3}, \\ y = t - 0{,}5\sin^2 2t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \ln\sin\,t, \\ y = \operatorname{tg}\,t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = (3t^2+1)/(3t^3), \\ y = \sin(\,t^3/3 + t) \end{cases}$
Вариант 2		
1) $\begin{cases} x = \cos^2 3t, \\ y = t^3 + 2^{1-t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \operatorname{tg}\,\sqrt{1+t} \end{cases}$
Вариант 3		
1) $\begin{cases} x = \sin^2 3t \\ y = 2t^2 - e^{-t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = e^{2t}\cos\,3t, \\ y = e^{2t}\sin\,3t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = 1/\sqrt[3]{(t-1)^2} \end{cases}$
Вариант 4		

1) $\begin{cases} x = e^{1-3t}, \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t)), \\ y = \arccos(\cos t) \end{cases}$
Вариант 5		
1) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = \operatorname{tg}^2 \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\ y = t\sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$
Вариант 6		
1) $\begin{cases} x = e^{-7t}, \\ y = \cos^2 \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1) \end{cases}$
Вариант 7		
1) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = \sin^2 \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} x, \\ y = \cos^2 x \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln\operatorname{tg}(e^t) \end{cases}$
Вариант 8		
1) $\begin{cases} x = e^{-4t} \\ y = \operatorname{ctg}^2 \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln\operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t \end{cases}$
Вариант 9		
1) $\begin{cases} x = e^{-t^3}, \\ y = \cos \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = 2t \cos t, \\ y = 2t \sin t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t + 1} \end{cases}$
Вариант 10		
1) $\begin{cases} x = \ln^3 t, \\ y = \sin^2 \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = a^t - 1, \\ y = 1 - 6t^2 \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln \sqrt{(1-t)/(1+t)}, \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$
Вариант 11		
1) $\begin{cases} x = \ln^4 2t, \\ y = \cos^2 \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln(1/\sqrt{1 - t^4}), \\ y = \arcsin((1 - t^2)/(1 + t^2)) \end{cases}$
Вариант 12		
1) $\begin{cases} x = \ln^3 2t, \\ y = \operatorname{tg} \dfrac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a \cos t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = t/\sqrt{1 - t^2} \end{cases}$
Вариант 13		
1) $\begin{cases} x = \ln^4(1 - 3t), \\ y = \operatorname{tg} 2t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 1 - 4t^2 \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{1 - t^2}, \\ y = (\arccos t)^2 \end{cases}$

Вариант 14		
1) $\begin{cases} x = \ln(1-5t), \\ y = \mathrm{tg}^3\, 3t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = t/\sqrt{1-t^2}, \\ y = \ln((1+\sqrt{1-t^2})/t) \end{cases}$
Вариант 15		
1) $\begin{cases} x = \ln(1-7t), \\ y = \mathrm{tg}^2\, 4t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + t^3 \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \cos t/\sin^2 t \end{cases}$
Вариант 16		
1) $\begin{cases} x = e^{\frac{1}{t}}, \\ y = \mathrm{tg}^2\, 3t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln((1-t)/(1+t)), \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$
Вариант 17		
1) $\begin{cases} x = e^{-3t^2}, \\ y = \mathrm{tg}\,\frac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = 2\cos t^2, \\ y = \sin t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \arccos(1/t), \\ y = \sqrt{1-t^2} + \arcsin(1/t) \end{cases}$
Вариант 18		
1) $\begin{cases} x = e^{2t^2}, \\ y = \mathrm{ctg}\,\frac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t} \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = 1/\ln t, \\ y = \ln((1+\sqrt{1-t^2})/t) \end{cases}$
Вариант 19		
1) $\begin{cases} x = \ln(e^{-3t}-1), \\ y = \mathrm{tg}^3\,\frac{1}{t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 - \alpha \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}} \end{cases}$
Вариант 20		
1) $\begin{cases} x = \ln(2-e^t), \\ y = \cos^2 3t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \\ y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = t/\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
Вариант 21		
1) $\begin{cases} x = \ln(2+e^{t^2}), \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = t\sqrt{1+t^2}, \\ y = \ln((1+\sqrt{1+t^2})/t) \end{cases}$
Вариант 22		
1) $\begin{cases} x = \ln(1-7t), \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t, \\ y = \ln(\sqrt{1+t^2}/(t+1)) \end{cases}$

Вариант 23		
1) $\begin{cases} x = \ln(1-5t), \\ y = \mathrm{tg}^3\, 3t \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{1}{2}t^3 \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
Вариант 24		
1) $\begin{cases} x = \cos^2 3t, \\ y = \mathrm{tg}^2(e^t) \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0 \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}((t+1)/(t-1)), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
Вариант 25		
1) $\begin{cases} x = \cos^3 2t, \\ y = e^{1-t^2} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln\sqrt{(1-\sin t)/(1+\sin t)}, \\ y = (1/2)tg^2 t + \ln\cos t \end{cases}$
Вариант 26		
1) $\begin{cases} x = \cos^4 2t, \\ y = e^{2t-1} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \sqrt{t-t^2} - \mathrm{arctg}\sqrt{(1-t)/t}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1-t}\arcsin\sqrt{t} \end{cases}$
Вариант 27		
1) $\begin{cases} x = \cos^3 2t, \\ y = e^{-t^2} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^2 + 1 \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = \ln \mathrm{tg}\, t, \\ y = 1/\sin^2 t \end{cases}$
Вариант 28		
1) $\begin{cases} x = \cos^4 2t, \\ y = e^{-2t^2} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \mathrm{tg}\, t, \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = (t^2 \ln t)/(1-t^2) + \ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = t/\sqrt{1-t^2}\arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
Вариант 29		
1) $\begin{cases} x = \sin^3 2t, \\ y = e^{1-7t} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = t\,\mathrm{arctg}\, t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \mathrm{tg}\, t \cdot \ln\cos t + \mathrm{tg}\, t - t \end{cases}$
Вариант 30		
1) $\begin{cases} x = \sin^3(1-t), \\ y = e^{1-2t^2} \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = \arcsin\left(t^2-1\right), \\ y = \arccos\dfrac{t}{2} \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = t\arcsin t/\sqrt{1-t^2} + \ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = t/\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Задание 12. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

Вариант	Задание	Вариант	Задание

1	$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{3}$	2	$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{3}$
3	$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{3}$	4	$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ $t_0 = 1$
5	$\begin{cases} x = (2t + t^2)/(1 + t^3), \\ y = (2t - t^2)/(1 + t^3) \end{cases}$ $t_0 = 1$	6	$\begin{cases} x = \arcsin(t/\sqrt{1+t^2}), \\ y = \arcsin(1/\sqrt{1+t^2}) \end{cases}$ $t_0 = -1$
7	$\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t) \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$	8	$\begin{cases} x = 3at/(1 + t^2), \\ y = 3at^2/(1 + t^2) \end{cases}$ $t_0 = 2$
9	$\begin{cases} x = 2\ln\mathrm{ctg}\, t + 1, \\ y = \mathrm{tg}\, t + \mathrm{ctg}\, t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$	10	$\begin{cases} x = (1/2)t^2 - (1/4)t^4, \\ y = (1/2) + (1/3)t^3 \end{cases}$ $t_0 = 0$
11	$\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{2}$	12	$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{6}$
13	$\begin{cases} x = \arcsin(1/\sqrt{1+t^2}), \\ y = \arccos(1/\sqrt{1+t^2}) \end{cases}$ $t_0 = 1$	14	$\begin{cases} x = (1 + \ln t)/t^2, \\ y = (3 + 2\ln t)/t \end{cases}$ $t_0 = 1$
15	$\begin{cases} x = (1 + t)/t^2, \\ y = 3/(2t^2) + 2/t \end{cases}$ $t_0 = 2$	16	$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{6}$
17	$\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$	18	$\begin{cases} x = (t + 1)/t, \\ y = (t - 1)/t \end{cases}$ $t_0 = -1$
19	$\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = 1 - t^3 \end{cases}$ $t_0 = 2$	20	$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \mathrm{arctg}\, t \end{cases}$ $t_0 = 1$
21	$\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t \end{cases}$ $t_0 = 0$	22	$\begin{cases} x = (1 + t^3)/(t^2 - 1), \\ y = t/(t^2 - 1) \end{cases}$ $t_0 = 2$
23	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$	24	$\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$ $t_0 = 1$
25	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$ $t_0 = 1$	26	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ $t_0 = -\frac{\pi}{3}$
27	$\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}\, t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$	28	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 \end{cases}$ $t_0 = -2$
29	$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 2e^t \end{cases}$ $t_0 = 0$	30	$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{6}$

Задание 13. Составить уравнение касательной и нормали к указанным линиям либо в указанной точке, либо при указанном значении параметра.

Вариант	Задание 1	Задание 2
1	$y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$, $x_0 = a$	$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$
2	$y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x_0 = 2$	$\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$
3	$y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x - 6$, $x_0 = 4$	$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ $t_0 = 1$
4	$y = x^2 - 3x - 1$, $x_0 = 4$	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$
5	$y = x^3$, $x_0 = -1$	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
6	$y = x^3$, $x_0 = 1$	$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases}$ $t_0 = 0$
7	$y = \dfrac{3}{x}$, $x_0 = 1$	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases}$ $t_0 = -2$
8	$y = \dfrac{1}{2}y^2 + 1$, $x_0 = 4$	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t_0 = -\dfrac{\pi}{3}$
9	$y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$, $x_0 = 0$	$\begin{cases} x = 8\sin^3 t, \\ y = 8\cos 3t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$
10	$y = x^2 - 4x + 5$, $x_0 = 0$	$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$
11	$y = x^2 - 4x + 5$, $y_0 = 5(x > 0)$	$\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases}$ $t_0 = 2$
12	$y^2 = (4 + x)^3$, $y_0 = 8$	$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$
13	$y^2 = (4 + x)^3$, $x_0 = -4$	$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}, \end{cases}$ $t_0 = 0$
14	$y^2 = 4 - x$, $y_0 = -2$	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
15	$y^2 = 4 - x$, $y_0 = 2$	$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 1 - 4t^2, \end{cases}$ $t_0 = 1$

16	$y = 4x - x^2,\ x_0 = 4$	$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 - 2, \end{cases}$ $t_0 = 1$
17	$y = 4x - x^2,\ x_0 = 0$	$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t, \end{cases}$ $t_0 = 3$
18	$xy = 4,\ x_0 = -4$	$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
19	$xy = 4,\ x_0 = 1$	$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
20	$y = \sin x,\ x_0 = \pi$	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
21	$y = \dfrac{8}{4 + x^2},\ x_0 = 2$	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
22	$y^2 = x^3,\ x_0 = 1$	$\begin{cases} x = 1 - e^{2t}, \\ y = e^t, \end{cases}$ $t_0 = 0$
23	$y^2 = x^3,\ x_0 = 0$	$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t^2, \end{cases}$ $t_0 = 0$
24	$y = \dfrac{x^3}{3},\ x_0 = -1$	$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$
25	$y = 4 - x^2,\ x_0 = 2$	$\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$
26	$y = x^2 + 4x - 26,\ x_0 = 4$	$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ $t_0 = 2$
27	$y = 2x^3 + 3x - 9,\ x_0 = 1$	$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = \dfrac{1}{t - 2}, \end{cases}$ $t_0 = 1$
28	$y = x^3 + 4x + 6,\ x_0 = -1$	$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^4, \end{cases}$ $t_0 = 1$
29	$y = x^4 - 4x^2 + 6,\ x_0 = 1$	$\begin{cases} x = 2t - 2\sin t, \\ y = 2 - 2\cos t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$
30	$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2,\ x_0 = 2$	$\begin{cases} x = 3\sin^3 t, \\ y = 3\cos^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$

Задание 14. Найти производную *n*-порядка:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y = xe^{ax}$	2	$y = \sin 2x + \cos(x+1)$
3	$y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$	4	$y = (4x+7)/(2x+3)$
5	$y = \lg(5x+2)$	6	$y = a^{3x}$
7	$y = x/(2(3x+2))$	8	$y = \lg(x+4)$
9	$y = \sqrt{x}$	10	$y = (2x+5)/(13(3x+1))$
11	$y = 2^{3x+5}$	12	$y = \sin(x+1) + \cos 2x$
13	$y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$	14	$y = (4+15x)/(5x+1)$
15	$y = \lg(3x+1)$	16	$y = 7^{5x}$
17	$y = x/(9(4x+9))$	18	$y = \lg(1+x)$
19	$y = 4/x$	20	$y = (5x+1)/(13(2x+3))$
21	$y = a^{2x+3}$	22	$y = \sin(3x+1) + \cos 5x$
23	$y = \sqrt{e^{3x+1}}$	24	$y = (11+12x)/(6x+5)$
25	$y = \lg(2x+7)$	26	$y = 2^{kx}$
27	$y = x/(x+1)$	28	$y = \log_3(x+5)$
29	$y = (1+x)/(1-x)$	30	$y = (7x+1)/(17(4x+3))$

Задание 15. Найти производную указанного порядка:

Вари-ант	Задание	Вари-ант	Задание
1	$y=(2x^2-7)\ln(x-1)$, $y^V=?$ $y=x^5-2x^3+7x-1$, y^{IV} $y=e^x(x^2-5)$, y''	2	$y=(3-x^2)\ln^2 x$, $y^{III}=?$ $y=\ln\cdot\sin 2x$, y''' $y=7x^5-2x^3+1$, y^V
3	$y=x\cos x^2$, $y^{III}=?$ $y=5x^4-3x^3+2x-3$, y^V $y=e^{-2x}(2x^3+1)$, y''	4	$y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y^{III}=?$ $y=x^2e^{3x}$, y''' $y=2x^5-7x^3-1$, y^{IV}
5	$y=\dfrac{\log_2 x}{x^3}$, $y^{III}=?$ $y=3x^6-2x^4+5x^2-3$, y^{IV} $y=e^{3x}(x^3+2)$, y''	6	$y=(4x^2+5)e^{2x+1}$, $y^V=?$ $y=x^3e^{-3x}$, y''' $y=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+x^4$, y^{IV}
7	$y=x^2\sin(5x-3)$, $y^{III}=?$ $y=\mathrm{arctg}\ 2x$, y''' $y=x^3-5x^7+6x^8$, y^{IV}	8	$y=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $y^{IV}=?$ $y=3x+\mathrm{arctg}\ 2x$, y''' $y=7x^5-2x^3+1$, y^{IV}
9	$y=(2x+3)\ln^2 x$, $y^{III}=?$ $y=e^{2x}(x^2-1)$, y''' $y=5x^5-3x^3-arctgx$, y''	10	$y=(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\ x$, $y^{III}=?$ $y=(-3x+1)^{-3}$, $y^{(IV)}$ $y=x-\ln^2 x$, y'''
11	$y=\dfrac{\ln x}{x^3}$, $y^{IV}=?$ $y=\sin^2 3x+x^2$, y'' $y=3x^3+2x^4-3$, y'''	12	$y=(4x+3)2^{-x}$, $y^V=?$ $y=2x^{-6}+x^3-3x^5+0{,}5$ $y^{(V)}$ $y=e^{-2x}\cdot\sin 3x$, y''
13	$y=e^{1-2x}\sin(2+3x)$, $y^{IV}=?$ $y=3x^6-7x^5+1$, $y^{(V)}$ $y=(x+1)\ln x$, y'''	14	$y=\dfrac{\ln(3+x)}{3+x}$, $y^{III}=?$ $y=5x^{-3}+2x^{-4}+3x$, $y^{(IV)}$ $y=e^{3x}(x^2-1)$, y''
15	$y=(2x^3+1)\cos x$, $y^V=?$ $y=7x^5-x^{-3}+3x^2$, $y^{(IV)}$ $y=\ln\sin 3x$, y''	16	$y=(x^2+3)\ln(x-3)$, $y^{IV}=?$ $y=x^4-3x^3+\dfrac{1}{x}$, $y^{(IV)}$ $y=x\cos 2x$, y'''
17	$y=(1-x-x^2)e^{(x-1)/2}$, $y^{IV}=?$ $y=e^{3x}(3x+2)$, y''' $y=3x^4-5x^2+6x+1$, y'''	18	$y=(1/x)\sin 2x$, $y^{III}=?$ $y=3x^4+5x^3-1$, $y^{(IV)}$ $y=(x+1)e^{-2x}$, y''

