Определение непрерывности функции в точке

<u>Опр.</u> Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.
Говорят, что функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Второе равенство можно переписать так

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

т.е. операции

Определение непрерывности функции в точке

Опр. (по Гейне)

Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Говорят, что функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in O(x_0)$, предел которой равен x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$),

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$).

Определение непрерывности функции в точке

<u>Пример.</u> Пусть $f(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

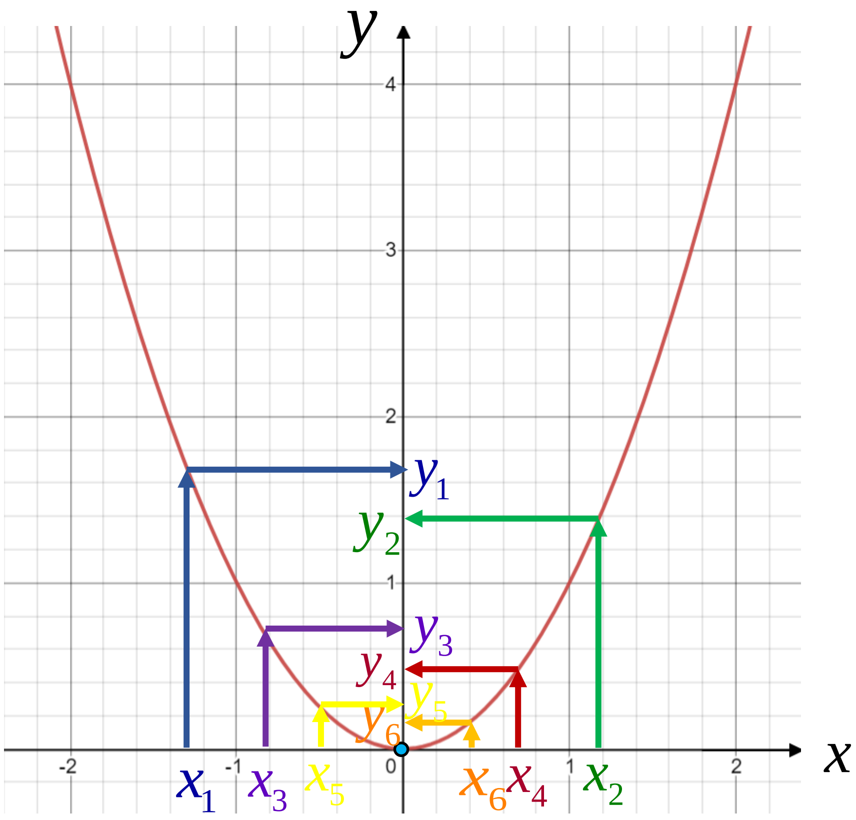
$$f(0) = 0^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$



Определение непрерывности функции в точке

<u>Пример.</u> Пусть $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^2$$

$$= \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^2 = x_0^2$$

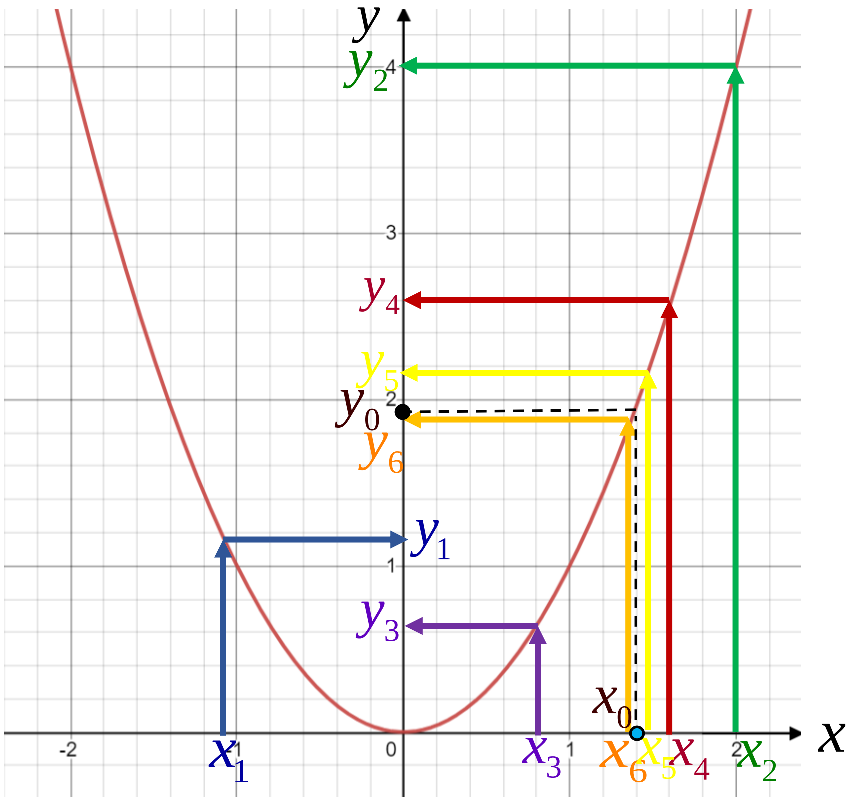
$$f(x_0) = x_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to 0} f(x_0) = x_0^2$$

