МАТЕМАТИКА
Практика 1
Определители. Метод Крамера

ИЕНиМ, Департамент фундаментальной и прикладной химии, I курс, I семестр

Лекторы: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.

к.ф.-м.н., доцент Перминова О.В.

Ссылки на видеоуроки

- Видеоурок «Определители второго порядка»
- Видеоурок «Определители третьего порядка»
- Видеоурок «Миноры и алгебраические дополнения»
- Видеоурок «Метод Крамера»
- Видеоурок «Метод Гаусса»

Определение матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица (чисел, алг. выражений), состоящая из m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$$

Виды матриц

1. **Вектор-строка** $(1\ -2\ 4\ 0\ 1)$

2. **Вектор-столбец** $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. **Квадратная матрица** $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4. **Единичная матрица** $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. **Диагональная матрица** $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Виды матриц

6. Нулевая матрица

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Треугольная матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель второго порядка

Опр. *Определителем* второго порядка матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется ЧИСЛО

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{1 \cdot 2} - \underline{(-2) \cdot 3} = 2 + 6 = 8$$

Определитель третьего порядка

Опр. *Определителем* третьего порядка матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется ЧИСЛО

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Определитель третьего порядка

Опр. *Определителем* третьего порядка матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется ЧИСЛО

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-(\underline{a_{13}a_{22}a_{31}} + \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} + \underline{a_{11}a_{23}a_{32}})$$

Определитель третьего порядка

Пример. *Определитель* матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ равен ЧИСЛУ

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \underline{(-1)\cdot(-2)\cdot 2} + \underline{2\cdot 1\cdot 3} + \underline{5\cdot(-3)\cdot(-4)} -$$

$$-((-3)\cdot(-2)\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot 1\cdot(-4))$$

Определитель третьего порядка

Пример. *Определитель* матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ равен ЧИСЛУ

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 5\cdot(-3)\cdot(-4) -$$

$$-\left(\underline{(-3)\cdot(-2)\cdot 3} + \underline{2\cdot 2\cdot 5} + \underline{(-1)\cdot 1\cdot(-4)}\right)$$

$$= 4 + 6 + 60 - (18 + 20 + 4) \; \boxed{= 70 - 42 = 28}$$

Применение определителей для решения СЛУ

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 & (\cdot 3) \\ 3x + 5y = 1 & (\cdot 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 2x - 3\cdot 7y = 3\cdot 4 \\ 2\cdot 3x + 2\cdot 5y = 2\cdot 1 \end{cases} (-)$$

$$(\cancel{3\cdot 2x - 2\cdot 3x}) + (-3\cdot 7y - 2\cdot 5y) = 3\cdot 4 - 2\cdot 1$$

$$(-3\cdot 7 - 2\cdot 5)y = 3\cdot 4 - 2\cdot 1$$

$$(2\cdot 5 + 3\cdot 7)y = 2\cdot 1 - 3\cdot 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}$$

Применение определителей для решения СЛУ

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{20+7}{10+21} = \frac{27}{31} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2-12}{10+21} = -\frac{10}{31}$$

$$\textit{Ответ}: \; x = \frac{27}{31}, \; y = -\frac{10}{31}$$

Применение определителей для решения СЛУ

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Формулы Крамера

Применение определителей для решения СЛУ

Решить систему линейных уравнений

Формулы Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Миноры определителя третьего порядка

Опр. *Минором M_{ij} определителя третьего порядка* называется определитель второго порядка, полученный из исходного вычеркиванием
i-й строки и j-го столбца.

Например, для матрицы $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

миноры $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 = -5,\quad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 0$

Миноры определителя третьего порядка

Опр. *Минором* M_{ij} *определителя третьего порядка* называется определитель второго порядка, полученный из исходного вычеркиванием
i-й строки и j-го столбца.

Например, для матрицы $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

миноры $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-2)-(-3)\cdot 1 = -5$, $M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3)-2\cdot 4 = -5$

Алгебраическое дополнение

Опр. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента матрицы a_{ij} называется произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например, для матрицы $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ алгебраические дополнения

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -(-5) = 5$, $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -(-5) = 5$

Формула для разложения определителя по i-й строке и j-му столбцу

Теорема. Определитель $|A|$ матрицы A равен сумме произведений элементов i-й строки (j-го столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$$

Формула для разложения определителя по i-й строке и j-му столбцу

Пример. Разложение определителя матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

по 1-й строке:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

Формула для разложения определителя по *i* -й строке и *j* -му столбцу

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 2 - (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 = 1$$

Определитель третьего порядка. Пример

Пример. Найти определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (1\cdot 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-2)\cdot(-1)) - ((-1)\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot(-2)) =$$

$$= (0-1-2) - (-2+0-2) = -3-(-4) = 1$$