19	$y=(x+7)\ln(x+4)$, $y^{V}=?$ $y=x^2e^{3x}$, y'' $y=x-\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}$, $y^{(IV)}$	20	$y=(3x-7)3^{-x}$, $y^{IV}=?$ $y=3x^5-\operatorname{arctg}2x$, y'' $y=7x^2-5x^3+6x^{-4}$, $y^{(IV)}$
21	$y=\frac{\ln(2x+5)}{2x+5}$, $y^{III}=?$ $y=\cos 2x-e^{-2x}$, $y^{(IV)}$ $y=3x^3+5x^2-2x+3$, y'''	22	$y=e^{x/2}\sin 2x$, $y^{IV}=?$ $y=(x+1)\ln(x+1)$, y''' $y=(2x-5)^{-3}$, $y^{(IV)}$
23	$y=\frac{\ln x}{x^5}$, $y^{III}=?$ $y=e^{3x}(x^2+1)$, y'' $y=3x^3+5x^2-3x+1$, y'''	24	$y=x\ln(1-3x)$, $y^{IV}=?$ $y=3x^3-4x^2+5x$, $y^{(IV)}$ $y=x^2\ln(x+1)$, y''
25	$y=(x^2+3x+1)e^{3x+2}$, $y^{V}=?$ $y=3x^{-6}-2x^{-5}+1$, $y^{(IV)}$ $y=(x+1)^2\ln x$, y''	26	$y=(5x-8)2^{-x}$, $y^{IV}=?$ $y=7x^8-8x^7+5$, $y^{(V)}$ $y=e^{2x}\cdot\cos 3x$, y''
27	$y=\frac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y^{V}=?$ $y=x^3e^{2x}$, y''' $y=-3x^7+6x^5-2x^3+x$, $y^{(V)}$	28	$y=e^{-x}(\cos 2x-3\sin 2x)$, $y^{IV}=?$ $y=x^2\sin 2x$, y'' $y=2x^6-3x^4+2x^2-1$, $y^{(V)}$
29	$y=(5x-1)\ln^2 x$, $y^{III}=?$ $y=\operatorname{tg}^2 3x$, y'' $y=3x-x^6$, $y^{(V)}$	30	$y=\frac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{IV}=?$ $y=(x^3-2)\cdot e^{-3x}$, y'' $y=3x^5-2x+6$, $y^{(IV)}$

Задание 16. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	1) $x^2\sin y+y^3\cos x-2x-3y+1=0;$ 2) $7x^3+3y^2-15=0$, y''	2	1) $e^y+xy=e;$ 2) $x^2+y^2-2y=0$, y''
3	1) $\sin\left(y-x^2\right)-\ln\left(y-x^2\right)+2\sqrt{y-x^2}=3;$ 2) $x^2+3y^2=a^2$, y''	4	1) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0;$ 2) $x^3-2y^2+5=0$, y''
5	1) $x\sin y+y\sin x=0;$ 2) $y=x^2-y^2$, y''	6	1) $x^y-y^x=0;$ 2) $x^3+y^3=a^3xy$, y''
7	1) $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2=-1;$ 2) $y=x^3+y^3-3y$, y''	8	1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=e^x;$ 2) $x^5-y^4=a^3-y$, y''

9	1) $x^3+\ln y - x^2e^y=0$; 2) $x^5-y^4-3xy=0,\quad y''$	10	1) $x^3+y^3-3xy=0$; 2) $y=\ln(xy),\quad y''$
11	1) $a^{\frac{x}{y}}=\left(\frac{x}{y}\right)^a$; 2) $x^3-x^2y^3-5a^2=0,\quad y''$	12	1) $x^y=y^x$; 2) $x^2+y^2=y^3-5,\quad y''$
13	1) $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; 2) $y=y^3-x^3,\quad y''$	14	1) $e^x\sin y-e^y\cos x=0$; 2) $x+y-7xy=0\quad, y''$
15	1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $x^3+y^3=2y,\quad y''$	16	1) $2y\ln y=x$; 2) $x^2+y^2=R^2\cdot y,\quad y''$
17	1) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$; 2) $x^3+y^3=a^3+y,\quad y''$	18	1) $x^4+y^4=x^2y^2$; 2) $x=\sin(x+2y),\quad y''$
19	1) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$; 2) $y^3=a^2-x^2-y,\quad y''$	20	1) $2^x+2^y=2^{x+y}$; 2) $x^5-y^3+y=0\quad, y''$
21	1) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $x^2+y^2-3x+y=0,\quad y''$	22	1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; 2) $x^3+y^3-3xy=0\quad, y''$
23	1) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$; 2) $y=\ln(x+y),\quad y''$	24	1) $\ln x+\ln y=xy$; 2) $x^3+y^3=a^3-y\quad, y''$
25	1) $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$; 2) $y=e^{-3x+2y}-x,\quad y''$	26	1) $\cos(x+y)=xy$; 2) $x^2-y^3-2y=0,\quad y''$
27	1) $Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dy+F=0$; 2) $x=x^3-2xy+1,\quad y''$	28	1) $x^4+y^4=4xy$; 2) $y\cdot x=x^2-y^2,\quad y''$
29	1) $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}+1=0$; 2) $x^2-y^2=R^2,\quad y''$	30	1) $x^3+y^3=3xy$; 2) $2xy-y^3=3x^2\quad, y''$

Задание 17. Вычислить $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $y(x)$ задана параметрически:

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
1	1) $x=\frac{3t^2+1}{3t^3},\quad y=\sin\left(\frac{t^3}{3}+t\right)$;	2	1) $x=\operatorname{arctg}\frac{t+1}{t-1},\quad y=\arcsin\sqrt{1-t^2}$;

	2) $\begin{cases} y = e^{2t}, \\ x = \ln t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = t^3 + 5t, \\ x = 3t - 2t^2 \end{cases}$		2) $\begin{cases} y = e^{-2t}, \\ x = e^{-3t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 3t^2 + 5t, \\ x = -4t^3 - t \end{cases}$
3	1) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 3\cos t, \\ x = 2\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = t^2 - 3t, \\ x = 3t^2 + t - 1 \end{cases}$	4	1) $x = \arcsin(\sin t), \quad y = \arccos(\cos t);$ 2) $\begin{cases} y = 3\cos 2t, \\ x = 2\sin 2t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 3t^3 - 2t + 1, \\ x = 2t^4 + 5t - 2 \end{cases}$
5	1) $\begin{cases} x = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right), \\ y = t\sqrt{t^2 + 1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = e^{-t} \\ x = e^{3t} \end{cases}, \quad y''_{xx}$ 3) $\begin{cases} y = t^3 - 2t \\ x = t^4 + t^3 \end{cases}, \quad y''_{xx}$	6	1) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = \arcsin(t-1) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 6\cos 2t \\ y = 6\sin 2t \end{cases}, \quad y''_{xx}$ 3) $\begin{cases} x = 3t^3 - 5 \\ y = 4t^4 - 3t^3 \end{cases}, \quad y''_{xx}$
7	1) $\begin{cases} x = \mathrm{ctg}\left(2e^t\right) \\ y = \ln \mathrm{tg}\, e^t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \sin 3t, \\ x = \cos^2 3t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = -3t^2 + t, \\ x = t^3 - t^4 \end{cases}$	8	1) $\begin{cases} x = \cos \ln t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \cos^2 2t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = -3t^3 + 4t, \\ x = 2t^4 - 3t^3 + 1 \end{cases}$
9	1) $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, e^t, \\ y = \sqrt{e^t + 1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{4t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -3t^3 + 4t, \\ y = 2t^4 - 3t + 2 \end{cases}$	10	1) $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2e^{-3t}, \\ y = 5e^{-5t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -3t^3 + 5t, \\ y = 2t^4 - 3t + 20 \end{cases}$

11	1) $\begin{cases} x = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}\right), \\ y = \dfrac{\arcsin(1-t^2)}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = 5\cos 2t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 3t^2 - t + 1, \\ y = t^3 + t \end{cases}$	12	1) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{1-t^2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2\ln(1+t^2), \\ y = 3\,\mathrm{arctg}\ t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -3t^2 + t, \\ y = 3t^3 + 5t \end{cases}$
13	1) $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2}, \\ y = (\arccos t)^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2e^{-3t}, \\ y = 5e^{3t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 3t^2 - 1, \\ y = 2t^4 + t^3 \end{cases}$	14	1) $x = \dfrac{1}{\ln t},\quad y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t};$ 2) $\begin{cases} x = 2\ln(1+t), \\ y = t^2 - 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = 5e^{5t} \end{cases}$
15	1) $x = \arcsin\sqrt{t},\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}};$ 2) $\begin{cases} x = e^{5t}, \\ y = 3e^{3t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -t^3 - 5t + 1, \\ y = 3t^4 + 1 \end{cases}$	16	1) $x = \mathrm{arctg}\ t,\quad y = \ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1};$ 2) $\begin{cases} x = 2\sin 2t, \\ y = 3\cos 2t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t^3 - 5t + 1, \\ y = 3t^4 - 5t \end{cases}$
17	1) $x = \ln\dfrac{1-t}{1+t},\quad y = \sqrt{1-t^2};$ 2) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \mathrm{arctg}\ t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t^3 - 5t, \\ y = 3t^4 + 5t - 2 \end{cases}$	18	1) $x = \ln(1-t^2),\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2};$ 2) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t^3 + t - 1, \\ y = 3t^4 - 1 \end{cases}$
19	1) $x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}},\quad y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t};$ 2) $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4t + t^3, \\ y = 3t^2 + t^4 \end{cases}$	20	1) $x = t\sqrt{t^2+1},\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$ 2) $\begin{cases} x = \sin^2 3t, \\ y = \cos 3t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2t^3 + 5t, \\ y = 2t^4 - 5t^3 + 1 \end{cases}$

21	1) $x=\left(1+\cos^2 t\right)^2,\quad y=\dfrac{\cos t}{\sin^2 t};$ 2) $\begin{cases} x=e^{-3t}, \\ y=5e^{5t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^3+t, \\ y=t^4-t^3 \end{cases}$	22	1) $x=\arccos\frac{1}{t},\quad y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin\frac{1}{t};$ 2) $\begin{cases} x=3e^{2t}, \\ y=5e^{3t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^5+t^4-1, \\ y=2t^3-t \end{cases}$
23	1) $\begin{cases} x=\ln \operatorname{tg} t, \\ y=\frac{1}{\sin^2 t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sin 3t, \\ y=5\cos 3t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^3+5t, \\ y=5t^2-4t^3 \end{cases}$	24	1) $x=(\arcsin t)^2,\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}};$ 2) $\begin{cases} x=5e^{3t}, \\ y=3e^{5t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^3+t-1, \\ y=3t^3+t^2-1 \end{cases}$
25	1) $x=\operatorname{ctg}\ \operatorname{tg} t,\quad y=\dfrac{1}{\cos^2 t};$ 2) $\begin{cases} y=3e^{4t}, \\ y=-2e^{6t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^3-2t+1, \\ y=2t^4+t^2 \end{cases}$	26	1) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3e^{5t}, \\ y=2e^{3t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^3-2, \\ y=2t^4-t^2+1 \end{cases}$
27	1) $\begin{cases} x=\arcsin^2 t, \\ y=t\ln t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=2e^{-3t}, \\ x=3e^{-2t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^3-2t+1, \\ y=4t^4-2t+3 \end{cases}$	28	1) $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{3t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2t^3-2t+1, \\ y=4t^4+2t^2-3 \end{cases}$
29	1) $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sin 2x, \\ y=\cos 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2t^2-3t, \\ y=3t^3-1 \end{cases}$	30	1) $\begin{cases} x=\sqrt{t+1}, \\ y=\ln\left(1+e^t\right); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3\cos 5t, \\ y=2\sin 5t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3t^3-2t^2+4, \\ y=-3t^5+2t \end{cases}$

Задание 18. Найти производные второго порядка от указанных функций и, где указано, найти частные значения в точке x_0.

Вариант	Задание
1	а) $y=\ln(x+4),\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^3; \end{cases}$ в) $y+3x=2^y$
2	а) $y=\dfrac{4x+7}{2x+3},\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=e^{-t}; \end{cases}$ в) $3y-x=2^y$
3	а) $y=\sin 2x+\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases} x=t^3-2t, \\ y=t^2; \end{cases}$ в) $\sin y=x+y$
4	а) $y=\dfrac{1+x}{1-x},\ x_0=2$; б) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3-2t; \end{cases}$ в) $\cos y=x+y$
5	а) $y=\dfrac{x}{3x+2},\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=t^3+t, \\ y=3t^2; \end{cases}$ в) $\sin(x+y)=y$
6	а) $y=\ln(2x+7),\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=2t^3+t; \end{cases}$ в) $\cos(x+y)=x+2y$
7	а) $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\ x_0=3$; б) $\begin{cases} x=3e^{2t}, \\ y=e^{5t}; \end{cases}$ в) $\operatorname{arctg} y=x+y$
8	а) $y=x^3e^{4x+3},\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\sin t; \end{cases}$ в) $5\arcsin y=x+y$
9	а) $y=x^5\ln x,\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=2\cos t; \end{cases}$ в) $\ln(x+y)=3x$
10	а) $y=(x+3)\ln(x+3),\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t, \\ y=t; \end{cases}$ в) $\ln(2x+y)=y$
11	а) $y=(2x+1)\cos x,\ x_0=\pi$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}+3, \\ y=t^2; \end{cases}$ в) $\operatorname{tg}(x+y)=2x$
12	а) $y=x\ln^2 x$; б) $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=4\sin t; \end{cases}$ в) $2x-y=2^y$
13	а) $y=\cos^2 x+\sin x,\ x_0=\pi$; б) $\begin{cases} x=\cos 2t+1, \\ y=\sin 2t; \end{cases}$ в) $6x^2+y^2=4-y$
14	а) $y=2x^3-5,\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln(1+t^2); \end{cases}$ в) $x^2+2x+y^2-8y+3=0$

15	а) $y=2^x+x^2, x_0=0;$	б) $\begin{cases} x=e^t+1, \\ y=e^{3t}; \end{cases}$	в) $x^2-8x+y^2-2y=0$
16	а) $y=\cos 2x+\sin x, x_0=\pi;$	б) $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=e^{5t}+3; \end{cases}$	в) $\frac{x}{y}+\sqrt{y}=2$
17	а) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x, x_0=\frac{\pi}{4};$	б) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^2+1; \end{cases}$	в) $2^x+2^y=y\ln 2$
18	а) $y=\operatorname{arctg}(5x+1), x_0=0;$	б) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\ln t; \end{cases}$	в) $\sqrt[3]{y}-xy=5$
19	а) $y=\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{tg} 2x, x_0=\frac{\pi}{6};$	б) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t}, \\ y=t^3+1; \end{cases}$	в) $e^x+e^y=e^{x+y}$
20	а) $y=(x^2+1)e^{3x}, x_0=0;$	б) $\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\sin 3t; \end{cases}$	в) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=y$
21	а) $y=\frac{\ln(x+2)}{x+2}; x_0=1;$	б) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=5\sin 2t; \end{cases}$	в) $y\cos x=\ln y$
22	а) $y=(4x+3)\sin x, x_0=0;$	б) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t, \\ y=\sin^2 t; \end{cases}$	в) $\ln x+y^3=3xy^2$
23	а) $y=(2x+1)\sin 3x, x_0=0;$	б) $\begin{cases} x=3\sin t, \\ y=2\operatorname{tg} t; \end{cases}$	в) $x^4-xy+y^4=1$
24	а) $y=\ln^2 x+\frac{1}{x}, x_0=1;$	б) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln(1+t^2); \end{cases}$	в) $y\sin x=\ln y$
25	а) $y=\operatorname{tg}^2 x+x, x_0=\frac{\pi}{3};$	б) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}; \end{cases}$	в) $4x^2+8y^2=1$
26	а) $y=x+\sqrt{4-x}, x_0=3;$	б) $\begin{cases} x=a(1-\cos t), \\ y=at; \end{cases}$	в) $y+2x-\operatorname{arcctg} y=0$
27	а) $y=\ln \operatorname{ctg} x, x_0=\frac{\pi}{3};$	б) $\begin{cases} x=a\ln t, \\ y=\frac{a}{2}(t+\frac{1}{t}); \end{cases}$	в) $x^2+y^2=a^2$
28	а) $y=\frac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}, x_0=0;$	б) $\begin{cases} x=\frac{a-t}{a+t}, \\ y=\frac{t}{a+t}; \end{cases}$	в) $y-x-\operatorname{arctg} y=0$
29	а) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x+2}}, x_0=\frac{\pi}{4};$	б) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$	в) $x^3+y^3=3xy$
30	а) $y=\arcsin\frac{x-2}{4}, x_0=0;$	б) $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t; \end{cases}$	в) $\ln(x+y)-2x+e^y=0$

Задание 19. Найти дифференциал dy.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y = x\arcsin(1/x) + \ln\mid x + \sqrt{x^2 - 1}\mid$	2	$y = \operatorname{tg}(2\arccos\sqrt{1 - 2x^2})$
3	$y = \sqrt{1 + 2x} - \ln(x + \sqrt{1 + 2x})$	4	$y = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$
5	$y = \arccos(1/\sqrt{1 + 2x^2})$	6	$y = x\ln\mid x + \sqrt{x^2 + 3}\mid - \sqrt{x^2 + 3}$
7	$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x)\ln(\operatorname{ch} x)$	8	$y = \arccos((x^2 - 1)/(x^2\sqrt{2}))$
9	$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$	10	$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}\operatorname{arctg} x$
11	$y = \dfrac{\ln\mid x\mid}{1 + x^2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1 + x^2}$	12	$y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x}$
13	$y = x\sqrt{4 - x^2} + 4\arcsin(x/2)$	14	$y = \ln\operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x$
15	$y = 2x + \ln\mid\sin x + 2\cos x\mid$	16	$y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x/3}$
17	$y = \ln\left\lvert\dfrac{x + \sqrt{1 + x^2}}{2x}\right\rvert$	18	$y = \sqrt[3]{\dfrac{x + 2}{x - 2}}$
19	$y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 - 1}{x}$	20	$y = \ln\mid x^2 - 1\mid - \dfrac{1}{x^2 - 1}$
21	$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x/2) + 1)$	22	$y = \ln\mid 2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1\mid$
23	$y = \mid\cos\sqrt{x}\mid + \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$	24	$y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$
25	$y = x(\sin\ln x - \cos\ln x)$	26	$y = \left(\sqrt{x - 1} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$
27	$y = \cos x\ln\operatorname{tg} x - \ln\operatorname{tg}(x/2)$	28	$y = \sqrt{3 + x^2} - x\ln\mid x + \sqrt{3 + x^2}\mid$
29	$y = \sqrt{x} - (1 + x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	30	$y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$

Задание 20. Вычислить с помощью дифференциала приближенное значение числа a.

