Тема: Плоские кривые

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология (практика)
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с. 90 № 2 в), г), 3, 6, 8, 9, 11, 13, 14, с.103 №1, 2 а), в) с.106 №1, 2 б), г), 3, 4, с. 125 № 2 в), г), 5, 6.

Рекомендуемое домашнее задание

с. 90 № 1, 2 а), б), 5 а), 7, с.103 № 2 г), с.106 2 а), в), с. 125№ 2а), б), 4.

Касательная и нормаль

Написать уравнения касательной и нормали к линиям:
в) $x^3 + y^3 = 3xy$ в точке $A(3/2, 3/2)$; г) $\rho = 2a\cos\varphi$ в точке $\varphi_0 = \pi/4$.

в) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; $x_0 = y_0 = 3/2$; $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
$\operatorname{grad} F(x, y) = {}^t(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$;
$\vec{n}_0 = \operatorname{grad} F(x_0, y_0) = {}^t(3x_0^2 - 3y_0, 3y_0^2 - 3x_0) = {}^t(9/4, 9/4)$.
Касательная: $9/4(x - 3/2) + 9/4(y - 3/2) = 0$; $x + y - 3 = 0$;
нормаль: $\dfrac{x - 3/2}{9/4} = \dfrac{y - 3/2}{9/4}$; $x - y = 0$.
г) $x = \rho\cos\varphi = 2a\cos^2\varphi$; $y = \rho\sin\varphi = 2a\cos\varphi\sin\varphi = a\sin 2\varphi$;
$\alpha(t) = {}^t(2a\cos^2 t, a\sin 2t)$, $t_0 = \pi/4$; $\alpha(t_0) = {}^t(a, a)$;
$\dot\alpha(t) = {}^t(-4a\cos t\sin t, 2a\cos 2t) = {}^t(-2a\sin 2t, 2a\cos 2t)$; $\dot\alpha(t_0) = {}^t(-2a, 0)$.
Касательная: $x = u$, $y = a$; $y - a = 0$; нормаль: $x = a$, $y = a + u$; $x - a = 0$.

Касательная

В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ перпендикулярна прямой $x - 2y + 8 = 0$?

Касательная к параболе в точке x_0: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$;
$y - x_0^2 + 6x_0 - 5 = (2x_0 - 6)(x - x_0)$;
$2(x_0 - 3)x - y + x_0^2 - 6x_0 + 5 - 2x_0^2 + 6x_0 = 0$; $2(x_0 - 3)x - y - x_0^2 + 5 = 0$;
$\vec{n}_1 = {}^t(2(x_0 - 3), -1)$; $\vec{n}_2 = {}^t(1, -2)$; $\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 0$; $2(x_0 - 3) + 2 = 0$; $x_0 = 2$;
$y_0 = x_0^2 - 6x_0 + 5 = -3$.
Касательная к параболе перпендикулярна прямой в точке $(2, -3)$.

Угол между кривыми

Под каким углом пересекаются линии $x^2 + y^2 = 8x$ и $y^2 = \dfrac{x^3}{2-x}$?

Точки пересечения: $x^2 + \dfrac{x^3}{2-x} = 8x$; $2x^2 - x^3 + x^3 = 16x - 8x^2$;
$10x^2 - 16x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 8/5$; $y_1 = 0$, $y_{2,3} = \pm\frac{16}{5}$.
Для второй кривой $\dfrac{x^3}{2-x} \geq 0$, откуда $0 \leq x < 2$.
$F_1(x,y) = x^2 + y^2 - 8x$, $F_2(x,y) = x^3 - y^2(2-x)$;
$\operatorname{grad} F_1(x,y) = {}^t(2x-8, 2y)$, $\operatorname{grad} F_2(x,y) = {}^t(3x^2 + y^2, 2y(x-2))$;
$\operatorname{grad} F_1(x_1,y_1) = {}^t(-8,0)$; касательная вертикальна; $\operatorname{grad} F_2(x_1,y_1) = {}^t(0,0)$; касательная не определяется.
$y = x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$; $y'(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}} + x\left(\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\right)'$; $y'(0) = 0$, касательная горизонтальна. Угол между кривыми в точке $(0,0)$ – $\pi/2$.
$\operatorname{grad} F_1(x_2,y_2) = {}^t(-24/5, 32/5) = 8/5\,{}^t(-3,4)$; $\operatorname{grad} F_2(x_2,y_2) = \frac{64}{25}\,{}^t(7,-1)$;
$\cos\varphi_2 = \frac{-25}{25\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; угол $3\pi/4$ или $\pi/4$.
$\operatorname{grad} F_1(x_2,y_3) = {}^t(-24/5, -32/5) = 8/5\,{}^t(-3,-4)$; $\operatorname{grad} F_2(x_2,y_3) = \frac{64}{25}\,{}^t(7,1)$;
угол тот же.

