Комбинаторика: Задачи и Решения

Условия задач

1. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая из цифр может встретиться в записи числа несколько раз.

2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове “логарифм” так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

3. Сколько способов расположить на полке 10 книг, чтобы две данные книги A и B стояли рядом? Сколькими способами, чтобы они не стояли рядом?

4. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

5. Производится жеребьевка $2n$ футбольных команд, среди которых 2 призера предыдущего чемпионата. Команды разбиваются на две группы по n команд. Вычислить:

   (a) число способов, при которых призеры попадут в разные группы;

   (b) число способов, при которых призеры попадут в одну группу.

6. Сколькими способами можно расположить буквы в слове “оборона”, чтобы никакие две буквы “о” не стояли рядом? А в слове “обороноспособность”?

7. Найти коэффициент перед $x^2y^5z^3$ в сумме $(x + y + z)^{10}$.

8. Посчитать количество мультимножеств (сочетаний с повторениями) из n элементов по k элементов.

9. Сколько существует способов разложения числа n в k слагаемых (суммы, различающиеся порядком слагаемых различны).

10. Есть 15 неразличимых шаров и 4 ящика. Сколькими способами можно расположить эти шары по ящикам так, чтобы в каждом ящике было:

    (a) не менее одного шара?

    (b) не менее двух шаров?

11. Сколько существует n-значных чисел, в которых цифры идут в невозрастающем порядке?

12. Сколько существует бинарных отношений на n-множестве? Сколько среди них рефлексивных, симметричных и антисимметричных?

13. Доказать, что:

    (a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$

    (b) Показать, что $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

    (c) Показать, что $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

    (d) (свертка Вандермонда) $\sum_{k=0}^{n} C_r^k C_s^{n-k} = C_{r+s}^n$.

14. Вывести рекуррентную формулу для чисел Каталана $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$.

15. Вывести формулу числа триангуляций выпуклого многоугольника с $n+2$ вершинами.

Решения

1. **Решение:** Число делится на 4, если две его последние цифры образуют число, делящееся на 4. Из цифр $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ можно составить следующие двузначные окончания, делящиеся на 4: 12, 24, 32, 44, 52. Всего 5 вариантов. Первые две цифры могут быть любыми из 5 цифр (с повторениями). Количество способов выбрать первые две цифры: $5 \times 5 = 25$. Итого: $25 \times 5 = 125$.

2. **Решение:** В слове "логарифм" 8 букв. Согласные: л, г, р, ф, м (5 букв). Гласные: о, а, и (3 буквы). На 2-е, 4-е и 6-е места нужно поставить согласные. Выберем и расставим 3 согласные из 5 на эти позиции: $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ способов. Оставшиеся 5 букв (2 согласные и 3 гласные) можно расставить на оставшиеся 5 позиций (1, 3, 5, 7, 8) способами $5! = 120$. Общее количество: $60 \times 120 = 7200$.

3. **Решение:**

   - Книги A и B стоят рядом. Рассмотрим их как единый блок. Тогда имеем 9 объектов (8 книг + 1 блок). Их можно переставить $9!$ способами. Внутри блока книги A и B можно переставить $2!$ способами. Итого: $9! \times 2 = 725760$.
   - Книги A и B не стоят рядом. Общее число перестановок 10 книг: $10!$. Вычтем количество перестановок, где они стоят рядом: $10! - 2 \times 9! = 3628800 - 725760 = 2903040$.

4. **Решение:** Нужно выбрать 6 человек из 11 (7 мужчин и 4 женщины). Условие: не менее 2 женщин. Разберем случаи:

   - 2 женщины и 4 мужчины: $C_4^2 \times C_7^4 = 6 \times 35 = 210$.
   - 3 женщины и 3 мужчины: $C_4^3 \times C_7^3 = 4 \times 35 = 140$.
   - 4 женщины и 2 мужчины: $C_4^4 \times C_7^2 = 1 \times 21 = 21$.

   Итого: $210 + 140 + 21 = 371$.

5. **Решение:** Всего $2n$ команд, разбиваем на две группы по n.

   (a) Призеры в разных группах. Выберем группу для первого призера (2 способа). Затем выберем $n - 1$ команду из оставшихся $2n - 2$ для его группы: $\binom{2n-2}{n-1}$. Вторая группа формируется автоматически. Итого: $2\binom{2n-2}{n-1}$.