Вариант	a	Вариант	a
1	$\sqrt[3]{8,16}$	16	$(0,88)^{2/3}$
2	$\sin 0,11$	17	$\ln 1,02$
3	$(4,02)^{3/2}$	18	$\lg 11$
4	$\ln \sqrt[3]{0,91}$	19	$(0,94)^{-4/3}$
5	$\cos 151^{\circ}$	20	$\sin 30^{\circ}5'$
6	$\arcsin(-0,04)$	21	$e^{-0,12}$
7	$(8,16)^{-1/3}$	22	$\operatorname{arctg} 1,05$
8	$\sin 29^{\circ}$	23	$\sqrt[4]{17}$
9	$\sqrt[3]{7,6}$	24	$\operatorname{tg}(0,07)$
10	$(7,88)^{-1/3}$	25	$\sin 16^{\circ}$
11	$e^{0,03}$	26	$(1,03)^{2/3}$
12	$\ln 0,98$	27	$\cos 29^{\circ}$
13	$\operatorname{arctg} 0,02$	28	$\ln \sqrt[3]{1,12}$
14	$\sqrt[4]{0,98}$	29	$\arcsin 0,03$
15	$\operatorname{tg} 45^{\circ}10'$	30	$\lg 0,96$

Задание 21. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7,76$	2	$y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$, $x = 1,012$
3	$y = (x + \sqrt{5 - x^2})/2$, $x = 0,98$	4	$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 27,54$
5	$y = \arcsin x$, $x = 0,08$	6	$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$, $x = 0,97$
7	$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 26,46$	8	$y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x = 1,97$

9	$y = x^{11}$, $x = 1{,}021$	10	$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1{,}21$
11	$y = x^{21}$, $x = 0{,}998$	12	$y = \sqrt[3]{x^2}$, $x = 1{,}03$
13	$y = x^{6}$, $x = 2{,}01$	14	$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}24$
15	$y = x^{7}$, $x = 1{,}996$	16	$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7{,}64$
17	$y = \sqrt{4x-1}$, $x = 2{,}56$	18	$y = 1/\sqrt[2]{2x^2 + x + 1}$, $x = 1{,}016$
19	$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}36$	20	$y = 1/\sqrt{x}$, $x = 4{,}16$
21	$y = x^{7}$, $x = 2{,}002$	22	$y = \sqrt{4x-3}$, $x = 1{,}78$
23	$y = \sqrt{x^3}$, $x = 0{,}98$	24	$y = x^{5}$, $x = 2{,}997$
25	$y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1{,}03$	26	$y = x^{4}$, $x = 3{,}998$
27	$y = \sqrt{1 + x + \sin x}$, $x = 0{,}01$	28	$y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, $x = 0{,}01$
29	$y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}$, $x = 1{,}02$	30	$y = \sqrt{x^2 + 5}$, $x = 1{,}97$

Задание 22. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$f(x) = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ ïðè $x = 0{,}15$	2	$f(x) = \lg x$ ïðè $x = 200{,}2$ (ó÷åñòü, ÷òî $\lg 200 = 2{,}30103$)
3	$f(x) = \operatorname{tg} x$ ïðè $x = 45^\circ 00'30''$	4	$f(x) = \ln x$ ïðè $x = 300{,}3$ (ó÷åñòü, ÷òî $\ln 300 = 2{,}4771$)
5	$f(x) = \sin x$ ïðè $x = 60^\circ 3'$	6	$f(x) = \sqrt[4]{\frac{3+x}{3-x}}$ ïðè $x = 0{,}12$
7	$f(x) = \cos x$ ïðè $x = 60^\circ 00'30''$	8	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ ïðè $x = 4{,}2$

9	$f(x) = \sin\ x$ ïðè $x = 30^{\circ}00'45''$	10	$f(x) = \mathrm{tg}\ x$ ïðè $x = 45^{\circ}02'$
11	$f(x) = x^{6}$ ïðè $x = 1{,}2$	12	$f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$ ïðè $x = 0{,}15$
13	$f(x) = \sqrt[2]{\dfrac{2+x}{7+x}}$ ïðè $x = 2{,}1$	14	$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^{2}-x+1}{x^{2}+x+1}}$ ïðè $x = 0{,}3$
15	$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{4-x}{4+x}}$ ïðè $x = 0{,}15$	16	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-3}}$ ïðè $x = 2{,}1$
17	$f(x) = \sqrt{x^{2}+9}$ ïðè $x = 3{,}94$	18	$f(x) = \mathrm{tg}\ x$ ïðè $x = 45^{\circ}00'30''$
19	$f(x) = \sin\ x$ ïðè $x = 30^{\circ}00'30''$	20	$f(x) = \lg\ x$ ïðè $x = 100{,}1$
21	$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3-x}{3+x}}$ ïðè $x = 0{,}02$	22	$f(x) = \mathrm{arctg}\ x$ ïðè $x = 0{,}988$
23	$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^{2}+x+1}{x^{2}-x+1}}$ ïðè $x = 0{,}3$	24	$f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^{2}+5}}$ ïðè $x = 2{,}2$
25	$f(x) = \sin\ x$ ïðè $x = 60^{\circ}18'$	26	$f(x) = \cos\ x$ ïðè $x = 60^{\circ}00'15''$
27	$f(x) = \sqrt[2]{\dfrac{3+x}{3-x}}$ ïðè $x = 0{,}12$	28	$f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^{2}+3}}$ ïðè $x = 1{,}1$
29	$f(x) = \sin x$ при $x = 30^{\circ}00'45''$	30	$f(x) = \mathrm{tg}\ x$ ïðè $x = 45^{\circ}02'$

Задание 23. Показать, что указанная функция $y = y(x)$ является решением уравнения:

№ п/п	Функция $y = y(x)$	Уравнение
1	$y = \dfrac{C\sqrt{1-x^{2}}+x}{\sqrt{1-x^{2}}-Cx}$	$y'\sqrt{1-x^{2}} = 1 + y^{2}$
	$y = -\ln(C - e^{x})$	$y' = e^{x+y}$
	$y = C \cdot e^{\sqrt{1-x^{2}}}$	$y' = \dfrac{-xy}{\sqrt{1-x^{2}}}$
2	$y = C\sqrt{1+e^{2x}}$	$y'(1+e^{2x}) = ye^{2x}$
	$y^{3} + y - x^{2} + C = 0$	$y'(3y^{2}+1) = 2x$
	$y = \sqrt{Cx^{2}-1}$	$yx \cdot y' = 1 + y^{2}$

3	$y=\dfrac{C+x}{1-Cx}$	$y'(1+x^2)=1+y^2$
	$y=1+\dfrac{Cx}{1+x}$	$y-1=(x^2+x)\,y'$
	$y=\sqrt{C(1-x^2)-1}$	$y'y(x^2-1)=x(y^2+1)$
4	$y=\dfrac{C}{2(1+x^2)}-\dfrac{1}{2}$	$y'(1+x^2)+(2y+1)\,x=0$
	$y=\sqrt{C-1-\dfrac{C}{x^2+1}}$	$xy(1+x^2)\,y'=1+y^2$
	$y=\ln(\,C(1+x^2)-1)$	$e^y(1+x^2)\,y'=2x(1+e^y)$
5	$y=(x+C)\,e^x$	$y'-y=e^x$
	$y=Ce^x-x-1$	$y'=x+y$
	$y=1+C\cdot e^{-x^3/3}$	$y'+x^2y=x^2$
6	$y=e^{C\cdot \mathrm{tg}\,(x/2)}$	$y'\cdot\sin\,x=y\cdot\ln\,y$
	$y=\mathrm{tg}\,\ln\,Cx$	$1+y^2=xy'$
	$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
7	$y=-\ln(\,1+Ce^x)$	$e^{-y}(1+y')=1$
	$1+e^y=C(1+x^2)$	$e^y(1+x^2)\,y'=2x(1+e^y)$
	$C+\dfrac{e^y}{y}=\ln(\ln\,x)$	$(1-y)\,e^y\cdot y'+\dfrac{y^2}{x\ln\,x}=0$
8	$2x^3y^3=3x^2+C$	$xy^2(xy'+y)=1$
	$3x^2-12x+2x^3y^3+6xy=C$	$x^2y^3+y+x-2+(x^3y^2+x)\,y'=0$
	$y^3=Cx-\ln\,x-1$	$\ln\,x+y^3=3xy^2\cdot y'$
9	$y=\dfrac{Cx}{2\tilde{o}+1}+2$	$y-xy'=2(1+x^2y')$
	$y=x\cdot\sin(\ln\,Cx)$	$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$
	$y^2-3xy+2x^2=C$	$4x-3y+y'(2y-3x)=0$
10	$y=(x^2+C)e^{-x^2}$	$y'+2xy=2xe^{-x^2}$
	$y=\dfrac{1}{4}(2x^2+2x-1)+Ce^{-2x}$	$y'+2y=x^2+2x$

	$y = C\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x$	$(x^2 + 2x - 1)\, y' - (x + 1)\, y = x - 1$
11	$y = -\left(\frac{1}{3}x^5 + Cx^2\right)^{-1}$	$xy' + 2y = x^5 y^2$
	$y = \frac{C - x^3}{2x - 3}$	$(2x - 3)\, y' + 3x^2 + 2y = 0$
	$y = \frac{2x}{1 + Cx^2}$	$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$
12	$y = (x + C)\, e^{x^5}$	$y' - 5x^4 y = e^{x^5}$
	$y = 2x\sqrt{x} + Cx$	$xy' - y = x\sqrt{x}$
	$y = \frac{\arcsin x + C}{x}$	$\sqrt{1 - x^2}\,(xy' + y) = 1$
13	$y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
	$y = \ln x + \frac{C}{x}$	$xy' + y = \ln x + 1$
	$y = \frac{1}{x(C + \ln x)}$	$y'x + y + xy^2 = 0$
14	$y = (1 + Ce^{x^2})^{-1/2}$	$y' + xy = xy^3$
	$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2$	$y'' = \ln x$
	$y = \frac{-1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$	$y'' = \sin 2x$
15	$y = C_1 x^3 + C_2$	$xy'' - 2y' = 0$
	$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$	$y'' - 9y = 0$
	$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}e^{2x}$	$y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$
16	$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$	$y'' + 9y = 0$
	$y = C_1 \ln x + C_2$	$xy'' + y' = 0$
	$y = e^{4x}(C_1 + x) + C_2$	$y'' - 4y' = 4e^{4x}$
17	$y = C_1 x^2 + C_2$	$xy'' - y' = 0$
	$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{5}{42}e^{5x}$	$y'' + 3y' + 2y = 5e^{5x}$
	$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{24}\sin 5x$	$y'' + y = \sin 5x$

18	$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{x^2}{2} - 5x$	$y'' - y' = x + 4$
	$y = \ln(C + e^x)$	$y' = e^{x-y}$
	$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{x}{3}$	$y'' + 3y' = 1$
19	$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} - \frac{20x}{27}$	$y'' - 3y' = x^3 + 2$
	$y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)$	$y'' + y' = xe^x$
	$y = \frac{C}{\cos x}$	$y' = y \operatorname{tg} x$
20	$y = \frac{-1}{3x + C}$	$y' = 3y^2$
	$y = \sqrt{x^2 - Cx}$	$2xyy' = x^2 + y^2$
	$y = x(C + \ln x)$	$xy' = x + y$
21	$y = -\ln(1 + Cx)$	$xy' + 1 = e^y$
	$y = 3 + \frac{C}{x}$	$xy' + y = 3$
	$y = \frac{e^x + C}{x}$	$xy' + y = e^x$
22	$y = Cx^3 - x^2$	$y' - \frac{3y}{x} = x$
	$y = (x^2 + C)e^{-x^2}$	$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
	$y = Cx^2 e^{1/x} + x^2$	$y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$
23	$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$	$y' + y = \cos x$
	$y = \frac{C - \cos 2x}{2\cos x}$	$y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$
	$y = \ln x + \frac{C}{x}$	$xy' + y = \ln x + 1$
24	$y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
	$y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$	$y' + y \cos x = \sin 2x$
	$y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$	$xy' + 2y = x^2$

25	$y = Cx^2 + e^x$	$y' - \frac{2}{x} y = \frac{e^x (x-2)}{x}$
	$y = \frac{1}{(C - \ln x) x}$	$y'x + y = xy^2$
	$y = \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2x + C}}$	$y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$
26	$y = -\left(x + \frac{1}{2} + Cx^{2x} \right)^{\frac{-1}{2}}$	$y + y' = xy^3$
	$y = \frac{x}{C - \ln x}$	$x^2 y' = y^2 + xy$
	$y = C \ln x + x^3$	$x \ln x \cdot y' - y = x^3 (3 \ln x - 1)$
27	$y = C\sqrt{x} + x^2$	$2xy' - y = 3x^2$
	$y = C(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$	$(x+1) y' = 2y + (x+1)^4$
	$y = (x^2 + C) e^{x^2}$	$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
28	$y^3 = Cx^2 + x^3$	$3xy^2 y' - 2y^3 = x^3$
	$y = \frac{Cx}{x^3 + 1} + \frac{1}{x}$	$(x^5 + x^2) y' + (2x^4 - x) y = x^3 - 2$
	$y^4 = C(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$	$2y'\sqrt{x^2 + x} = y$
29	$y = e^{x + x^2} + Ce^x$	$y' - y = 2xe^{x + x^2}$
	$y = -x \cos x + Cx$	$xy' = y + x^2 \cdot \sin x$
	$y = \frac{x}{Cxe^{x^2} + 1}$	$x^2 y' + 2x^3 y = y^2 (1 + 2x^2)$
30	$y = \frac{x^2}{2} + C$	$(y')^2 - (2x + y) y' + x^2 + xy = 0$
	$y = \frac{C}{x}$	$(xy')^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$
	$y = 2x^2 + C$	$(y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$

Задание 24. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ с помощью правила Лопиталя.

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Вариант 1</td></tr>
<tr><td>а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$</td><td>б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$</td><td>в) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$</td></tr>
<tr><td>г) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{x-1})$</td><td colspan="2">д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{2x}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Вариант 2</td></tr>
<tr><td>а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$</td><td>б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$</td><td>в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\ln\operatorname{ctg} x)$</td></tr>
<tr><td>г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{x}-\operatorname{ctg} x)$</td><td colspan="2">д) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Вариант 3</td></tr>
<tr><td>а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$</td><td>б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$</td><td>в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x))$</td></tr>
<tr><td>г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{x})$</td><td colspan="2">д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{x})^{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Вариант 4</td></tr>
<tr><td>а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$</td><td>б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$</td><td>в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} 5x\cdot\ln\operatorname{tg} 5x)$</td></tr>
<tr><td>г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$</td><td colspan="2">д) $\lim\limits_{x\to o}(\operatorname{ctg} 3x)^{\sin 3x}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Вариант 5</td></tr>
<tr><td>а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$</td><td>б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{4x^2}$</td><td>в) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln\frac{1}{x})$</td></tr>
<tr><td>г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{x^2})$</td><td colspan="2">д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Вариант 6</td></tr>
<tr><td>а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$</td><td>б) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{(2^x-1)}{(\ln(1+2x))})$</td><td>в) $\lim\limits_{x\to -1}(\operatorname{tg}(x+1)\ln\frac{1}{x+1})$</td></tr>
<tr><td>г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{tg} 2x})$</td><td colspan="2">д) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}+x)^{\frac{1}{x}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Вариант 7</td></tr>
<tr><td>а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2+x-1}$</td><td>б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$</td><td>в) $\lim\limits_{x\to -1}(\sin(x+1)\ln(x+1))$</td></tr>
<tr><td>г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{5}{\operatorname{tg} x})$</td><td colspan="2">д) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$</td></tr>
</table>

Вариант 8		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln 5x}{x-3}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{5}{\operatorname{tg} x})$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x})$	д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$	
Вариант 9		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\ln 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^{2}}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\arccos x-\frac{\pi}{2})\operatorname{ctg} x$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{2^{x}-1}-\frac{1}{\operatorname{tg} x})$	д) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$	
Вариант 10		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2}+3x}{\ln x}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{\ln x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\ln\operatorname{tg} 3x)$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{2^{x}-1}-\frac{1}{x})$	д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$	
Вариант 11		
а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2^{x}-16}{\sin\pi x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(2x\ln x)$
г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}})$	д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^{2})^{\frac{1}{x}}$	
Вариант 12		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2}+1}{e^{x}+2}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x\ln\sin x)$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\sin 2x})$	д) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$	
Вариант 13		
а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(9-2x^{2})}{\sin 2\pi x}$	в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\ln(1+\frac{1}{x^{2}}))$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x)$	д) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\operatorname{tg} x}$	
Вариант 14		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{3x}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x\ln\frac{1}{x})$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{4}{x^{2}})$	д) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$	

Вариант 15		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x}{e^{3x+1}}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x \ln x)$
г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}})$	д) $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4})^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$	

Вариант 16		
а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x+3}{\operatorname{tg} 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}\ln(e^x+x))$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x})$	д) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$	