Характеризация логарифмических спиралей и окружностей

Доказать, что тангенс угла μ, образованного касательной к линии $\rho = \rho(\varphi)$ с радиус-вектором, проведенным в точку касания, задается формулой $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{\rho}{d\rho/d\varphi}$. Проверить. что этот угол μ у логарифмической спирали $\rho = Ca^{\varphi}$, $a > 0$, постоянный. Доказать, что этим свойстом могут обладать только окружности и логарифмические спирали.

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\alpha(\varphi) = {}^t(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)$.
$\dot\alpha(\varphi) = {}^t(\dot\rho(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi, \dot\rho(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)$; радиус-вектор, проведенный в точку касания: $\alpha(\varphi) - O$ (O – начало координат);

$$\cos\mu = \cos\widehat{(\dot\alpha, \alpha)} = \frac{(\dot\rho(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi + (\dot\rho(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)\rho(\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{(\dot\rho(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)^2 + (\dot\rho(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)^2}\sqrt{\rho^2(\varphi)\cos^2\varphi + \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{\rho(\varphi)\dot\rho(\varphi)}{\rho(\varphi)\sqrt{\dot\rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}} = \frac{\dot\rho(\varphi)}{\sqrt{\dot\rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}};\ \sin\mu = \sqrt{1 - cos^2\mu} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\dot\rho(\varphi)}{\sqrt{\dot\rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}}\right)^2} = \frac{\rho(\varphi)}{\sqrt{\dot\rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}};\ \operatorname{tg}\mu = \frac{\rho(\varphi)}{\dot\rho(\varphi)}.$$ Если

$\operatorname{tg}\mu = const$, то либо $\dot\rho(\varphi) \equiv 0$, т.е. $\rho(\varphi) = const$ и кривая – окружность, либо $\dot\rho(\varphi) = a\rho(\varphi)$ и кривая $\rho(\varphi) = Ca^{\varphi}$ – логарифмическая спираль.

Найти уравнение окружности, имеющей в начале координат касание наибольшего порядка с параболой $y = x^2$.

В точке O касательная к параболе $y = x^2$ имеет вид $y = 0$. Ищем уравнение окружности в виде $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, она проходит через точку O и имеет касательную $y = 0$.
$\alpha(t) = {}^t(t, t^2)$ – параметризация параболы; $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2ay$ – левая часть уравнения окружности в виде $F(x, y) = 0$;
$f(t) = F(t, t^2) = t^2 + t^4 - 2at^2 = t^4 + (1 - 2a)t^2$.
$f(0) = 0$; $f'(t) = 4t^3 + 2(1 - 2a)t$, $f'(0) = 0$; $f''(t) = 12t^2 + 2(1 - 2a)$,
$f''(0) = 0$ $a = \frac{1}{2}$; $f'''(t) = 24t$, $f'''(0) = 0$; $f^{iv}(t) = 24$, $f^{iv}(0) \neq 0$.
Порядок касания 3, уравнение окружности $x^2 + y^2 - y = 0$.

Найти уравнение параболы, имеющей с линией $y = \ln x$ наибольший порядок касания в точке $A(1, 0)$.