   (b) Призеры в одной группе. Выберем группу (2 способа). Выберем $n - 2$ команды из $2n - 2$ для этой группы: $\binom{2n-2}{n-2}$. Итого: $2\binom{2n-2}{n-2}$.

6. **Решение:**

   - "оборона" (7 букв: 3 "о", 1 "а", 3 согласные "б, р, н"). Расставим согласные: $3! = 6$ способов. Образуется 4 промежутка: _ С _ С _ С _. В эти 4 промежутка нужно поместить 4 гласные (3 "о" и 1 "а"). Выберем 3 промежутка для букв "о": $\binom{4}{3} = 4$. Оставшийся промежуток займет "а". Итого: $6 \times 4 = 24$.
   - "обороноспособность" (18 букв: 7 "о", 11 согласных). Расставим согласные: $\frac{11!}{2! \times 2! \times 3!}$ (так как "б" - 2, "н" - 2, "с" - 3). Образуется 12 промежутков. Выберем 7 промежутков для букв "о": $\binom{12}{7}$. Итого: $\frac{11!}{2!2!3!} \times \binom{12}{7}$.

7. **Решение:** Общий член разложения: $\frac{10!}{a!b!c!}x^a y^b z^c$. Нам нужно $a=2, b=5, c=3$. Коэффициент равен $\frac{10!}{2!5!3!} = \frac{3628800}{2\times 120\times 6} = 2520$.

8. **Решение:** Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно $C^k_{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

9. **Решение:** Разложение числа n на k слагаемых, где порядок важен (композиции). Если слагаемые строго положительные, число способов равно $\binom{n-1}{k-1}$. Если допускаются нули, то $\binom{n+k-1}{k-1}$.

10. **Решение:** Пусть x_i — количество шаров в i-м ящике. Уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$.

    (a) $x_i \geq 1$. Сделаем замену $y_i = x_i - 1 \geq 0$. Тогда $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$. Число решений: $\binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3} = 364$.

    (b) $x_i \geq 2$. Замена $y_i = x_i - 2 \geq 0$. Тогда $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$. Число решений: $\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$.

11. **Решение:** Цифры в числе идут в невозрастающем порядке. Это означает, что мы выбираем мультимножество из n цифр от 0 до 9, а затем располагаем их по убыванию (единственным способом). Однако число не может начинаться с 0, значит, все выбранные цифры не могут быть нулями. Общее число сочетаний с повторениями из 10 цифр по n: $\binom{10+n-1}{n} = \binom{n+9}{n}$. Вычтем 1 случай, когда все цифры — нули. Итого: $\binom{n+9}{n} - 1$.

12. **Решение:**

    - Всего бинарных отношений на n-множестве: 2^{n^2}.
    - Рефлексивных: 2^{n^2-n} (диагональные элементы фиксированы).
    - Симметричных: $2^{n(n+1)/2}$ (определяются элементы выше диагонали и на ней).
    - Антисимметричных: $2^n \times 3^{n(n-1)/2}$ (диагональ — 2^n, для каждой пары (i,j) три варианта: нет связи, $i \to j$, $j \to i$).

13. **Доказательства:**

    (a) Бином Ньютона: $(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = 0$.

    (b) Используем тождество $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Тогда $\sum_{k=1}^n n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$.

    (c) Рассмотрим интеграл $\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$. С другой стороны, раскрыв скобки: $\int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-x)^k dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{k+1}$.

    (d) Свертка Вандермонда. Рассмотрим $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s$. Коэффициент при x^n слева: $\binom{r+s}{n}$. Справа: $\sum_{k=0}^n \binom{r}{k}x^k \cdot \binom{s}{n-k}x^{n-k}$. Приравниваем коэффициенты.

14. **Решение:** Числа Каталана C_n задаются рекуррентно: $C_0 = 1$, $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$. Вывод: рассмотрим выпуклый $(n+2)$-угольник. Зафиксируем одну сторону. Любая триангуляция содержит треугольник, опирающийся на эту сторону. Третья вершина этого треугольника может быть выбрана n способами (индекс k от 0 до $n-1$). Этот треугольник разбивает многоугольник на два меньших: с $k+1$ и $n-k+1$ вершинами. Число триангуляций для них: C_k и C_{n-1-k}. Суммируя по всем k, получаем искомую рекуррентную формулу.

15. **Решение:** Число триангуляций выпуклого $(n+2)$-угольника равно n-му числу Каталана. Формула: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.