Вариант 17		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{5x}}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln \sin x}$	в) $\lim\limits_{x\to 1}((1-x^2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2})$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{3^x-1})$	д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{2x}$	

Вариант 18		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$	в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}((\pi-2x)\operatorname{tg} x)$
г) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2^{x-1}-1})$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$	

Вариант 19		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^{7x}}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln \sin x}{(2x-\pi)^2}$	в) $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin(1-x)\operatorname{ctg}(1-x))$
г) $\lim\limits_{x\to -2}(\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2-4})$	д) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$	

Вариант 20		
а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x+2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{5x}-2^x}{x-\sin 9x}$	в) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x \ln(x-1))$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}})$	д) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} 3x)^{\sin x}$	

Вариант 21		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{e^{3x}}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} x}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3})$	д) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^x$	

Вариант 22		
а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin x+1}{\ln\sin 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4^x-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}(\arcsin x\operatorname{ctg}x)$
г) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2})$	д) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x})^x$	
Вариант 23		
а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x-\sin 5x}$	в) $\lim\limits_{x\to1}((1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2})$
г) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin x})$	д) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{2+\ln x}}$	
Вариант 24		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x+x^3}$	в) $\lim\limits_{x\to0}((1-\cos x)\operatorname{ctg}x)$
г) $\lim\limits_{x\to2\pi}(\frac{\cos x}{x-2\pi}-\frac{1}{\sin x})$	д) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x^2-1}}$	
Вариант 25		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^{2x}}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}$	в) $\lim\limits_{x\to\pi}((\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2})$
г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}-\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x-1})$	д) $\lim\limits_{x\to3}(x-3)^{x-3}$	
Вариант 26		
а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x+2}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5^x-2^{3x}}{\operatorname{tg}5x-x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x\ln x)$
г) $\lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})$	д) $\lim\limits_{x\to0}(\sin 3x)^{\operatorname{tg}x}$	
Вариант 27		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{e^{5x+1}}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 4x}{\ln\cos 6x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}(\sin 3x\ln\operatorname{tg}3x)$
г) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{4^x-1}-\frac{1}{\sin x})$	д) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$	
Вариант 28		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{e^x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{7x}-e^{2x}}{\sin 5x-\sin 3x}$	в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}((\pi-2x)\operatorname{tg}x)$
г) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{2}{x}-\frac{\cos 2x}{\sin 3x})$	д) $\lim\limits_{x\to2}(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8})^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$	
Вариант 29		
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{\sin^2 x}-1}{\ln\cos x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{tg}3x\cdot\ln\operatorname{tg}3x)$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{\cos 2x}{x^2}\right)$	д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{4}{3+\ln x}}$

	Вариант 30	
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2}{e^{3x}}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin\ \ln\operatorname{ctg} x)$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{\cos 3x}{\sin x}\right)$	д) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$	

Задание 25. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ с помощью правила Лопиталя.

	Вариант 1	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg} 3x}$	в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$
г) $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$	д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{\frac{1}{2-x}}$	е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^4-x^2-1}$
ж) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2-1}$	и) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$	к) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{\ln x}$
	Вариант 2	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg} 0{,}5x}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$	д) $\lim\limits_{x\to 2}(\cos x\pi)^{\operatorname{tg}(x-2)}$	е) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$
ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$	и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$	к) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln(2x^2-1)}$
	Вариант 3	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$	в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)^2}{e^{\sin x\pi}-e^{-\sin 3x\pi}}$
г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$	д) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(\arcsin x+\arccos x)^{\frac{1}{x}}$	е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^3-(1-3x)}{x^2+x^5}$
ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$	и) $\lim\limits_{x\to 1}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 3x}$	к) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x^3-e^3}$
	Вариант 4	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{\ln(1+5x)}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\mathrm{tg}\left(\frac{x\pi}{6}\right)}$	д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{2x}-e^{2}}{x-1}\right)^{x+1}$	е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-6x+5}$
ж) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$	и) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos 0{,}5x)^{\mathrm{tg}^2 3x}$	к) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln\frac{3}{x}}{\sin \pi x}$

Вариант 5

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 x-\sin^2 x}{x^4}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos(x\pi)}{\mathrm{tg}^2(x\pi)}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-5^{3x}}{\arccos x+x^3}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$	д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x+1)^{\sin x}$	е) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{x^2}{x^2-4}\right)$
ж) $\lim\limits_{x\to 1+}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$	и) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{\ln x}}$	к) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\cos 3x}{\sin^2 5x}$

Вариант 6

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{3x}-e^{x}}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(7x\pi)}{\sin(8x\pi)}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$
г) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\mathrm{ctg}\,2x}{\sin 3x}}$	д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x}+x-1\right)^{\sin\left(\frac{x\pi}{4}\right)}$	е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)-(1+x)^2}{x^2+x^4}$
ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{x+6}-3}$	и) $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\cos\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{x}}$	к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$

Вариант 7

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+5\sin^2 x)}$	б) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$	д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sin x}}{x-1}\right)^{x^2+1}$	е) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5\sqrt{x}-6}{x^2-16}$
ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt[3]{x-1}}$	и) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$	к) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$

Вариант 8

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{\mathrm{tg}^2 x-\sin^2 x}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}(x\pi)}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-5^{3x}}{\mathrm{arctg}\,x+x^3}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$	д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2+x}$
ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$	и) $\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{1+\ln x}{2}\right)^{\frac{1}{e^{x-e}-1}}$	к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\cos 5x-\cos 7x}$

Вариант 9		
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{12^x-5^{-2x}}{2\arcsin x-x}$
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$	д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{\pi}{\operatorname{arctg}(x-1)}}$	е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2+12x+11}$
ж) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$	и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+1}$	к) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x\ln\frac{5}{x}}{\cos x-\cos 5}$
Вариант 10		
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\operatorname{tg}6x}$	б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^x}{\arcsin x+x^3}$
г) $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$	д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\ln^2 ex\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$	е) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{x}{x^2-9}\right)$
ж) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$	и) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{2+x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln(x+1)}}$	к) $\lim\limits_{x\to3\pi}\dfrac{\sin x}{\cos x-\cos 3x}$
Вариант 11		
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln(1+3x^2)}$	б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin 4x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{tg3x-x}$
г) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$	д) $\lim\limits_{t\to\infty}(x+\sin x)^{\sin x+x}$	е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x^2+4x+7}{x^2+2x+1}$
ж) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{9}{8}x}}{\sqrt[3]{x}-2}$	и) $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^{\sec \pi x/4}$	к) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\sqrt{x^2-x+1}-1}$
Вариант 12		
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{\sin x}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{tg}^2 x-\sin x}$
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{2x}$	д) $\lim\limits_{x\to1}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\pi x}$	е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^4-(1+4x)}{x^2+x^3}$
ж) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{5x}-\sqrt{x+20}}{\sqrt[3]{25x}-5}$	и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)^{x+3}$	к) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{e^x-e}$
Вариант 13		
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin(x-x^4)}{\arcsin 5x}$	б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\pi x-\operatorname{arctg}x}$
г) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$	д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}(\operatorname{tg}2x)^{\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)}$	е) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{10}{x^2-25}\right)$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}}$	и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{x}}$	к) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-x)^2}$
Вариант 14		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\frac{x}{3})^3}{\ln(1+3x^2)}$	б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^3}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$	д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$	е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-6x^2+4x+8}$
ж) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-\sqrt{5x-6}}{\sqrt{x+2}-2}$	и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\cos\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$	к) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3-x)}{\sin\pi x}$
Вариант 15		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2 0{,}2x)}{3^{5x^2}-1}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x-\sin 5x}$
г) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$	д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x}}$	е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+2x^2-3x-4}$
ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}$	и) $\lim\limits_{x\to 1{,}5}\left(2-\dfrac{2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\pi x}$	к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\arcsin 2x}$
Вариант 16		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{\operatorname{tg} 3x}}{\sin x-1}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$	д) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{\frac{x^2}{a^2}}$	е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x^2-7x+6}$
ж) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{2-\sqrt[3]{6-x}}$	и) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+1}\right)^{\sqrt[3]{x}-1}$	к) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 5x-\sin 2x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$
Вариант 17		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1-\operatorname{arctg} 5x)}{\sin 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg} 2x-\sin 4x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{-2x}}{\sin 3x-2x}$
г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$	д) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$	е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^2+3x-10}$
ж) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+2}+x}$	и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(e+\dfrac{x^3}{2})\right)^{\frac{x}{\sin^2 x}}$	к) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x-\sin 2}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2}$
Вариант 18		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{\operatorname{tg} 5x}-1}{\ln(1+3x)}$	б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x + a\sin bx\right)^{\frac{1}{x}}$	д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x-\frac{3}{4}}{(x-1)^2}\right)^{\sin(x-\pi)}$	е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\dfrac{ex}{x+1}\right)^{x}$
ж) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}\right)$	и) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-3x)^3}{2x^2+x}$	к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2-2^x)}{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}}$
	Вариант 19	
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{2^{\arcsin x}-1}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x - tg\,2x}$
г) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}$	д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}\right)^{x^2}$	е) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+3x^2-28}{x^2-5x+6}$
ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$	и) $\lim\limits_{x\to\pi}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 3x}$	к) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$
	Вариант 20	
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{\sqrt{\sin 2x}}-1}{\operatorname{arctg} 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9^x-2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x-7x}$	в) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi-x}$
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$	д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\frac{\pi^2}{16}}{x-\frac{\pi}{4}}}$	е) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{12}{x^2-9}\right)$
ж) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}}{\sqrt[3]{6-x}+\sqrt[3]{4x}}$	и) $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{1+\ln x}{2}\right)^{\frac{x}{e-x}}$	к) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(4-3^x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}$
	Вариант 21	
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 5x}$	б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$	д) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^8-8}$	е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+3x)^2-(1-2x)^3}{x^2+x^7}$
ж) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2-3x+6}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$	и) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{ctg} x}$	к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-3x}{\sin(5^x-1)}$
	Вариант 22	
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\operatorname{tg} x}-1}{\ln(1+\arcsin 2x)}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$	в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$
г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$	д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\operatorname{tg}(9\pi x)}{\sin(4\pi x)}\right)^{\frac{x}{x+1}}$	е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+5x^3-6x}{x^2-8x+7}$

ж) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}+3}{\sqrt{-3x}-3}$	и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-11}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$	к) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\,\pi x}{\mathrm{tg}^2\,\pi x}$
Вариант 23		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,8x}{\ln(1+\sin\,3x)}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2\left(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}\right)}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^x}{\arcsin\,3x-5x}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\,\cos\,x}{x^2}$	д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^x\right)^{\frac{1}{\arcsin\,x}}$	е) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x^2+8}{x^3-8}\right)$
ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+8}-2}{x(\sqrt{x+1}-1)}$	и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin\,x}{1+tgx}\right)^{\frac{1}{\sin\,x-tgx}}$	к) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\dfrac{2x}{2+x}}{\sin\,x-\sin\,2}$
Вариант 24		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin\,5x}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin\,3x-\mathrm{tg}\,2x}$
г) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\mathrm{tg}\frac{x\pi}{2a}}$	д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1-x}}$	е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+9x^3}$
ж) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+6}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$	и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$	к) $\lim\limits_{x\to 0}\,(e^{\sin\,x}-1)\,\mathrm{ctg}\,3x$
Вариант 25		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\mathrm{tg}\,3x}-1}{\ln(1+\sqrt{x})}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin\,(x2\pi)}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin\,x-\mathrm{tg}\,x}$
г) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\,(\cos\,x)^{\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin\,4x}}$	д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\sin\,(\pi x)}$	е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-7x^2+10x}{x^2-25}$
ж) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+4x-3}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$	и) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi}{4}\right)^{\mathrm{tg}\,x}$	к) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\,x-\sin\,3x}{\cos\,x-\cos\,3x}$
Вариант 26		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x^2}{2^{\sin^3 x}-1}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\,\mathrm{tg}\,x}{\cos\,2x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\,\mathrm{tg}\,x-\sin\,x}$
г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$	д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\,(\sin\,x)^{\frac{6x}{\pi}}$	е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)^2-(1-3x)^3}{x^2+x^5}$
ж) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{5}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$	и) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\,(\cos\,4x)^{\mathrm{tg}^2\,3x}$	к) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin\,4-\sin\,x}{\mathrm{tg}\,4-\mathrm{tg}\,x}$
Вариант 27		
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\,x}{\ln(1+\mathrm{tg}^2\,x)}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin\,5x-\sin\,3x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^x}{\arcsin\,3x-5x}$

г) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\sin 2x}}$	д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin(x3\pi)}{\sin(x\pi)}\right)^{\sin 2(x-2)}$	е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+3x^2-2}{x^2-5x+4}$
ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x+7}-2}$	и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-\sin x}}$	к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 4x}$
	Вариант 28	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{\ln(1+5\sin^2 x)}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg}x-x^2}$
г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}$	д) $\lim\limits_{x\to 1}(\sin\pi x)^{\frac{3}{x-1}}$	е) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-4x+3}$
ж) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{2x}-4}$	и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$	к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\cos 2x-\cos 6x}$
	Вариант 29	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-\operatorname{tg}x}}{\sin^2 x}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin(x3\pi)}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$
г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{x\pi}{2}\right)}$	д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$	е) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x))$
ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{2x}}{x^2-1}$	и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^{\sin^4\sqrt{x}}-2\right)^{\frac{4}{x}}$	к) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x^2-2x+2}-1}$
	Вариант 30	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$	б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{5x}-2x}{x-\sin 9x}$
г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$	д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$	е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{x^2-7x+6}$
ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^3}}{4x}$	и) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{2}{\ln(x+1)}}$	к) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3^x-3}{\ln(3x^3-2)}$

Задание 26. Построить графики функции с помощью производной первого порядка:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$a)\ y=2x^3-9x^2+12x-9;$ $b)\ y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$	2	$a)\ y=3x-x^3;$ $b)\ y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$

3	$a)\ y=x^2(x-2)^2;$ $b)\ y=12\sqrt[3]{6(x-2)^2}/(x^2+8)$	4	$a)\ y=\dfrac{x^3-9x^2}{4}+6x-9;$ $b)\ y=-12\sqrt[3]{6(x-1)^2}/(x^2+2x+9)$
5	$a)\ y=2-3x^2-x^3;$ $b)\ y=1-\sqrt[3]{x^2+2x}$	6	$a)\ y=(x+1)^2(x-1)^2;$ $b)\ y=2x+6-3\sqrt[3]{(x+3)^2}$
7	$a)\ y=2x^3-3x^2-4;$ $b)\ y=6\sqrt[3]{6(x-3)^2}/(x^2-2x+9)$	8	$a)\ y=3x^2-2-x^3;$ $b)\ y=1-\sqrt[3]{x^2+4x+3}$
9	$a)\ y=(x-1)^2(x-3)^2;$ $b)\ y=3\sqrt[3]{(x-3)^2}-2x+6$	10	$a)\ y=\dfrac{x^3+3x^2}{4}-5;$ $b)\ y=-6\sqrt[3]{6x^2}/(x^2+4x+16)$
11	$a)\ y=6x-8x^3;$ $b)\ y=4x+8-6\sqrt[3]{(x+2)^2}$	12	$a)\ y=16x^2(x-1)^2;$ $b)\ y=3\sqrt[3]{6(x-4)^2}/(x^2-4x+12)$
13	$a)\ y=2x^3+3x^2-5;$ $b)\ y=\sqrt[3]{x(x+2)}$	14	$a)\ y=2-12x^2-8x^3;$ $b)\ y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$
15	$a)\ y=(2x+1)^2(2x-1)^2;$ $b)\ y=-3\sqrt[3]{6(x+1)^2}/(x^2+6x+17)$	16	$a)\ y=2x^3+9x^2+12x;$ $b)\ y=6\sqrt[3]{(x-2)^2}-4x+8$
17	$a)\ y=12x^2-8x^3-2;$ $b)\ y=3\sqrt[3]{6(x-5)^2}/(x^2-6x+7)$	18	$a)\ y=(2x-1)^2(2x-3)^2;$ $b)\ y=2+\sqrt[3]{8x(x+2)}$
19	$a)\ y=\dfrac{27(x^3-x^2)}{4}-4;$ $b)\ y=6x-6-9\sqrt[3]{(x-1)^2}$	20	$a)\ y=x(12-x^2)/8;$ $b)\ y=\sqrt[3]{x^2+6x+8}$
21	$a)\ y=x^2(x-4)^2/16;$ $b)\ y=\sqrt[3]{4x(x-1)}$	22	$a)\ y=\dfrac{27(x^3+x^2)}{4}-5;$ $b)\ y=-3\sqrt[3]{6(x+2)^2}/(x^2+8x+24)$
23	$a)\ y=(16-6x^2-x^3)/8;$ $b)\ y=\sqrt[3]{x(x-2)}$	24	$a)\ y=-(x^2-4)^2/16;$ $b)\ y=1-\sqrt[3]{x^2-4x+3}$
25	$a)\ y=16x^3-36x^2+24x-9;$ $b)\ y=9\sqrt[3]{(x+1)^2}-6x-6$	26	$a)\ y=(6x^2-x^3-16)/8;$ $b)\ y=6\sqrt[3]{6(x+3)^2}/(x^2+10x+33)$
27	$a)\ y=-(x-2)^2(x-6)^2/16;$ $b)\ y=8x-16-12\sqrt[3]{(x-2)^2}$	28	$a)\ y=16x^3-12x^2-4;$ $b)\ y=-6\sqrt[3]{6(x-6)^2}/(x^2-8+24)$
29	$a)\ y=(11+9x-3x^2-x^3)/8;$ $b)\ y=12\sqrt[3]{(x+2)^2}-8x-16$	30	$a)\ y=-(x+1)^2(x-3)^2/16;$ $b)\ y=3\sqrt[3]{6(x-1)^2}/(2(x^2+2x+9))$

Задание 27. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

Вариант	$f(x)$	$[a,b]$	Вариант	$f(x)$	$[a,b]$
1	$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$	[1,4]	2	$y = 4 - x - 4/x^2$	[1,4]
3	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$	[0,6]	4	$y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$	[−3,3]
5	$y = 2\sqrt{x} - x$	[0,4]	6	$y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$	[−1,5]
7	$y = x - 4\sqrt{x} + 5$	[1,9]	8	$y = 10x/(1+x^2)$	[0,3]
9	$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$	[−3,3]	10	$y = 2x^2 + 108/x - 59$	[2,4]
11	$y = 3 - x - 4/(x+2)^2$	[−1,2]	12	$y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$	[−1,6]
13	$y = 2\frac{-x^2+7x-7}{x^2-2x+2}$	[1,4]	14	$y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$	[−1,7]
15	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$	[1,5]	16	$y = 4x/(4+x^2)$	[−4,2]
17	$y = \frac{-x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$	[−4,−1]	18	$y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$	[−2,4]
19	$y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$	[−2,1]	20	$y = -\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$	[−5,1]
21	$y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$	[0,4]	22	$y = \frac{x^2-2x+16}{x-1} - 13$	[2,5]
23	$y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$	[1,5]	24	$y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$	[−3,4]
25	$y = -\frac{\frac{x^2}{2}+2x+8}{x-2} + 5$	[−2,1]	26	$y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15$	$[\frac{1}{2},2]$
27	$y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$	[−4,2]	28	$y = \frac{x^2+4x+16}{x+2} - 9$	[−1,2]
29	$y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$	$[-2,-\frac{1}{2}]$	30	$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$	[−2,5]

Задание 28. Решить задачу.