В точке A касательная к линии $y = \ln x$ имеет вид $y = x - 1$. Касательная к параболе в этой точке такая же; точка A является вершиной параболы. Повернем систему координат на $\pi/4$ и поместим ее начало в точку A:

$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) + 1, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1). \end{cases}$ В этой системе координат уравнение искомой параболы имеет вид $ay_1 = x_1^2$. $x + y = x_1\sqrt{2} + 1$; $y - x = y_1\sqrt{2} - 1$;

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1)$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x + 1)$;

$\frac{a}{\sqrt{2}}(y - x + 1) = \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$; $x^2 + 2xy + y^2 - 2y - 2x + 1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(-x + y + 1)$;

$x^2 + 2xy + y^2 - 2y - 2x + 1 - \frac{a}{\sqrt{2}}(-x + y + 1) = 0$;

$F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2y - 2x + 1 - \frac{a}{\sqrt{2}}(-x + y + 1)$; $\alpha(t) = {}^t(t, \ln t)$;

$f(t) = t^2 + 2t\ln t + \ln^2 t - 2\ln t - 2t + 1 - \frac{a}{\sqrt{2}}(-t + \ln t + 1)$; $f(1) = 0$;

$f'(t) = 2t + 2\ln t + 2 + 2\frac{\ln t}{t} - \frac{2}{t} - 2 - \frac{a}{\sqrt{2}}(-1 + \frac{1}{t})$, $f'(1) = 0$;

$f''(t) = 2 + \frac{2}{t} + 2\frac{1 - \ln t}{t^2} + \frac{2}{t^2} + \frac{a}{t^2\sqrt{2}}$, $f''(1) = 0 \Longrightarrow$, $a = -8\sqrt{2}$;

$f'''(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{4\ln t - 6}{t^3} - \frac{4}{t^3} - \frac{16}{t^3}$, $f'''(t) = -28$.

Парабола $x^2 + 2xy + y^2 - 2y - 2x + 1 - 8(-x + y + 1) = 0$;

$x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 10y - 7 = 0$, порядок касания 2.

Найти огибающую семейства прямых, на которых лежит лестница постоянной длины a, если ее концы скользят по осям прямоугольной декартовой системы координат.

Обозначим через t угол, образуемый лестницей с осью Ox. Тогда точка пересечения прямой с осью Ox будет $(a\cos t, 0)$, а с осью Oy – $(0, a\sin t)$.
Уравнение прямой: $\dfrac{x - a\cos t}{-a\cos t} = \dfrac{y}{a\sin t}$ или
$x\sin t + y\cos t - a\cos t\sin t = 0$; $F(x, y, t) = x\sin t + y\cos t - \frac{1}{2}a\sin 2t$.

$$\begin{cases} x\sin t + y\cos t - \frac{1}{2}a\sin 2t = 0, \\ x\cos t - y\sin t - a\cos 2t = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\sin t + y\cos t = a\cos t\sin t, \\ x\cos t - y\sin t = a(\cos^2 t - \sin^2 t); \end{cases}$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1;$$

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} a\cos t\sin t & \cos t \\ a(\cos^2 t - \sin^2 t) & -sint \end{vmatrix} = a(-\cos t\sin^2 t - \cos^3 t + \sin^2 t\cos t) =$$
$-a\cos^3 t$;

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} \sin t & a\cos t\sin t \\ \cos t & a(\cos^2 t - \sin^2 t) \end{vmatrix} = a(\sin t\cos^2 t - \sin^3 t - \cos^2 t\sin t) =$$
$-a\sin^3 t$;

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ – астроида. $F_x = \sin t$, $F_y = \cos t$; $F_x^2 + F_y^2 \equiv 1$.
Астроида – огибающая.

Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы $y^2 = 2ax$, перпендикулярных к ее оси.

Центр окружности $(t, 0)$, радиус $\sqrt{2at}$, уравнение $(x-t)^2 + y^2 = 2at$;
$F(x, y, t) = (x-t)^2 + y^2 - 2at$; $\begin{cases} (x-t)^2 + y^2 - 2at = 0, \\ -2(x-t) - 2a = 0; \end{cases}$
$\begin{cases} (x-t)^2 + y^2 - 2at = 0, \\ x - t = -a; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + y^2 - 2a(x+a) = 0, \\ t = x + a; \end{cases}$
$y^2 = 2ax + a^2$; $F_x = 2(x-t) = -2a \neq 0$. Огибающая – парабола $y^2 = 2a(x + a/2)$, полученная из исходной сдвигом влево на $a/2$ вдоль оси Ox.

Найти огибающую семейства нормалей к кривой $\alpha(t) = {}^t(a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t))$.