$$\Downarrow$$

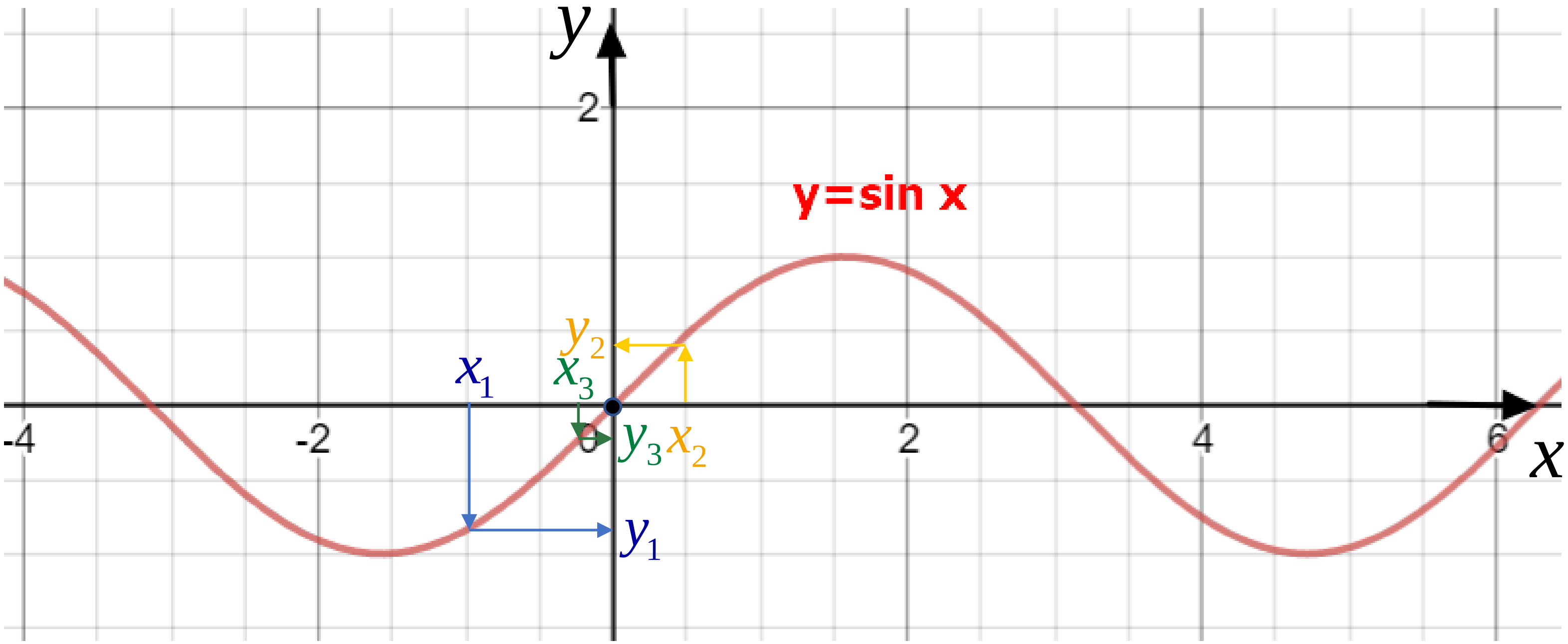
$f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$



Определение непрерывности функции в точке

<u>Пример.</u> Пусть $f(x) = \sin x$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0 = f(0) = \sin 0 = 0$$



$f(x) = \sin x$ непрерывна в точке $x = 0$

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

<u>Опр. (через приращения)</u>

Приращением аргумента называется значение $\Delta x = x - x_0$.