Вариант	Условие задачи
1	*a*) Имеется 200 м железной решетки, которой надо огородить с трех сторон площадку, примыкающую четвертой стороной к длинной каменной стене. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы она имела наибольшую площадь? *b*) Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество

	материала.
2	*a*) Кровельщику надо сделать открытый желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Как дно, так и бока желоба имеют ширину 10 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее возможное количество воды? *b*) В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.
3	*a*) Консервная коробка цилиндрической формы с дном и крышкой должна вмещать V см в кубе. Каковы должны быть размеры коробки, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала? *b*) Вблизи завода A проводится по намеченной прямой к городу B железная дорога. Под каким углом α к проектируемой железной дороге нужно провести шоссе от завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой, если стоимость перевозки 1 тонно-километра по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге?
4	*a*) Бак без крышки с квадратным основанием должен вмещать V литров воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала? *b*) Даны точки $A(0,3)$ и $B(4,5)$. На оси OX найти точку M так, чтобы расстояние $S=AM+MB$ было наименьшим.
5	*a*) Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить открытый сверху ящик. Для этой цели по углам листа вырезают равные квадраты и образовавшиеся края загибают сверху. Какого размера следует сделать вырезы, чтобы полученный ящик имел наибольшую вместимость? *b*) При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+1}$ часть курса, а забывает $\frac{1}{25}\cdot t$ часть. Сколько дней надо затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?
6	*a*) Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна? *b*) Прямоугольная пластинка помещается в равнобедренный треугольник со сторонами 2 и 3 м таким образом, что две ее вершины лежат на одной стороне треугольника, а две другие – на каждой из двух равных сторон. При каких размерах пластинки ее площадь максимальная?
7	*a*) Из полосы жести шириной 60 см, требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды? *b*) Необходимо огородить прямоугольный участок земли так, что одна сторона прямоугольника – берег реки. Площадь участка 800 м^2. Каковы должны быть размеры участка, чтобы длина огорожи (три стороны) была наименьшей?
8	*a*) Стрела прогиба балки прямоугольного поперечного сечения обратно пропорциональна произведению ширины этого сечения на куб его высоты.

	Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, с наименьшей стрелой прогиба (наибольшей жесткости)? b) Дом имеет форму параллелепипеда с квадратным основанием. Через каждый квадратный метр потолка уходит втрое больше тепла, чем через каждый кв. м стен, а через пол тепло не уходит. Объем дома 1500 м^3. Каковы размеры дома, при которых потери тепла минимальны?
9	a) Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим? b) В реке расположен небольшой остров. Длина перпендикуляра от этого острова до берега реки три километра, а расстояние от основания этого перпендикуляра по берегу (берег прямой) до расположенного на берегу города 12 км. Из города на остров прокладывают кабель. Стоимость укладки кабеля по воде 40 руб/м, а по берегу – 20 руб/м. В какой точке берега кабель будет выведен из воды с тем, чтобы стоимость его укладки была наименьшей?
10	a) На верхнее основание прямого кругового цилиндра поставлен прямой конус с таким же основанием. Высота конуса равна радиусу основания. Сумма боковых поверхностей цилиндра и конуса равна 625 см. Когда объем тела, составленного цилиндром и конусом, будет наибольшим? b) Кусок проволоки длиной 12 м режут на 2 части, из которых образуют окружность и квадрат. Определить отношение длины стороны квадрата и радиуса окружности при условии, что сумма площадей, ограниченных этими линиями фигур минимальна.
11	a) При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность? b) В какой точке параболы $y = 1 - x^2$ касательная к ней обладает свойством: площадь треугольника OAB минимальная, где A и B – точки пересечения касательной с координатными осями, а O – начало координат?
12	a) Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс с осями $2a$ и $2b$. b) Имеется круглый бассейн, радиус которого 50 м. Точки A и B – периметры бассейна расположены так, что угол между OA и OB – прямой (O – центр бассейна). Человек с начала идет по дуге периметра бассейна AP со скоростью 20 м/мин, а затем плывет по прямой PB со скоростью 25 м/мин. Найти положение точки P при оптимальном в смысле времени движении из точки A в точку B.
13	a) Через точку $A(3;5)$ провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом так, чтобы S – площадь треугольника, образованного ею с осями координат, была наименьшей. b) Корабль A расположен в 15 км к востоку от пункта O и движется на запад со скоростью 20 км/ч, корабль B – в 60 км к югу от O и движется на север со скоростью 15 км/ч. Когда расстояние между ними будет наименьшим?

14	a) Каковы должны быть размеры открытого чана цилиндрической формы при заданной емкости *V*, чтобы на изготовление его было затрачено наименьшее количество материала? b) Окно имеет форму прямоугольника, завершенного сверху равносторонним треугольником. Периметр окна L. При каких его размерах окно пропускает наибольшее количество света?
15	a) Из всех треугольников, имеющих данное основание $2a$ и данный угол при вершине α, найти тот, у которого площадь наибольшая. b) Диагональ прямоугольника равна L. Прямоугольник сворачивается в прямой круговой цилиндр. При каких размерах объем цилиндра наибольший?
16	a) Из трех досок одинаковой ширины a см, сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь сечения желоба будет наибольшей? b) Прямоугольная почтовая марка имеет площадь 500 ì ^{2} и такие поля: сверху 6 мм, а с остальных трех сторон по 4 мм. Каковы размеры наибольшего напечатанного на марке текста?
17	a) Доказать, что из всех трапеций, имеющих три равные данные стороны, наибольшую площадь имеет та, у которой угол при основании равен $\frac{\pi}{3}$. b) Аквариум в форме параллелепипеда имеет квадрат в основании, а объем его 4 м^3. Какое наименьшее количество стекла (в смысле площадк) идет на изготовление аквариума?
18	a) Бак без крышки с квадратным основанием должен вмещать 16 л воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала b) Треугольник ABC вписан в полукруг. Длина диаметра AC равна 10 м. Какой минимально возможный периметр треугольника?
19	a) Прямо над центром круглой площадки радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка. (Степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) b) Необходимо загородить два участка земли в виде двух тождественных прямоугольников, примыкающих к прямолинейному участку берега реки (изгородь имеет форму буквы Е). Имеется 300 м материала для изгороди. Какая наибольшая площадь может быть загорожена?
20	a) Мотком проволоки длиною 20 м требуется огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. При каком радиусе круга площадь клумбы будет наибольшей? b) Расстояние между двумя столбами высотой 3 и 5 м равно 5 м. Провод идет от вершины одного столба, заземляется на прямой, соединяющей основание столбов, затем снова идет к вершине другого столба. В какой точке необходимо заземлить провод, чтобы длина его была наименьшей?
21	a) Три пункта *A, B* и С расположены не на одной прямой; $\angle ABC = 60°$. Из

	пункта A выходит автомобиль, а одновременно из пункта B – поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если AB = 200 км? *b*) Окно имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Прямоугольная часть (из прозрачного стекла) пропускает весь падающий на нее свет, а полукруглая (из цветного стекла) – только половину света. Общая высота окна 6дм. Найти ширину окна таким образом, чтобы оно пропускало наибольшее количество света.
22	*a*) На странице книги печатный текст должен занимать S квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое – по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы? *b*) Мотоциклист находится в поле на расстоянии 5 км от точки A, представляющей собой ближайшую к нему точку пряиолинейной трассы, пересекающей поле. Пункт B расположен на трассе, AB равно 10 км. Мотоциклист движется по полю со скоростью 15 км/ч, а по трассе – 39 км/ч. В какой точке между A и B он должен выехать на трассу, чтобы попасть в пункт B в кратчайшее время?
23	*a*) Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 м/с и v_2 м/с. Движение происходит по двум прямым, образующим угол $\pi/2$, в направлении к вершине этого угла, от которой в начале движения первое тело находилось на расстоянии a, а второе – на расстоянии b. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим? *b*) Необходимо загородить два участка земли в виде двух тождественных прямоугольников, примыкающих к прямолинейному участку берега реки (изгородь имеет форму буквы Е). Имеется 200 м материала для изгороди. Какая наибольшая площадь может быть загорожена?
24	*a*) Из полосы жести шириной 60 см, требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды? *b*) На параболе $y = x^2$ найти точку N, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.
25	*a*) Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения тоннеля c м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей? *b*) Основание прямоугольника (и, значит две вершины) лежит на оси OX, а две другие вершины – на кривой $y = e^{-x^2}$. Указать вершины таким образом, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей. Показать, что вершины в этом случае совпадают с точками перегиба указанной линии.
26	*a*) Из трех досок одинаковой ширины b см, сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь сечения желоба будет наибольшей? *b*) Требуется покрыть тонким слоем свинца внутри емкость для хранения радиоактивного препарата, имеющую форму правильной

	четырехугольной призмы, объем которой 16 см^3. Какова должна быть сторона основания призмы, чтобы при этом затратить наименьшее количество свинца (крышка также покрывается свинцом)?
27	*a*) На верхнее основание прямого кругового цилиндра поставлен прямой конус с таким же основанием. Высота конуса равна радиусу основания. Сумма боковых поверхностей цилиндра и конуса равна 125 см. Когда объем тела, составленного цилиндром и конусом, будет наибольшим? *b*) Дождевая капля, начальная масса которой m, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем).
28	*a*) При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка вместимости 16 л будет иметь наименьшую полную поверхность? *b*) Находящийся на горизонтальной поверхности шар радиусом R накрывают сверху конической воронкой. Какой высоты воронку необходимо выбрать, чтобы находящееся под ней пространство имело наибольший объем?
29	*a*) Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром 12, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим? *b*)) Корабль A расположен в 15 км к востоку от пункта O и движется на запад со скоростью 20 км/ч, корабль B – в 60 км к югу от O и движется на север со скоростью 15 км/ч. Когда расстояние между ними будет наименьшим?
30	*a*) Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс с осями 12 см и 8 см. *b*) Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб./ч, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб./ч. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

Задание 29. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

Вариант	$f(x)$	x_0
1	$y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x)$	0
2	$y = 4x - x^2 - 2\cos(x - 2)$	2
3	$y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2$	1
4	$y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x$	1

5	$y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x$	1
6	$y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4$	–2
7	$y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}$	2
8	$y = 6e^{x+1} - (x+1)^3 - 3(x+1)^2 - 6x + 1$	–1
9	$y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2)$	2
10	$y = x^2 + 2\ln(x+2)$	–1
11	$y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2)$	–2
12	$y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2$	–1
13	$y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x)$	–1
14	$y = 1 - 2x - x^2 + 2\cos(x+1)$	–1
15	$y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$	1
16	$y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1$	0
17	$y = 6x^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$	2
18	$y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1)$	1
19	$y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$	–1
20	$y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$	–2
21	$y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$	–1
22	$y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2$	–1
23	$y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x$	–1
24	$y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$	2
25	$y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$	0
26	$y = 2e^x + 2\sin x - x^2 - 4x$	0
27	$y = 2e^{x-1} - 2\cos(x-1) - 2x(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3$	1
28	$y = 2\ln x + (x-2)^2$	1
29	$y = 4(x-1) - (x-1)^2 - 2\cos(x-3)$	3
30	$y = 2e^x - 2\cos x - 2x(x+1) - \frac{1}{3}x^3$	0

Задание 30. Найти асимптоты и построить графики функций:

Вариа нт	Задание	Вариан т	Задание
1	$y = (17 - x^2)/(4x - 5)$	2	$y = (x^2 + 1)/\sqrt{4x^2 - 3}$
3	$y = (x^3 - 4x)/(3x^2 - 4)$	4	$y = (4x^2 + 9)/(4x + 8)$

5	$y=(4x^3+3x^2-8x-2)/(2-3x^2)$	6	$y=(x^2-3)/\sqrt{3x^2-2}$
7	$y=(2x^2-6)/(x-2)$	8	$y=(2x^3+2x^2-3x-1)/(2-4x^2)$
9	$y=(x^3-5x)/(5-3x^2)$	10	$y=(x^2-6x+4)/(3x-2)$
11	$y=(2-x^2)/\sqrt{9x^2-4}$	12	$y=(4x^3-3x)/\sqrt{4x^2-1}$
13	$y=(x^2 3-7)/(2x+1)$	14	$y=(x^2+16)/\sqrt{9x^2-8}$
15	$y=(x^3+3x^2-2x-2)/(2-3x^2)$	16	$y=(21-x^2)/(7x+9)$
17	$y=(2x^2-1)/\sqrt{x^2-2}$	18	$y=(2x^3-x^2-2x+1)/(1-3x^2)$
19	$y=(x^2-11)/(4x-3)$	20	$y=(2x^2-9)/\sqrt{x^2-1}$
21	$y=(x^3-2x^2-3x+2)/(1-x^2)$	22	$y=(x^2+2x-1)/(2x+1)$
23	$y=(x^3+x^2-3x-1)/(2x^2-2)$	24	$y=(x^2+6x+9)/(x+4)$
25	$y=(3x^2-10)/\sqrt{4x^2-1}$	26	$y=(x^2-2x+2)/(x+3)$
27	$y=(2x^3+2x^2-9x-3)/(2x^2-3)$	28	$y=(3x^2-10)/(3-2x)$
29	$y=(-x^2-4x+13)/(4x+3)$	30	$y=(-8-x^2)/\sqrt{x^2-4}$

Задание 31. Провести полное исследование и построить графики функций.