$\dot\alpha(t) = {}^t(a(-\sin t + t\cos t + \sin t), a(\cos t - \cos t + t\sin t)) = {}^t(at\cos t, at\sin t)$;
уравнение нормали в точке $\alpha(t)$:
$(x - a(\cos t + t\sin t))at\cos t + (y - a(\sin t - t\cos t))at\sin t = 0$;
$x\cos t + y\sin t + a(-\cos^2 t - \sin t\cos t - \sin^2 t + \sin t\cos t) = 0$;
$x\cos t + y\sin t - a = 0$. $F(x, y, t) = x\cos t + y\sin t - a$;

$$\begin{cases} x\cos t + y\sin t - a = 0, \\ -x\sin t + y\cos t = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\cos t + y\sin t = a, \\ -x\sin t + y\cos t = 0; \end{cases}$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1; \ \triangle_x = \begin{vmatrix} \cos t & a \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} = a\sin t;$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} a & \sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = a\cos t;$$

$x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $F_x = \cos t$, $F_y = \sin t$, $F_x^2 + F_y^2 \equiv 1$.
Огибающая – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Написать натуральные уравнения окружности радиуса 741.

$\alpha(s) = {}^t\left(741\cos\frac{s}{741}, 741\sin\frac{s}{741}\right).$

Какая кривая задается натуральным уравнением $k = \dfrac{a}{a^2 + s^2}$ $(a > 0)$?

$$\theta(s) = \int_0^s k(\sigma)d\sigma = \int_0^s \frac{ad\sigma}{a^2 + \sigma^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sigma}{a}\Big|_0^s = \operatorname{arctg}\frac{s}{a};$$

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{s}{a}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}};\ \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{s}{a}\right) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}};$$

$$x(s) = \int_0^s \frac{ad\sigma}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} = a\ln(\sigma + \sqrt{a^2 + \sigma^2})\Big|_0^s = a\ln(s + \sqrt{a^2 + s^2}) - a\ln a;$$

$$y(s) = \int_0^s \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}} = \sqrt{a^2 + \sigma^2}\Big|_0^s = \sqrt{a^2 + s^2} - a;$$

$$\alpha(s) = {}^t\left(a\ln(s + \sqrt{a^2 + s^2}) - a\ln a, \sqrt{a^2 + s^2} - a\right)$$ – цепная линия.

Какая кривая задается натуральным уравнением $s^2 + \frac{1}{k^2} = 16a^2$ $(a > 0)$?

$$k = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}};$$

$$\theta(s) = \int_0^s k(\sigma)d\sigma = \int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{16a^2 - \sigma^2}} = \arcsin\frac{\sigma}{4a}\Big|_0^s = \arcsin\frac{s}{4a};$$

$$\cos\theta(s) = \sqrt{1 - \frac{s^2}{16a^2}};\ \sin\theta(s) = \frac{s}{4a};$$

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{16a^2}}d\sigma = |\tau = \frac{\sigma}{4a}| = 4a\int_0^{s/4a} \sqrt{1 - \tau^2}d\tau =$$

$$4a \cdot \frac{1}{2}(\tau\sqrt{1 - \tau^2} + \arcsin\tau)\Big|_0^{s/4a} = 2a\left(\frac{s}{4a}\sqrt{1 - \frac{s^2}{16a^2}} + \arcsin\frac{s}{4a}\right) =$$

$$\frac{s}{8a}\sqrt{16a^2 - \sigma^2} + 2a\arcsin\frac{s}{4a};$$

$$y(s) = \int_0^s \frac{\sigma}{4a}d\sigma = \frac{s^2}{8a};$$

$$\alpha(s) = {}^t\left(\frac{s}{8a}\sqrt{16a^2 - \sigma^2} + 2a\arcsin\frac{s}{4a}, \frac{s^2}{8a}\right)$$ – перевернутая циклоида.

Вычислить кривизну эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и указать точки, в которых кривизна максимальна и в которых кривизна минимальна.

Возьмем параметризацию эллипса $\alpha(t)={}^t(a\cos t, b\sin t)$.
$\dot\alpha(t)={}^t(-a\sin t, b\cos t)$; $|\dot\alpha(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$;
$\ddot\alpha(t)={}^t(-a\cos t, -b\sin t)$;
$[\dot\alpha(t),\ddot\alpha(t)]=\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix}=ab(\sin^2 t+\cos^2 t)=ab$;
$k(t)=\dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$.
$k(t)$ имеет максимум [минимум] $\Leftrightarrow$ $a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t$ имеет минимум [максимум]. Считаем, что $a>b$. Имеем
$a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos 2t)$. Так как $b^2-a^2<0$, минимум получается при $\cos 2t=1$ $(t=0,\pi)$, а максимум – при $\cos 2t=-1$ $(t=\pi/2, 3\pi/2)$.
Кривизна минимальна в вершинах $(a,0)$ и $(-a,0)$ а максимальна в вершинах $(0,b)$ и $(0,-b)$.