Приращением функции в точке $x = x_0$ называется значение $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

$$\Delta y = y - y_0,\ y_0 = f(x_0)$$

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

Опр.

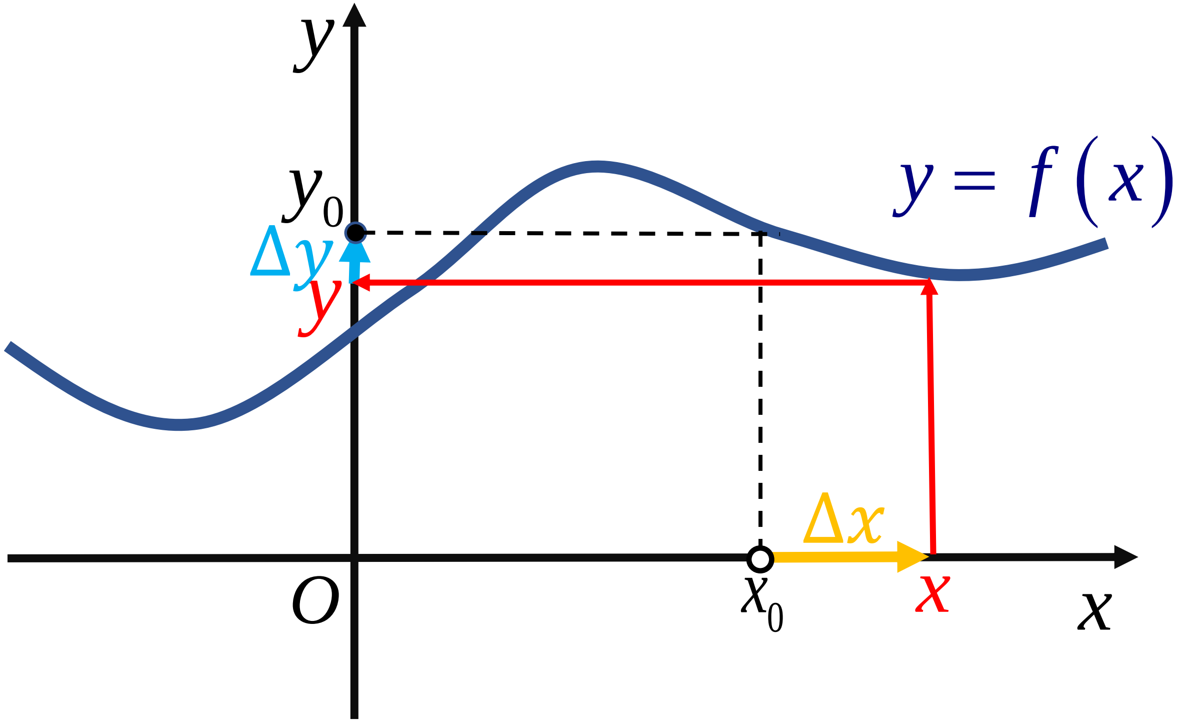
Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Говорят, что функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1) существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x)$ и

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$.

Определение функции, непрерывной в точке через приращения



Понятие обратной функции

Опр. Функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений Y называется взаимно однозначной (обратимой), если для любого $y \in \boldsymbol{R}$ найдется такое $x \in X$, что $y = f(x)$.

Опр. Функция $x = x(y) = f^{-1}(y)$ с областью называется обратной к $y = f(x)$.

Понятие обратной функции

Обычно в записи $x = f^{-1}(y)$ меняют x и y местами и говорят, что $y = f^{-1}(x)$ – обратная к $y = f(x)$.

Замечание. Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = f(x)$ (почему?)