Вариант	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	$y=x^3-3x^2$	$y=\ln\frac{x}{x+2}+1$
2	$y=\frac{(x^2-2)^3}{8}$	$y=x-2\,\mathrm{arctg}\,x$
3	$y=\frac{4-x^3}{x^2}$	$y=\frac{x}{2}-\mathrm{arctg}\,x$
4	$y=\frac{2x}{(x+2)}$	$y=x\ln x$
5	$y=\frac{x^3}{(x^2+12)}$	$y=x^2\ln x$
6	$y=\frac{x^2}{8}-\frac{2}{x}$	$y=(1+x^2)e^x$
7	$y=1+\frac{2}{x^2-1}$	$y=\mathrm{arctg}\,x-x$
8	$y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$	$y=2x-\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{2}$
9	$y=x-\frac{8}{x^4}$	$y=e^{-x^2}$

10	$y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$	$y = e^{\frac{1}{x}}$
11	$y = x + \dfrac{1}{x}$	$y = \dfrac{e^x}{x}$
12	$y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$	$y = 2e^{x^2 - 4x}$
13	$y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$	$y = xe^{-x}$
14	$y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$	$y = \ln(x^2 + 1)$
15	$y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$	$y = \dfrac{e^x}{1 + x}$
16	$y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$	$y = x - \ln(1 + x^2)$
17	$y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$	$y = x - e^x$
18	$y = x^2 + \dfrac{2}{x}$	$y = x - \ln(1 + x)$
19	$y = \dfrac{x^4 + 3}{x}$	$y = (3 - x)e^{x-2}$
20	$y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$	$y = (4 - x)e^{x-3}$
21	$y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$	$y = xe^{-x}$
22	$y = \dfrac{(x^2 - 5)^3}{125}$	$y = \dfrac{x}{\ln x}$
23	$y = \dfrac{(x - 2)^2 (x + 4)}{4}$	$y = x + 2\,\mathrm{arctg}\, x$
24	$y = (x - 1)^2 (x + 2)$	$y = \dfrac{x}{2} + \mathrm{arctg}\, x$
25	$y = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$	$y = xe^{-2x}$
26	$y = 2x^3 - x^2$	$y = (1 - x)e^{x-2}$
27	$y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$	$y = \dfrac{e^x}{x^2}$
28	$y = x - \dfrac{4}{x^3}$	$y = \dfrac{e^x}{1 - x}$
29	$y = \dfrac{x^3}{(x^2 + 4)}$	$y = x^3 \ln x$

30	$y = \dfrac{x^3 + 3}{x^2}$	$y = 4e^{x^2 - 2x}$

Задание 32. Провести полное исследование функций и построить их графики.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y=(x^3+4)/x^2$	2	$y=(x^2-x+1)/(x-1)$
3	$y=2/(x^2+2x)$	4	$y=4x^2/(3+x^2)$
5	$y=12x/(9+x^2)$	6	$y=(x^2-3x+3)/(x-1)$
7	$y=(4-x^3)/x^2$	8	$y=(x^2-4x+1)/(x-4)$
9	$y=(2x^3+1)/x^2$	10	$y=(x-1)^2/x^2$
11	$y=x^2/(x-1)^2$	12	$y=(1+1/x)^2$
13	$y=(12-3x^2)/(x^2+12)$	14	$y=(9+6x-3x^2)/(x^2-2x+13)$
15	$y=-8x/(x^2+4)$	16	$y=((x-1)/(x+1))^2$
17	$y=(3x^4+1)/x^3$	18	$y=4x/(x+1)^2$
19	$y=8(x-1)/(x+1)^2$	20	$y=(1-2x^3)/x^2$
21	$y=4/(x^2+2x-3)$	22	$y=4/(3+2x-x^2)$
23	$y=(x^2+2x-7)/(x^2+2x-3)$	24	$y=1/(x^4-1)$
25	$y=-(x/(x+2))^2$	26	$y=(x^3-32)/x^2$
27	$y=4(x+1)^2/(x^2+2x+4)$	28	$y=(3x-2)/x^2$
29	$y=(x^2-6x+9)/(x-1)^2$	30	$y=(x^3-27x+54)/x^3$

Задание 33. Провести полное исследование функций и построить их графики.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$	2	$y=e^{2(x+1)}/(2(x+1))$
3	$y=3\ln(x/(x-3))-1$	4	$y=(3-x)e^{x-2}$
5	$y=e^{2-x}/(2-x)$	6	$y=\ln(x/(x+2))+1$
7	$y=(x-2)e^{3-x}$	8	$y=e^{2(x-1)}/(2(x-1))$
9	$y=3-3\ln(x/(x+4))$	10	$y=-(2x+1)e^{2(x+1)}$
11	$y=e^{2(x+2)}/(2(x+2))$	12	$y=\ln(x/(x-2))-2$
13	$y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$	14	$y=e^{3-x}/(3-x)$
15	$y=2\ln(x/(x+1))-1$	16	$y=(4-x)e^{x-3}$

17	$y=-e^{-2(x+2)}/(2(x+2))$	18	$y=2\ln((x+3)/x)-3$
19	$y=(2x-1)e^{2(1-x)}$	20	$y=-e^{-(x+2)}/(x+2)$
21	$y=2\ln(x/(x-4))-3$	22	$y=-(x+1)e^{x+2}$
23	$y=e^{x+3}/(x+3)$	24	$y=\ln(x/(x+5))-1$
25	$y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$	26	$y=-e^{-2(x-1)}/(2(x-1))$
27	$y=\ln((x-5)/x)+2$	28	$y=(x+4)e^{-(x+3)}$
29	$y=e^{x-3}/(x-3)$	30	$y=\ln((x+6)/x)-1$

Задание 34. Провести полное исследование функции и построить ее график.

Вариант	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	$y=\dfrac{\left(3x^2-1\right)^2}{4x^3}$	$y=\left(1+x^2\right)e^x$
2	$y=\dfrac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^3$	$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos x$
3	$y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$	$y=4e^{-\frac{x^2}{2}}$
4	$y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$	$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
5	$y=\dfrac{(x-1)^3}{4(x+1)^2}$	$y=\dfrac{2\ln x}{\sqrt{x}}$
6	$y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$	$y=(x+2)e^{-\frac{1}{x}}$
7	$y=3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}$	$y=\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{4}x$
8	$y=\dfrac{4}{x^2-4x+5}$	$y=\dfrac{4}{1+e^{-\frac{x}{2}}}-2$
9	$y=\dfrac{x}{x^2-2x-\frac{1}{4}}$	$y=\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^3$
10	$y=x^4-2x^3-3$	$y=-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
11	$y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$	$y=x-\sin x$

12	$y=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$	$y=x^3e^{-x}$
13	$y=3+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}$	$y=\frac{4\ln x}{x}$
14	$y=\frac{16x}{x^2+4x+4}$	$y=\arcsin\frac{x}{2}-x$
15	$y=x\sqrt{\frac{x}{x+2}}$	$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$
16	$y=\frac{1}{x^2+4x-5}$	$y=\frac{e^x}{x^2}$
17	$y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$	$y=\frac{x}{2}+\cos x+\frac{\pi}{4}$
18	$y=9\left(x-\sqrt[3]{x^2}\right)$	$y=e^x-x-1$
19	$y=\frac{32x}{4x^2+11x+16}$	$y=\ln\left(x^2+1\right)$
20	$y=\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}$	$y=\ln\frac{x-3}{x+1}$
21	$y=-\frac{1}{5}x^5+x+\frac{4}{5}$	$y=\ln(1+x)-x$
22	$y=\frac{x}{x^2-4}$	$y=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$
23	$y=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$	$y=2\cos x-3x+\frac{3\pi}{2}$
24	$y=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$	$y=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x$
25	$y=\left(x^2-1\right)^3-2$	$y=\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)^2$
26	$y=\frac{(x+1)^3}{4(x-1)^2}$	$y=(x-1)^3e^x$
27	$y=\sqrt{\frac{32-x^3}{6x}}$	$y=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^3$
28	$y=\frac{x^2+5x+6}{x^2+1}$	$y=2xe^{-\frac{x^2}{2}}$
29	$y=\frac{1}{4}(x+2)^3(x-1)^2$	$y=\ln\frac{2+x}{2-x}$
30	$y=\sqrt{\left(4-\sqrt[3]{x^2}\right)^3}$	$y=x\ln(x+1)$

Задание 35. Для линии $y = f(x)$ определить кривизну и радиус кривизны в произвольной точке $(x; y)$ и заданной точке x_0. Записать уравнение окружности кривизны в заданной точке.

Вариант	$y = f(x)$	x_0	Вариант	$y = f(x)$	x_0
1	$y = x^2$	$(1;\ 1)$	2	$y = \sin x$	$\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3	$y = \ln x$	$(1; 0)$	4	$y = x^3$	$(1;\ 1)$
5	$y = \sqrt[3]{x}$	$(1;\ 1)$	6	$xy = 4$	$(2; 2)$
7	$y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$	$(0; 0)$	8	$y = \cos x$	$\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
9	$y = -\ln\cos x$	$\left(\frac{\pi}{3};\ \ln 2\right)$	10	$y^2 = 8x$	$\left(\frac{9}{8}; 3\right)$
11	$y = e^{-x}$	$(0;\ 1)$	12	$y = 4x - x^2$	$(2;\ 4)$
13	$y = e^{-x^2}$,	$(0;\ 1)$	14	$y = xe^{-x}$	$(0;\ e^{-1})$
15	$y = \frac{x^3 + 1}{3}$	$(-1;\ 0)$	16	$y = \frac{1}{1 + x^2}$	$(0;\ 1)$
17	$2y = x^2 + 4x$	$(-2;\ -2)$	18	$y^2 = x^3$	$(1;\ 1)$
19	$y^2 = 2(x+1)$	$(1;\ 2)$	20	$x^2 = 4y$	$(2;\ 1)$
21	$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(0;\ 1)$	22	$y = \frac{x^3}{3}$	$\left(-1;\ -\frac{1}{3}\right)$
23	$y = \sqrt{3x}$	$(1; \sqrt{3})$	24	$y^3 = a^2 x$	$(a; a)$
25	$y = \operatorname{tg} x$	$\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$	26	$y = \sin 2x$	$\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$
27	$xy = 2$	$(1; 2)$	28	$y^2 = 4x$	$(1; 2)$
29	$y = \mathrm{e}^{2x}$	$(0; 1)$	30	$y = \cos 3x$	$\left(\frac{\pi}{6};\ 0\right)$

Задание 36. Для линии, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ определить кривизну и радиус кривизны в точке, соответствующей значению параметра t_0. Записать уравнение окружности кривизны в заданной точке.

Вариант	Уравнение линии	t_0	Вариант	Уравнение линии	t_0
1	$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$	1	2	$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = a \operatorname{sh} t \end{cases}$	0
3	$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	4	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	$\frac{\pi}{4}$
5	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	6	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$
7	$\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	8	$\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2 - 2 \end{cases}$	1
9	$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$	1	10	$\begin{cases} x = -a\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + \cos t\right), \\ y = a\sin t \end{cases}$	$\frac{\pi}{6}$
11	$\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^2 - 6 \end{cases}$	2	12	$\begin{cases} x = 2(3\cos t + \cos 3t), \\ y = 2(3\sin t + \sin 3t) \end{cases}$	0
13	$\begin{cases} x = e^t, \\ y = \sin t \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	14	$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	0
15	$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$	1	16	$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2}t^3 \end{cases}$	1
17	$\begin{cases} x = 2e^{2t}, \\ y = e^{3t} \end{cases}$	0	18	$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + t^3 \end{cases}$	1
19	$\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$	1	20	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + 2\sin t \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$
21	$\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$	0	22	$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$	1
23	$\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$	0	24	$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$	0

25	$\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{2}{3t^2} + \dfrac{2}{t} \end{cases}$	1	26	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$	1
27	$\begin{cases} x = 4e^t, \\ y = \sin 3t \end{cases}$	0	28	$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = t^4 \end{cases}$	1
29	$\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$	1	30	$\begin{cases} x = a\left(1+\cos^2 t\right)\sin t, \\ y = a \sin^2 t \cos t \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{2}$

Задание 37. Для линии $r = r(\varphi)$ определить кривизну и радиус кривизны при произвольном значении φ.

Вар-т	$r = r(\varphi)$	Вар-т	$r = r(\varphi)$	Вар-т	$r = r(\varphi)$
1	$r = \dfrac{\upsilon}{\omega}\varphi$	2	$r = ae^{m\varphi}$	3	$r = a^{\varphi}$
4	$r = a\varphi^k$	5	$r = a(1+\cos\varphi)$	6	$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$
7	$r = \dfrac{a}{\varphi}$	8	$r = a(1-\cos\varphi)$	9	$r^2 = a^2 \sin 2\varphi$
10	$r^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$	11	$r^2 = \dfrac{a^2}{\sin 2\varphi}$	12	$r = a\sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$
13	$r = a \operatorname{tg} \varphi$	14	$r = a(1+\sin\varphi)$	15	$r = a\sin 2\varphi$
16	$r = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$	17	$r = a\cos^3 \dfrac{\varphi}{3}$	18	$r = \dfrac{p}{1+\sin\varphi}$
19	$r = 2a(2+\cos\varphi)$	20	$r = a\cos 5\varphi$	21	$r = 2a(2+\sin\varphi)$
22	$r = a\cos 3\varphi$	23	$r = a\sin 5\varphi$	24	$r = a\cos 2\varphi$
25	$r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$	26	$r = \dfrac{p}{1-\sin\varphi}$	27	$r = \dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$
28	$r = 2a(3-\cos\varphi)$	29	$r = 2a(4-\sin\varphi)$	30	$r = a(1-\sin\varphi)$

Задание 38. Закон движения материальной точки задан вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Найти:

1. Кривизну и кручение годографа вектор-функции при произвольном t и t_0.
2. Записать естественный репер при t_0.
3. Записать уравнения координатных осей и плоскостей сопровождающей системы координат при t_0 (трехгранник Френе).

Вариант	$\bar{r} = \bar{r}(t)$	t_0
1	$\bar{r}(t) = (t - \sin t)\bar{i} + (1 - \cos t)\,\bar{j} + 2\sin t\bar{k}$	$\frac{\pi}{2}$
2	$\bar{r}(t) = (t^2 + 1)\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + e^t\,\bar{k}$	0
3	$\bar{r}(t) = 2\sin^2 t\bar{i} + 2\,\text{ños}^2 t\,\bar{j} + \sin 2t\bar{k}$	$\frac{\pi}{4}$
4	$\bar{r}(t) = e^{-t}\,\bar{i} + e^t\,\bar{j} + t\bar{k}$	0
5	$\bar{r}(t) = (t^3 + 8t)\bar{i} + t^2\,\bar{j} + (t^5 - 3t)\bar{k}$	0
6	$\bar{r}(t) = \operatorname{tg} t\bar{i} + \operatorname{ctg} t\,\bar{j} + \cos 2t\bar{k}$	$\frac{\pi}{4}$
7	$\bar{r}(t) = (t^2 - 2t)\bar{i} + (t^3 - 1)\,\bar{j} - t\bar{k}$	1
8	$\bar{r}(t) = t\bar{i} + (t^2 + 2t)\,\bar{j} + (t + 3)\bar{k}$	–3
9	$\bar{r}(t) = (t^3 + 3t)\bar{i} + 8\sqrt{t^3}\,\bar{j} + 0.5(t^2 - 5)\bar{k}$	1
10	$\bar{r}(t) = \cos^2 t\bar{i} + \sin t\cos t\,\bar{j} + \sin t\bar{k}$	0
11	$\bar{r}(t) = (t + \cos t)\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + t\bar{k}$	0
12	$\bar{r}(t) = (t^2 - 3)\bar{i} + (t^3 + 2)\,\bar{j} + (\ln t - t)\bar{k}$	1
13	$\bar{r}(t) = 2\ln(t + 3)\bar{i} + (t^2 + 3t)\,\bar{j} + (t^2 + t)\bar{k}$	–2
14	$\bar{r}(t) = (2 - t^3)\bar{i} + (20 - t^2)\,\bar{j} + 2t^3\bar{k}$	1
15	$\bar{r}(t) = \cos t\bar{i} - 3\sin t\,\bar{j} + 2\operatorname{tg} t\bar{k}$	0
16	$\bar{r}(t) = e^{2t}\bar{i} - e^{-2t}\,\bar{j} + (1 - t^2)\bar{k}$	0
17	$\bar{r}(t) = (2t^2 - 5)\bar{i} + (t^3 - 2t)\,\bar{j} + t^2\bar{k}$	2
18	$\bar{r}(t) = \frac{1}{t}\bar{i} + (t^3 - 5t)\,\bar{j} + 2\ln t\bar{k}$	1
19	$\bar{r}(t) = 2\ln(t - 2)\bar{i} + \frac{2}{t - 2}\,\bar{j} + (t^2 - 10t)\bar{k}$	3
20	$\bar{r}(t) = 3t^2\,\bar{i} + (1 - 3t)\,\bar{j} + 2t^3\,\bar{k}$	1
21	$\bar{r}(t) = (t^3 - 4)\bar{i} + (t^2 + t)\,\bar{j} - 3t\bar{k}$	1
22	$\bar{r}(t) = \ln(t + 1)\bar{i} - \frac{1}{t + 1}\,\bar{j} + t^2\,\bar{k}$	0
23	$\bar{r}(t) = e^{-3t}\,\bar{i} + 2e^{2t}\,\bar{j} - (2 - t^2)\bar{k}$	0
24	$\bar{r}(t) = (1 - t^2)\bar{i} + t^3\,\bar{j} - \frac{1}{t}\bar{k}$	1
25	$\bar{r}(t) = (t - \sin t)\bar{i} + (1 - \cos t)\,\bar{j} + 4\sin\frac{t}{2}\bar{k}$	π
26	$\bar{r}(t) = \frac{1}{1 + t}\bar{i} - 2t^2\,\bar{j} - t^2\,\bar{k}$	0

27	$\bar r(t) = \ln(2+t)\bar i - (t^2+1)\bar j + (t-1)\bar k$	-1
28	$\bar r(t) = e^{-t}\bar i + \frac{1}{3}e^{3t}\bar j - e^{-2t})\bar k$	0
29	$\bar r(t) = (t^3-2)\bar i + (4-t)\bar j + 2t^2\bar k$	1
30	$\bar r(t) = 2t^2\bar i - (3-t^2)\bar j - \frac{1}{t}\bar k$	-1

Задание 39. По заданному закону движения материальной точки $\bar r = \bar r(t)$ установить вид ее траектории и для момента $t = t_0$ найти:

1) положение точки на траектории,
2) скорость и ускорение точки,
3) кривизну и кручение траектории,
4) записать естественный репер при t_0.
5) записать уравнения координатных плоскостей сопровождающей системы координат (трехгранник Френе).