Найти кривизну следующих кривых: б) $y^2 = 2ax$; г) $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

б) $\alpha(t) = {}^t(t^2/2a, t)$; $\dot\alpha(t) = {}^t(t/a, 1)$; $|\dot\alpha(t)| = \sqrt{t^2/a^2+1} = \dfrac{\sqrt{t^2+a^2}}{a}$;

$\ddot\alpha(t) = {}^t(1/a, 0)$; $[\dot\alpha(t), \ddot\alpha(t)] = \begin{vmatrix} t/a & 1/a \\ 1 & 0t \end{vmatrix} = -1/a$;

$$k(t) = -\frac{1}{a\left(\frac{t^2+a^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a^2}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

г) $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $\dot x = \dot\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi$, $\dot y = \dot\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi$;
$\sqrt{\dot x^2+\dot y^2} = \sqrt{(\dot\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\dot\rho\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2} = \sqrt{\dot\rho^2+\rho^2}$;
$\ddot x = \ddot\rho\cos\varphi - 2\dot\rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi$, $\ddot y = \ddot\rho\sin\varphi + 2\dot\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi$;
$\dot x\ddot y - \dot y\ddot x = (\dot\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)(\ddot\rho\sin\varphi+2\dot\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi) - (\dot\rho\sin\varphi+$
$\rho\cos\varphi)(\ddot\rho\cos\varphi-2\dot\rho\sin\varphi-\rho\cos\varphi) = \dot\rho\ddot\rho\cos\varphi\sin\varphi - \rho\ddot\rho\sin\varphi^2 + 2\dot\rho^2\cos^2\varphi -$
$2\rho\dot\rho\sin\varphi\cos\varphi - \rho\dot\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - \dot\rho\ddot\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho\ddot\rho\sin\varphi^2 +$
$2\dot\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho\dot\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho\dot\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = 2\dot\rho^2 - \rho\ddot\rho + \rho^2$;
$\dot\rho = -a\sin\varphi$; $\ddot\rho = -a\cos\varphi$;
$2\dot\rho^2 - \rho\ddot\rho + \rho^2 = 2a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)\cos\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2 = 3a^2(1+\cos\varphi)$;
$\sqrt{\dot\rho^2+\rho^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} = a\sqrt{2+2\cos\varphi} = 2a\cos(\varphi/2)$;

$$k(\varphi) = \frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{8a^3\cos^3(\varphi/2)} = \frac{3}{4a\cos(\varphi/2)}.$$

Написать уравнение соприкасающейся окружности к линии $y = \sin x$ в точке $A(\pi/2, 1)$.

$\alpha(x) = {}^t(x, \sin x)$; $\dot{\alpha}(x) = {}^t(1, \cos x)$; $\ddot{\alpha}(x) = {}^t(0, -\sin x)$;
$k(x) = -\dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$; $k(\pi/2) = -1$; $R(x) = \dfrac{1}{|k(x)|}$; $R(\pi/2) = 1$;
центр $C = A + \dfrac{1}{k(\pi/2)}\vec{\nu}(\pi/2)$; $\vec{\tau}(\pi/2) = (1, 0)$; $\vec{\nu}(\pi/2) = (0, 1)$; $C(\pi/2, 0)$;
уравнение соприкасающейся окружности: $(x - \pi/2)^2 + y^2 = 1$.

Доказать, что в точке кривой, где кривизна принимает экстремальное значение,соприкасающаяся окружность имеет с кривой касание порядка не ниже третьего.