Понятие обратной функции

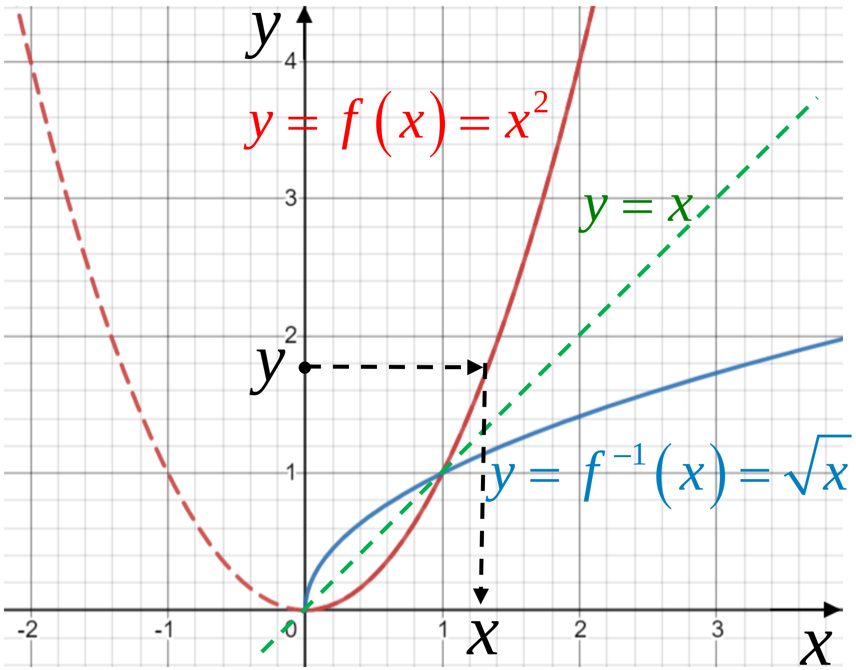
Пример.

Функция $y = f(x) = x^2$ обратима на $X = [0; +\infty)$ (но не на $(-\infty; +\infty)$).

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} -$$

обратная к $y = f(x) = x^2$

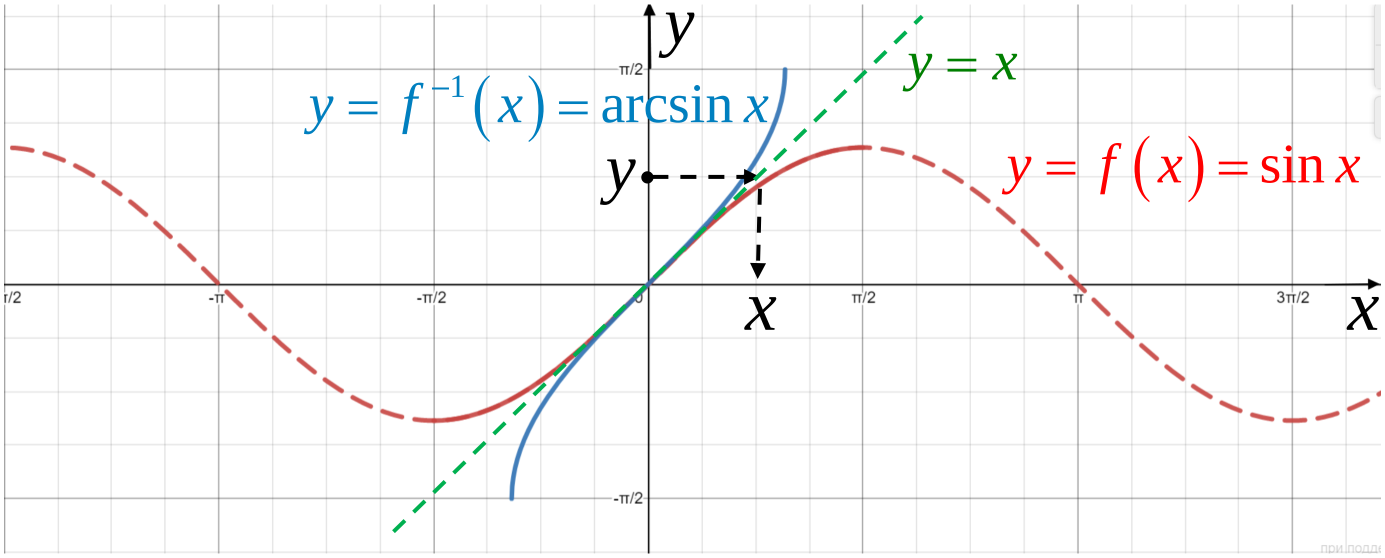


Понятие обратной функции

(1) Функция $y = f(x) = \sin x$ обратима на $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (но не на $(-\infty; +\infty)$).

Тогда $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$.

$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \arcsin x$ – обратная к $y = f(x) = \sin x$



Непрерывность элементарной функции

Опр. Функция
$y = f(x)$ называется элементарной, если ее можно подставить в виде суммы (разности), произведения, частного, сложной, обратной функции от школьных элементарных функций: степенной, показательной, логарифма, тригонометрических и их обратных.

Непрерывность элементарной функции

Теорема (о непрерывности элементарн. функции)
Элементарная функция непрерывна для любой точки из своей области определения (непрерывна на области определения).

Доказательство следует из теорем (самост-но).