Вариант	$\bar r = \bar r(t)$	t_0
1	$\bar r(t) = (-2t^2+3)\bar i - 5t\bar j$	0,5
2	$\bar r(t) = \left(4\cos^2\frac{\pi t}{3}+2\right)\bar i + 4\sin^2\frac{\pi t}{3}\bar j$	1
3	$\bar r(t) = \left(-\cos\frac{\pi t^2}{3}+3\right)\bar i + \left(\sin\frac{\pi t^2}{3}-1\right)\bar j$	1
4	$\bar r(t) = (4t+4)\bar i - \frac{4}{t+1}\bar j$	2
5	$\bar r(t) = 2\sin\frac{\pi t}{3}\bar i - \left(3\cos\frac{\pi t}{3}+4\right)\bar j$	1
6	$\bar r(t) = (3t^2+2)\bar i - 14t\bar j$	0,5
7	$\bar r(t) = (3t^2-t+1)\bar i + \left(5t^2-\frac{5}{3}t-2\right)\bar j$	1
8	$\bar r(t) = \left(7\sin\frac{\pi t^2}{6}+3\right)\bar i + \left(2-\cos\frac{\pi t^2}{6}\right)\bar j$	1
9	$\bar r(t) = -\frac{3}{t+2}\bar i + (3t+6)\bar j$	2
10	$\bar r(t) = -4\cos\frac{\pi t}{3}\bar i - \left(-2\sin\frac{\pi t}{3}-3\right)\bar j$	1
11	$\bar r(t) = (-4t^2+1)\bar i + (8-3t)\bar j$	0,5

12	$\bar{r}(t) = 5\sin^2\frac{\pi t}{6}\bar{i} + \left(-5\cos^2\frac{\pi t}{6} - 3\right)\bar{j}$	1
13	$\bar{r}(t) = 5\cos\frac{\pi t^2}{3}\bar{i} - 5\sin\frac{\pi t^2}{3}\bar{j}$	1
14	$\bar{r}(t) = (-2t - 2)\bar{i} - \frac{2}{t+1}\bar{j}$	2
15	$\bar{r}(t) = 4\cos\frac{\pi t}{3}\bar{i} - 3\sin\frac{\pi t}{3}\bar{j}$	1
16	$\bar{r}(t) = 3t\bar{i} + \left(4t^2 + 1\right)\bar{j}$	0,5
17	$\bar{r}(t) = \left(7\sin\frac{\pi t^2}{6} - 5\right)\bar{i} - 7\cos^2\frac{\pi t^2}{6}\bar{j}$	1
18	$\bar{r}(t) = \left(3\cos\frac{\pi t^2}{3} + 1\right)\bar{i} + \left(3\sin\frac{\pi t^2}{3} + 3\right)\bar{j}$	1
19	$\bar{r}(t) = (-5t^2 - 4)\bar{i} + 3t\bar{j}$	1
20	$\bar{r}(t) = \left(2 - 3t - 6t^2\right)\bar{i} + \left(3 - \frac{3}{2}t - 3t^2\right)\bar{j}$	0
21	$\bar{r}(t) = \left(6\sin\frac{\pi t^2}{6} - 2\right)\bar{i} + \left(6\cos\frac{\pi t^2}{6} + 3\right)\bar{j}$	1
22	$\bar{r}(t) = (7t^2 - 3)\bar{i} + 5t\bar{j}$	0,25
23	$\bar{r}(t) = (3 - 3t^2 + t)\bar{i} + \left(4 - 5t^2 + \frac{5}{3}t\right)\bar{j}$	1
24	$\bar{r}(t) = \left(-4\cos\frac{\pi t}{3} - 1\right)\bar{i} - 4\sin\frac{\pi t}{3}\bar{j}$	1
25	$\bar{r}(t) = -6t\bar{i} + \left(-2t^2 - 4\right)\bar{j}$	1
26	$\bar{r}(t) = \left(8\cos\frac{\pi t^2}{6} + 2\right)\bar{i} + \left(-8\sin\frac{\pi t^2}{6} - 7\right)\bar{j}$	1
27	$\bar{r}(t) = \left(-9\sin\frac{\pi t^2}{6} - 3\right)\bar{i} - \left(9\cos^2\frac{\pi t^2}{6} - 5\right)\bar{j}$	1
28	$\bar{r}(t) = \left(-4t^2 + 1\right)\bar{i} - 3t\bar{j}$	1
29	$\bar{r}(t) = (5t^2 + \frac{5}{3}t - 3)\bar{i} + \left(3t^2 + t + 3\right)\bar{j}$	1
30	$\bar{r}(t) = \left(-2\cos\frac{\pi t^2}{3} - 2\right)\bar{i} + \left(-2\sin\frac{\pi t^2}{3} + 3\right)\bar{j}$	1

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Тест по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Часть 1

А1. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремиться к нулю называется:

1) интегралом функции; 2) производной функции; 3) дифференциалом функции;
4) пределом функции.

А2. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 при приращении аргумента Δx называется число:

1) $\Delta y = f(\Delta x) - f(x_0)$; 2) $\Delta y = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$; 3) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

А3. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и в ее окрестности, называется дифференцируемой при $x = x_0$, если:

1) $\Delta y = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция;

2) $\Delta y = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta y$;

3) $\Delta y = A(x_0) \cdot f(x_0) + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

А4. Если функция дифференцируема, то предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x - \Delta x) - f(x + 3\Delta x)}{2\Delta x}$ равен:

1) $f'(x)$; 2) $2f'(x)$; 3) $-2f'(x)$; 4) $-4f'(x)$; 5) $-f'(x)$.

А5. Физическим смыслом первой производной от функции одного независимого переменного является:

1) ускорение; 2) скорость; 3) угловой коэффициент касательной; 4) путь.

А6. Физическим смыслом второй производной от функции одного независимого переменного, является:

1) ускорение; 2) скорость; 3) путь; 4) угловой коэффициент касательной.

А7. Геометрическим смыслом первой производной от функции одной переменной является:

1) угловой коэффициент нормали; 2) угловой коэффициент касательной;
3) ускорение; 4) скорость.

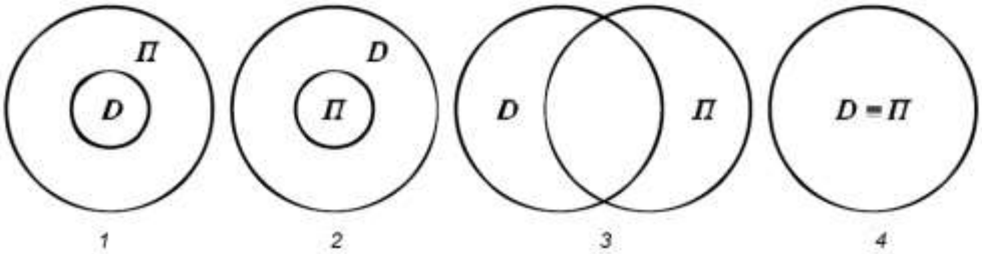
А8. Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t) = -t^3 + 2t^2 - 2t$. Каково будет ускорение этой точки в момент времени $t_0 = 1$:

1) –4; 2) –3; 3) –2; 4) 0.

А9. Постройте диаграмму взаимного расположения множества функций:

П – имеющих производную в точке x_0;

D – дифференцируемых в точке x_0.



1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

А10. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость в точке x_0 функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

В качестве ответа укажите два числа, соответствующие вашим исследованиям, из следующей таблицы:

x_0 – точка непрерывности	x_0 – точка разрыва	в точке x_0 функция дифференцируема	в точке x_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

1) 2,4; 2) 1,4; 3) 2,3; 4) 1,3.

Часть 2

В1. Если функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы, то $(U \cdot V)'$ и $\left(\dfrac{U}{V}\right)'$ вычисляются соответственно по формулам:

1) $U' \cdot V - V' \cdot U$ и $\dfrac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}$; 2) $U' \cdot V + V' \cdot U$ и $\dfrac{V' \cdot U - U' \cdot V}{V^2}$;

3) $U' \cdot V + V' \cdot U$ и $\dfrac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}$.

В2. Производная функции $y = \sin(4x^2 + 1)$ имеет вид:

1) $8x\cos(4x^2 + 1)$; 2) $-8x\cos(4x^2 + 1)$; 3) $-\cos(4x^2 + 1)$; 4) $x\cos(4x^2 + 1)$.

В3. Угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2 + 9$ в точке $x_0 = 1$ равен:

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 2; 3) 1; 4) –2.

В4. Производная функции $y = \dfrac{e^x - 1}{x + 1} + 3$ имеет вид:

1) $\dfrac{xe^x + 1}{(x+1)^2}$; 2) $\dfrac{xe^x + e^x}{\sqrt{x+1}}$; 3) $\dfrac{xe^x + x}{(x+1)}$; 4) $\dfrac{xe^x - x}{(x+1)}$.

B5. Производная функции $y = \dfrac{\ln x - 2}{x - 3}$ имеет вид:

1) $\dfrac{3x - \ln x}{(x-3)^2}$; 2) $\dfrac{3 - \ln x}{(x-3)^2} - \dfrac{3}{x(x-3)^2}$; 3) $\dfrac{3 + \ln x}{x(x-3)^2} + \dfrac{3}{x(x-3)^2}$; 4) $\dfrac{3x - \ln x}{x(x-3)^2}$.

B6. Производная обратной тригонометрической функции $y = \dfrac{1}{4}\arcsin 5x$ равна:

1) $\dfrac{1}{4\sqrt{1-25x^2}}$; 2) $\dfrac{5}{4\sqrt{1+25x^2}}$; 3) $\dfrac{5}{4(1+25x^2)}$; 4) $\dfrac{5}{4\sqrt{1-25x^2}}$.

B7. Производная функции $y = \sin\sqrt{x^2 + 4x - 5}$ имеет вид:

1) $\sin\sqrt{x^2+4x-5}\,\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$; 2) $\cos\sqrt{x^2+4x-5}\,\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$;

3) $\cos\sqrt{x^2+4x-5}$; 4) $\cos\sqrt{x^2+4x-5}\,(2x+4)$.

B8. Производная функции $y = \cos^2 x \cdot \cos 2x$ имеет вид:

1) $\sin^2 x \sin 2x$; 2) $4\sin x \sin 2x$; 3) $-\sin 2x(\cos 2x + 2\cos^2 x)$;
4) $-2\cos x \sin 2x$.

B9. Производная функции $y = \ln\cos x + \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$ имеет вид:

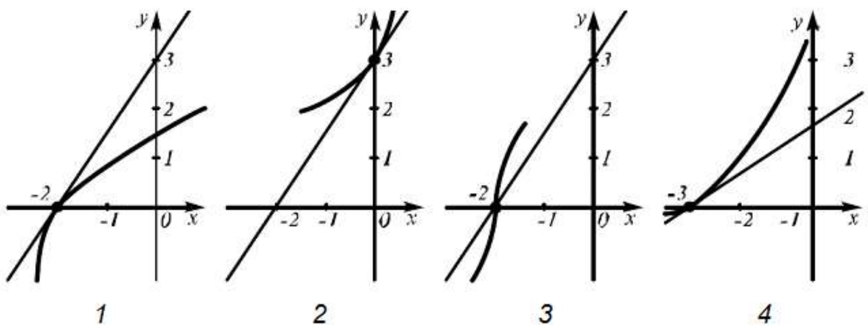
1) $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}$; 2) $\operatorname{tg}^2 x$; 3) $\dfrac{\sin x - \cos^2 x}{\cos^2 x}$; 4) $\dfrac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$.

B10. Производная функции $y = (x+1)\operatorname{arctg} e^{-2x}$ имеет вид:

1) $-\dfrac{2e^{2x}(x+1)}{e^{4x}+1}$; 2) $\operatorname{arctg} e^{-2x} + \dfrac{e^{2x}(x+1)}{e^{4x}+1}$; 3) $\operatorname{arctg} e^{-2x} - \dfrac{2e^{2x}(x+1)}{e^{4x}+1}$;

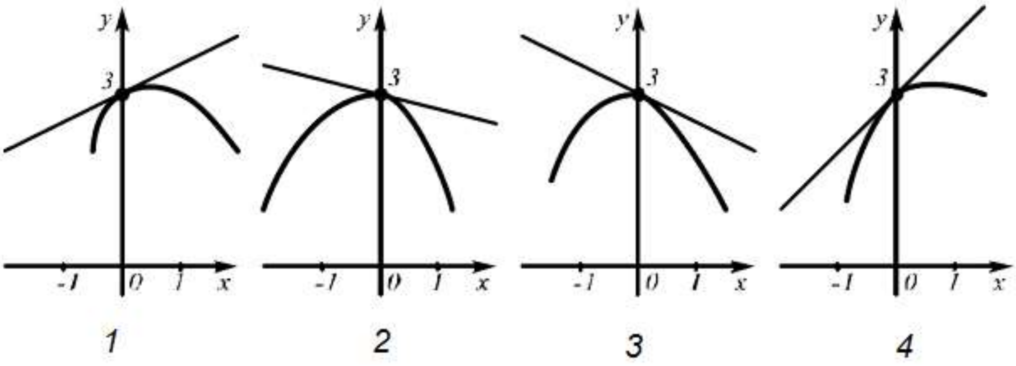
4) $\operatorname{arctg} e^{-2x} - \dfrac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$.

B11. Какой из приведенных графиков функций удовлетворяет условиям $f(-2) = 0$, $f'(-2) = 1{,}5$.



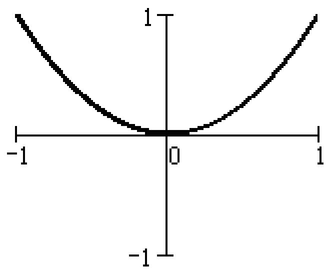
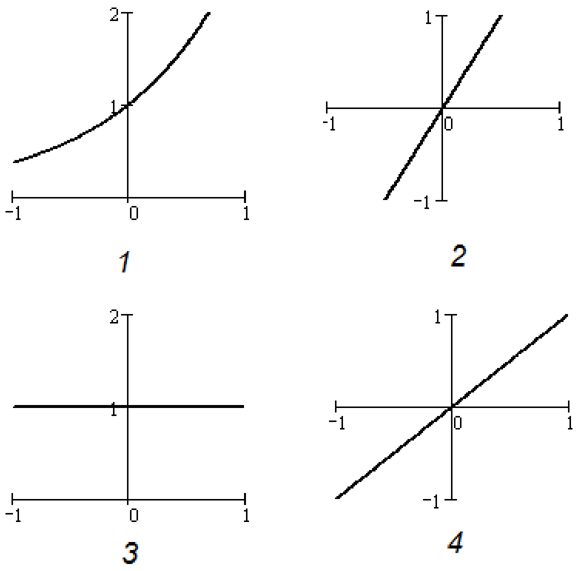
1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

B**12.** Какой из приведенных графиков функций удовлетворяет условиям $f(0) = 3, \quad f'(0) = 0{,}5$.



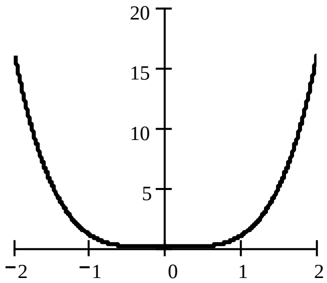
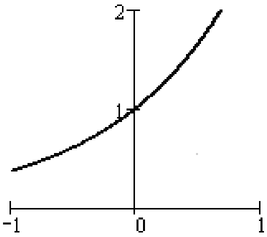
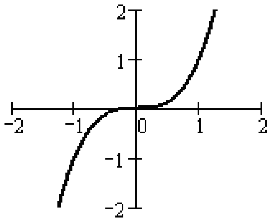
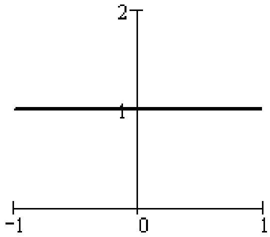
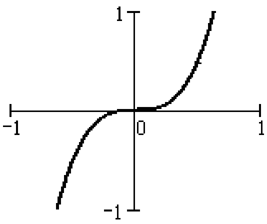
1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

B13. Какой из графиков производных соответствует графику функции.

График функции	Графики производных
	

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

B14. Какой из графиков производных соответствует графику функции.

График функции	Графики производных
	 1  2  3  4

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

B15. Количество электричества Q, протекающее через поперечное сечение проводника, измеряется по закону $Q = 3t^2 + 2t$. Найти силу тока в конце 5-й секунды.

1) 17; 2) 30; 3) 85; 4) 32.

B16. Движение тела, брошенного вертикально с начальной скоростью V_0 с высоты S_0, подчиняется закону $S = S_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Через сколько секунд тело, брошенное вертикально вверх с высоты 2 м с начальной скоростью 30 м/с, достигнет наивысшей точки. Считать $g = 10$ м/с ^{2}.

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 3.

B17. Зависимость между количеством вещества, получаемого в некоторой химической реакции и временем t выражается уравнением $x = A\left(1 - e^{-kt}\right)$. Определить скорость реакции.

1) $-Ake^{-kt}$; 2) Ake^{-kt}; 3) $A\left(1 - e^{-kt}\right)$; 4) $\frac{A\left(1 - e^{-kt}\right)}{t}$.

Часть 3

C1. Производная неявной функции $x^2 + 5xy + y^2 - 7 = 0$ будет равна:

1) $y' = \dfrac{2x+5y}{5x+2y}$; 2) $y' = -\dfrac{2x+5y}{5x+2y}$; 3) $y' = -\dfrac{2y+5x}{5y+2x}$; 4) $y' = \dfrac{2y+5x}{5y+2x}$.

C2. Производная неявной функции $e^{y} - e^{-y} - 2xy = 0$ будет равна:

1) $y' = \dfrac{e^{y} + e^{-y} - 2x}{2xy}$; 2) $y' = \dfrac{e^{y} - e^{-y} + 2x}{2xy}$; 3) $y' = \dfrac{2xy}{e^{y} + e^{-y} - 2x}$;

4) $y' = -\dfrac{2xy}{e^{y} + e^{-y} - 2x}$.