Возьмем кривую единичной скорости $\alpha(s)$, имеющую соприкасающуюся окружность радиуса R и центром в точке p.
$f(s) = \langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle - R^2$; $\dot{f}(s) = \langle 2\vec{\tau}(s), \alpha(s) - p \rangle = 0$;
$\ddot{f}(s) = \langle 2k(s)\vec{\nu}(s), \alpha(s) - p \rangle + 2 = 0$;
$\dddot{f}(s) = \langle 2\dot{k}(s)\vec{\nu}(s) - 2k^2(s)\vec{\tau}(s), \alpha(s) - p \rangle + \langle 2k(s)\vec{\nu}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = 0$, так как $\dot{k}(s) = 0$ в силу того, что кривизна принимает экстремальное значение и $\vec{\tau}(s) \perp (\alpha(s) - p)$.

Найти параметризацию и нарисовать эволюту кривой $\alpha(t) = {}^t\left(a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), a\sin t\right)$.

$x(t) = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right)$, $y(t) = a\sin t$;

$\dot{x}(t) = a\left(\dfrac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2} - \sin t\right) = a\left(\dfrac{1}{\sin t} - \sin t\right)$; $\dot{y}(t) = a\cos t$;

$\ddot{x}(t) = -\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t} - a\cos t$; $\ddot{y}(t) = -a\sin t$;

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\left(\dfrac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t + \cos^2 t\right) = a^2\left(\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1\right) = \dfrac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}$;

$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = a^2(-1 + \sin^2 t + \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t = \dfrac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}$; $\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} = 1$;

Параметризация эволюты:

$\tilde{x}(t) = x(t) - \dot{y}(t) = a\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $\tilde{y}(t) = y(t) + \dot{x}(t) = \dfrac{a}{\sin t}$;

$x = a\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = e^{x/a}$;

$\sin t = 2\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}\cos^2\dfrac{t}{2} = \dfrac{2\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \dfrac{2e^{x/a}}{1 + e^{2x/a}} = \dfrac{2}{e^{-x/a} + e^{x/a}}$;

$y = \dfrac{a}{\sin t} = \dfrac{a(e^{-x/a} + e^{x/a})}{2} = a\operatorname{ch}(x/a)$ – цепная линия.

С.В.Сизый с.125 № 2 в) чертеж

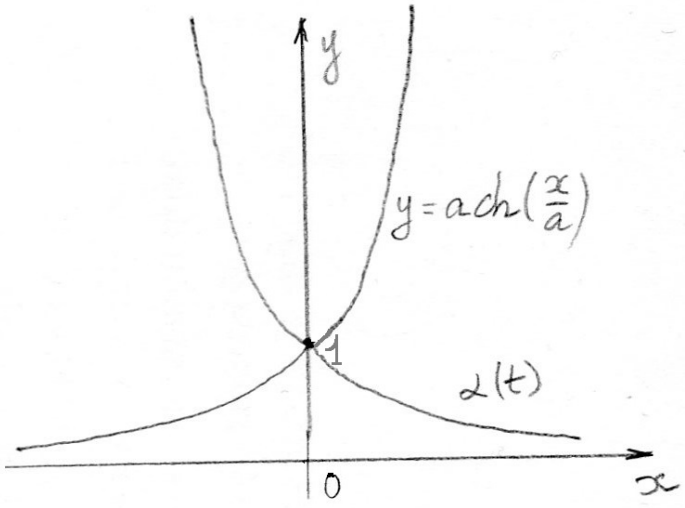


Рис. 1

Найти параметризацию и нарисовать эволюту кривой $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

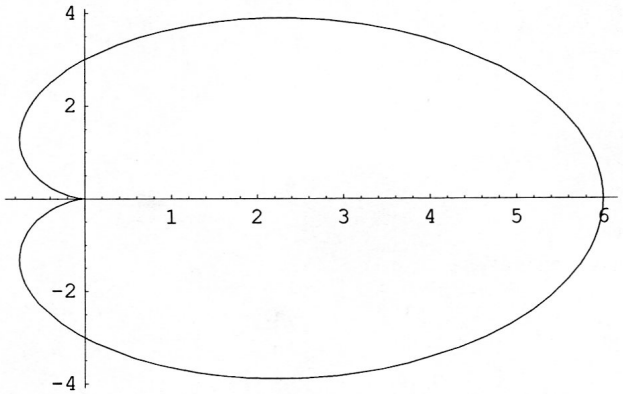
$x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi$, $\dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi$;
$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2$; $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho} + \rho^2$; $\dot{\rho} = -a\sin\varphi$; $\ddot{\rho} = -a\cos\varphi$;
$2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho} + \rho^2 = 2a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)\cos\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2 =$
$3a^2(1+\cos\varphi) = 6a^2\cos^2(\varphi/2)$;
$\dot{\rho}^2 + \rho^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2(2+2\cos\varphi) = 4a^2\cos^2(\varphi/2)$;
$\tilde{x} = x - \frac{2}{3}\dot{y} = \rho\cos\varphi - \frac{2}{3}(\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi) = \frac{1}{3}\rho\cos\varphi - \frac{2}{3}\dot{\rho}\sin\varphi =$
$\frac{1}{3}a(1+\cos\varphi)\cos\varphi + \frac{2}{3}a\sin^2\varphi = \frac{1}{3}a(\cos\varphi + \sin^2\varphi)$;
$\tilde{y} = y + \frac{2}{3}\dot{x} = \rho\sin\varphi + \frac{2}{3}(\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi) = \frac{1}{3}\rho\sin\varphi + \frac{2}{3}\dot{\rho}\cos\varphi =$
$\frac{1}{3}a(1+\cos\varphi)\sin\varphi - \frac{2}{3}a\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{3}a(1-\cos\varphi)\sin\varphi$;

С.В.Сизый с.125 № 2 г) чертеж

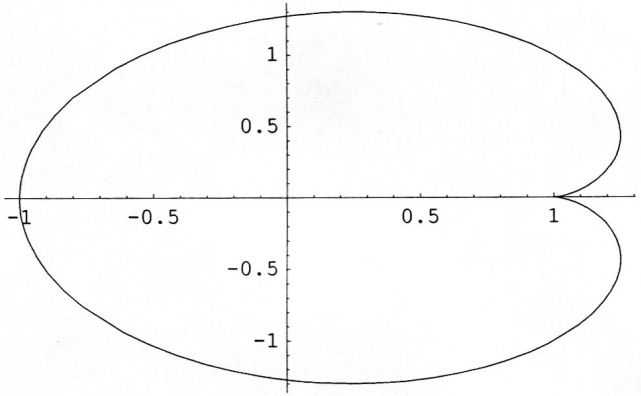
```
[5]:= 125 2 - 4
      ParametricPlot[{3 Cos[t] (1 + Cos[t]), 3 Sin[t] (1 + Cos[t])}, {t, 0, 2 Pi}]

      ParametricPlot[{Sin[t]^2 + Cos[t], Sin[t] - 1/2 Sin[2 t]}, {t, 0, 2 Pi}]

t[5]= 246
```




```
t[6]= - Graphics -
```




```
t[7]= - Graphics -
```

Рис. 2

Найти параметризацию и нарисовать какую-нибудь одну эвольвенту окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Параметризация окружности $\gamma(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t)$; натуральный параметр $s = ta$, $\beta(s) = {}^t\left(a\cos\dfrac{s}{a}, a\sin\dfrac{s}{a}\right)$; Эвольвента окружности: $\alpha(s) = \beta(s) + (C - s)\vec{\tau}_{\beta(s)} = {}^t\left(a\cos\frac{s}{a} - (C - s)\sin\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a} + (C - s)\cos\frac{s}{a}\right)$. Пусть $C = 0$: $\alpha_0(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{a} + s\sin\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a} - s\cos\frac{s}{a}\right)$. Возвращаемся к параметру t: $\delta_0(t) = {}^t(a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t))$.