C3. Вычислить в точке $M(5;0)$ значение производной неявной функции $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$.

1) 2; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $0{,}2$; 4) $\dfrac{2}{5}$.

C4. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точке $M(-3;0)$.

1) 2; 2) -2; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{2}$.

C5. Функция $x = x(y)$ задана неявным уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x > 0$. Найти $x'(y)$.

1) $\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$; 2) $\dfrac{a^2 y}{b^2 x}$; 3) $\dfrac{2x}{a^2}$; 4) $-\dfrac{2y}{b^2}$.

C6. Функция $y(x)$ задана неявным уравнением $e^{y} - e^{-x} + xy = 0$. Найти $y'(0)$.

1) 2; 2) -1; 3) 0; 4) 4.

C7. Производная функции, заданной параметрически $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, имеет вид:

1) $y'_x = \operatorname{tg} t$; 2) $y'_x = -\operatorname{tg} t$; 3) $y'_x = -\operatorname{ctg} t$; 4) $y'_x = \operatorname{ctg} t$.

C8. Производная функции, заданной параметрически $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, имеет вид:

1) $y'_x = -\operatorname{tg} t$; 2) $y'_x = 1$; 3) $y'_x = t$; 4) $y'_x = -1$.

C9. Производная степенно-показательной функции $y = x^{\sqrt{x}}$ будет иметь вид:

1) $y = \sqrt{x}(x)^{\sqrt{x}-1}$; 2) $y' = x^{\sqrt{x}} \ln x$;

3) $y' = x^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \dfrac{1}{x}$; 4) $y' = \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \left(\ln \sqrt{x} + 1\right)$.

C10. Производная степенно-показательной функции $y = (\cos x)^{\sin x}$ будет иметь вид:

1) $y' = (-\sin x)^{\sin x}$; 2) $y' = (\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln \cos x - \sin x \operatorname{tg} x)$;

3) $y' = \cos x \ln \cos x - \sin^2 x \dfrac{1}{\cos x}$; 4) $y' = (\cos x)^{\sin x - 1} \sin x$.

C11. Производная второго порядка функции $y = \ln 5x$ имеет вид:

1) $-\dfrac{1}{5x^2}$; 2) $-\dfrac{1}{x^2}$; 3) $\dfrac{5}{x}$; 4) $\dfrac{1}{x^2}$.

C12. Вторая производная функции $y = \sin^2 x$ будет равна:

1) $2\sin 2x$; 2) $2\cos 2x$; 3) $2\cos x$; 4) $2\sin x$.

C13. Вторая производная функции $y = \operatorname{ctg} x$ будет равна:

1) $\operatorname{tg} x$; 2) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 3) $2\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; 4) $-2\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

C14. Вторая производная функции $y = \dfrac{x^2 + x}{x-1}$ будет равна:

1) $\dfrac{2x+1}{x-1}$; 2) $\dfrac{4}{(x-1)^3}$; 3) $\dfrac{4x-1}{(x-1)^3}$; 4) $\dfrac{1}{(x-1)^3}$.

C15. Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически $x = a\ln t$ и $y = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$:

1) $\dfrac{(t^2+1)}{2at}$; 2) $\dfrac{(t^2+1)}{2a}$; 3) $\dfrac{(t+1)}{2at}$; 4) $\dfrac{a}{t}$.

C16. Производная третьего порядка от функции $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ равна:

1) $3x$; 2) 18; 3) 9; 4) $18x$.

C17. Производная третьего порядка от функции $y = \sin 2x$ будет иметь вид:

1) $8\cos 2x$; 2) $8\cos x$; 3) $\cos 2x$; 4) $8\sin 2x$.

C18. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно $\Delta y = A(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, то дифференциалом функции называется:

1) $A(x_0)\Delta x$ и обозначается $y'(x_0)$;

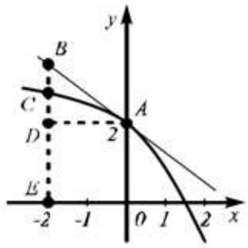
2) $\alpha(x)\Delta x$ и обозначается $d\,f(x_0)$;

3) $A(x_0)\Delta x$ и обозначается $d\,f(x_0)$.

C19. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно $\Delta y = A(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, то:

1) $A(x_0) = dy$; 2) $A(x_0) = y'$; 3) $A(x_0)\Delta x = y'$.

C20. Для функции $y = 3 - 2^x$ указать Δy и dy в точке $x_0 = 0$ при $\Delta x = -2$.



1) $\Delta y = DC$, $dy = DB$; 2) $\Delta y = DB$, $dy = AB$; 3) $\Delta y = EC$, $dy = EB$;
4) $\Delta y = ED$, $dy = EB$.

Часть 4

D1. Правило Лопиталя: если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки $x = C$, $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to C} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to C} g(x) = 0$, то:

1) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to C} f(x)}{\lim\limits_{x \to C} g(x)}$; 2) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to C} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)'$;

3) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to C} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

D2. Найти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$ по правилу Лопиталя:

1) $-\dfrac{12}{9}$; 2) 1; 3) $-\dfrac{1}{6}$; 4) $\dfrac{1}{8}$.

D3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3}$ по правилу Лопиталя:

1) $-\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{4}{3}$; 3) $\dfrac{1}{4}$; 4) 4.

D4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)}{1 - \cos 3x}$ по правилу Лопиталя:

1) $\dfrac{1}{7}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{1}{27}$; 3) $\dfrac{1}{81}$.

D5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{e^{2x} - 1} \right)$ по правилу Лопиталя:

1) 1; 2) 0; 3) ∞; 4) -2.

D6. Достаточным условием возрастания функции $y = f(x)$ на $(a;b)$ является:
1) $f'(x) < 0$ в любой точке $x \in (a;b)$;
2) $f''(x) < 0$ в любой точке $x \in (a;b)$;
3) $f'(x) > 0$ в любой точке $x \in (a;b)$;

4) $f''(x) > 0$ в любой точке $x \in (a;b)$.

D7. Функция f определена на всей числовой прямой. Если для любых a и b, удовлетворяющих условию $a < b$, выполняется неравенство $f(b) - f(a) < 0$, то функция обязательно:

1) монотонно возрастает; 2) строго возрастает;
3) монотонно убывает; 4) строго убывает; 5) положительная функция.

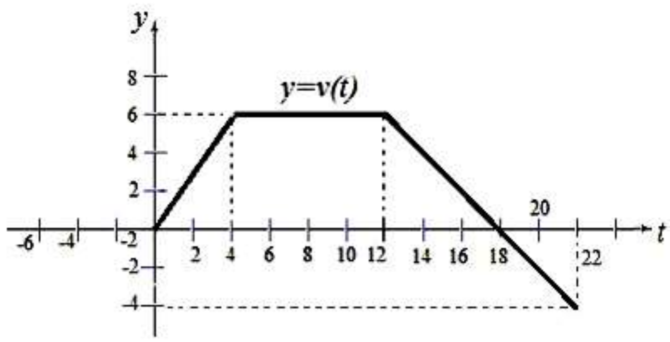
D8. При каком наименьшем целом значении параметра a функция $f(x) = ax - \sin x$ не убывает на всей числовой оси.

1) -2; 2) -1; 3) 1; 4) 3.

D9. При каком наименьшем целом положительном значении параметра a функция $f(x) = \dfrac{4x^2 + a^2}{2ax}$ не возрастает на множестве $[-1;0) \cup (0;1]$.

1) 4; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

D10. На рисунке изображен график скорости $v(t)$ движения автомобиля.



Пусть $r = r(t)$ – расстояние, на которое удалился автомобиль за время t. Тогда функция $r = r(t)$ возрастает при:

1) $t \in (14;16)$; 2) $t \in (8;10)$; 3) $t \in (1;2)$; 4) $t \in (18;20)$.

Укажите не менее двух правильных вариантов ответов.

D11. Значение функции $y_1 = f(x_1)$, которое больше всех других ее значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т. е. $f(x_1) > f(x)$ называется:

1) максимумом функции $y = f(x)$;
2) минимумом функции $y = f(x)$;
3) наибольшим значением функции $y = f(x)$;
4) наименьшим значением функции $y = f(x)$.

D12. Точка, в которой производная функции $y = f(x)$ равна нулю, называется:

1) точкой перегиба; 2) точкой разрыва;
3) критической точкой; 4) критической стационарной точкой.

D13. Значение функции $y = 3x^4 + 4x^3$ в точке локального минимума равно:

1) -1; 2) 3; 3) 4; 4) –7.

D14. Найти наибольшее (M) и наименьшее (m) значение функции $y = \sin x + \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$:

1) $m = -\sqrt{2}$, $M = \sqrt{2}$; 2) $m = -\sqrt{2}$, $M = -1$; 3) $m = -\sqrt{2}$, $M = 0$;

4) $m = -1$, $M = \sqrt{2}$.

D15. Найти наибольшее (M) и наименьшее (m) значение функции $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1;1]$.

1) $m = -5$, $M = -1$; 2) $m = -5$, $M = 0$; 3) $m = -1$ $M = 0$; 4) $m = -5$, $M = 1$.

D16. График функции $y = f(x)$, у которой соответствующая дуга кривой расположена выше касательной, проведенной в любой точке $M(x, f(x))$ этой дуги называется:

1) выпуклым вниз в промежутке (a, b); 2) выпуклым вверх в промежутке (a, b);

3) возрастающим; 4) убывающим.

D17. Точка, при переходе через которую непрерывная кривая $y = f(x)$ меняет свою вогнутость на выпуклость (и наоборот) называется:

1) точкой экстремума; 2) точкой перегиба;

3) точкой разрыва; 3) точкой непрерывности.

D18. Прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении от начала координат, называется:

1) касательной к этой кривой; 2) асимптотой данной кривой;

3) директирсой данной кривой; 3) осью симметрии данной кривой.

D19. Заполните пропуск в высказывании: «Равенство $f''(x_0) = 0$ есть ……. условие точки перегиба графика дважды дифференцируемой функции».

1) достаточное; 2) необходимое; 3) необходимое и достаточное;

4) равенство $f''(x_0) = 0$ не связано с существованием точки перегиба графика функции.

D20. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой для функции $y = f(x)$, если:

1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - kx) = b$; 2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x} = b$ и $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - kx) = k$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = b$ и $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = k$.

D21. При каком наименьшем целом положительном значении параметра a функция $f(x) = \sqrt{ax^2 - 1}$ имеет левостороннюю наклонную асимптоту, образующую с положительным направлением оси Ox угол 120°.

1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 4.

D22. Асимптотой графика функции $y = \dfrac{4x^2 + 3x + 2}{x}$ является прямая…

1) $y = 4x + 3$; 2) $y = -4x + 3$; 3) $y = 0$; 4) $y = x$.

D23. Если $y = kx + b$ – наклонная асимптота функции $y = \dfrac{3 - 4x^3}{x^2 + 1}$, то сумма $k + b$ равна:

1) 0; 2) –1; 3) –8; 4) –4; 5) 4.

D24. Необходимое условие экстремума для дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется равенством:

1) $f'(x_0) \neq 0$; 2) $f''(x_0) \neq 0$; 3) $f''(x_0) = 0$; 4) $f'(x_0) = 0$.

D25. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в окрестности критической точки $x = C$ и дифференцируема в ее проколотой окрестности, тогда максимум функции соответственно будет:

1) если $f'(x) > 0$ при $x < C$ и $f'(x) < 0$ при $x > C$;

2) если $f'(x) < 0$ при $x < C$ и $f'(x) > 0$ при $x > C$;

3) если $f'(x) > 0$ при $x < C$ и $f'(x) > 0$ при $x > C$;

4) если $f'(x) < 0$ при $x < C$ и $f'(x) < 0$ при $x > C$.

D26. Если $x = C$ – критическая точка функции $y = f(x)$, в которой $f'(C) = 0$, то в точке $x = C$ будет минимум, если:

1) $f''(C) > 0$; 2) $f''(C) < 0$; 3) $f''(C) = 0$;

4) $f''(C) > 0$ при $x < C$ и $f''(C) < 0$ при $x > C$.

D27. Если функция $y = f(x)$ определена на $(a;b)$ и для всех $x \in (a;b)$ $f''(C) < 0$, то функция $y = f(x)$ на $(a;b)$:

1) убывает; 2) возрастает; 3) выпукла; 4) вогнута.

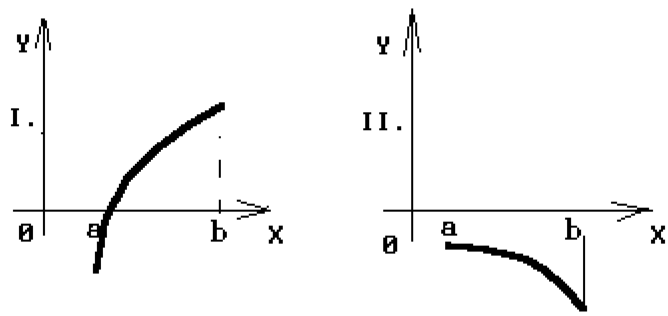
D28. Достаточным условием точки перегиба C является:

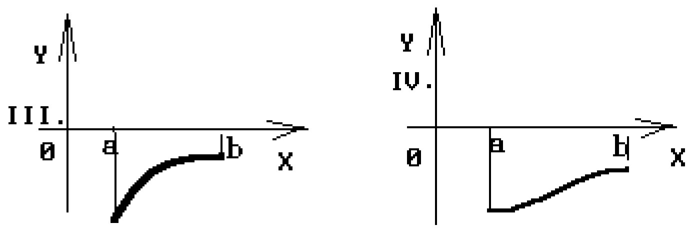
1) $f''(C) \neq 0$ и $f''(x)$ слева и справа от точки C имеет разные знаки;

2) $f''(C) = 0$ и $f''(x)$ слева и справа от точки C имеет разные знаки;

3) $f''(C) = 0$ и $f''(x)$ слева и справа от точки C имеет одинаковые знаки.

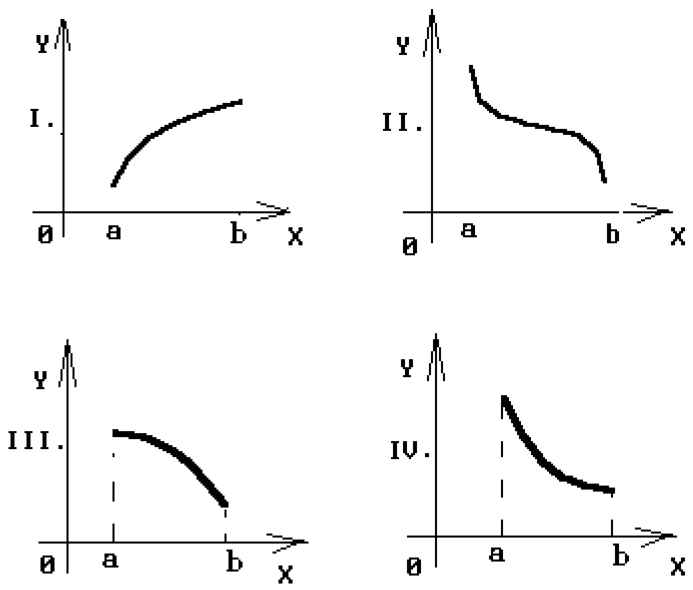
D29. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке $[a,b]$ одновременно выполняются три условия: $y < 0$; $y' > 0$; $y'' < 0$.





1) только IV; 2) только I; 3) только I и II; 4) только I и IV; 5) только III.

D30. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке [a,b] одновременно выполняются три условия: $y > 0$; $y' < 0$; $y'' < 0$.



1) только I; 2) только II; 3) только I и IV; 4) только III; 5) только II и IV.

D31. Известно, что для некоторой функции на интервале $(0;\infty)$ установлены следующие свойства: $y > 0, y' > 0, y'' > 0$. Какая из перечисленных элементарных функций удовлетворяет всем этим условиям:

1) $y = x^3$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \dfrac{1}{x}$; 4) $y = \ln x$.

D32. Известно, что для некоторой функции на интервале $(0;\infty)$ установлены следующие свойства: $y > 0, y' < 0, y'' > 0$. Какая из перечисленных элементарных функций удовлетворяет всем этим условиям:

1) $y = x^3$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \dfrac{1}{x}$; 4) $y = \ln x$.

Ответы на тесты по разделу
«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

	A	B	C	D		A	B	C	D
1	**2**	**3**	**2**	**3**	**17**		**2**	**1**	**2**
2	**3**	**1**	**3**	**3**	**18**			**3**	**2**
3	**1**	**2**	**2**	**2**	**19**			**2**	**2**
4	**3**	**1**	**3**	**3**	**20**			**1**	**3**
5	**2**	**2**	**2**	**1**	**21**				**3**
6	**1**	**4**	**2**	**3**	**22**				**1**
7	**2**	**2**	**3**	**4**	**23**				**4**
8	**3**	**3**	**4**	**3**	**24**				**4**
9	**4**	**2**	**4**	**3**	**25**				**1**
10	**1**	**3**	**2**	**1,2,3**	**26**				**1**
11		**1**	**2**	**1**	**27**				**3**
12		**1**	**2**	**4**	**28**				**2**
13		**2**	**3**	**1**	**29**				**5**
14		**3**	**2**	**1**	**30**				**4**
15		**4**	**1**	**2**	**31**				**1**
16		**4**	**2**	**1**	**32**				**3**