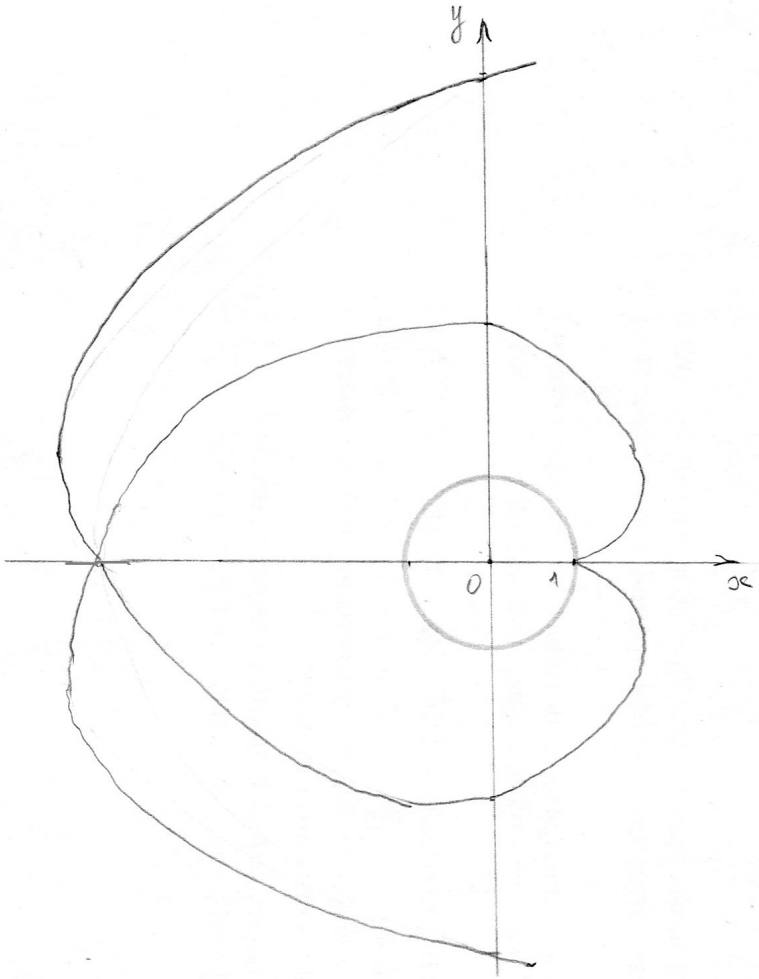


Рис. 3

Найти параметризацию и нарисовать эвольвенту цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, выходящую из ее вершины. Что это за линия?

$\beta(t) = {}^t\left(t, a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{a}\right)$; $\dot\beta(t) = {}^t\left(1, \mathrm{sh}\,\dfrac{t}{a}\right)$; $|\dot\beta(t)| = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\,\dfrac{t}{a}} = \mathrm{ch}\,\dfrac{t}{a}$;

$\vec\tau_\beta(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}}\,{}^t\left(1, \mathrm{sh}\,\dfrac{t}{a}\right)$; $\alpha(t) = \beta(t) + \left(C - \displaystyle\int_0^t |\dot\beta(\tau)|d\tau\right)\vec\tau_\beta(t)$; $C = 0$;

$\displaystyle\int_0^t \mathrm{ch}\,\frac{\tau}{a}d\tau = a\,\mathrm{sh}\,\frac{\tau}{a}\Big|_0^t = a\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{a}$;

$\alpha(t) = {}^t\left(t, a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{a}\right) - a\,\mathrm{th}\,\dfrac{t}{a}\,{}^t\left(1, \mathrm{sh}\,\dfrac{x}{a}\right) = {}^t\left(t - a\,\mathrm{th}\,\dfrac{t}{a}, a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{a} - a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{t}{a}\,\mathrm{th}\,\dfrac{t}{a}\right)$;

$a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{a} - a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{t}{a}\,\mathrm{th}\,\dfrac{t}{a} = a\dfrac{\mathrm{ch}^2\,\frac{t}{a} - \mathrm{sh}^2\,\frac{t}{a}}{\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}} = \dfrac{a}{\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}}$. Согласно задаче 2 в) должна получиться трактриса. $\alpha(t) = {}^t\left(t - a\,\mathrm{th}\,\dfrac{t}{a}, \dfrac{a}{\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}}\right)$; $\sin u = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}}$; $\mathrm{ch}\,\frac{t}{a} = \frac{1}{\sin u}$;

$\mathrm{sh}\,\frac{t}{a} = \sqrt{\mathrm{ch}^2\,\frac{t}{a} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 u} - 1} = \frac{\cos u}{\sin u}$; $\mathrm{th}\,\frac{t}{a} = \frac{\mathrm{sh}\,\frac{t}{a}}{\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}} = \frac{\cos u}{\sin u}\cdot\sin u = \cos u$;

$e^{\frac{t}{a}} = w$; $\frac{w + 1/w}{2} = \frac{1}{\sin u}$; $w^2 - \frac{2}{\sin u}w + 1 = 0$; $D = \frac{1}{\sin^2 u} - 1 = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}$;

$w = \frac{1}{\sin u} - \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} = \mathrm{tg}\,\frac{u}{2}$; $t = a\ln\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}$.