Мощности множеств: Решения

Вариант 16

Задача 1. *Верно ли, что мощность множества A строго меньше мощности множества B, если A равномощно некоторому собственному подмножеству B?*

Решение. ***Нет, неверно.*** *Контрпример: пусть $A = \mathbb{N}$ и $B = \mathbb{N}$. Множество A равномощно собственному подмножеству B, например, множеству чётных чисел $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Однако $|A| = |B| = \aleph_0$, то есть их мощности равны, а не строго меньше.*

Задача 2. *Докажите, что если $A_1, \ldots, A_n$ счетны, то счетно множество $A_1 \times \cdots \times A_n$.*

Решение. *Докажем индукцией по n.*

- ***База:*** *$n = 2$. Так как A_1 и A_2 счетны, существуют биекции $f_1 : A_1 \to \mathbb{N}$ и $f_2 : A_2 \to \mathbb{N}$. Тогда отображение $(a_1, a_2) \mapsto (f_1(a_1), f_2(a_2))$ является биекцией $A_1 \times A_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Известно, что $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно (например, с помощью диагонального метода Кантора или функции Кантора). Следовательно, $A_1 \times A_2$ счетно.*

- ***Шаг:*** *Пусть утверждение верно для $n = k$. Докажем для $n = k + 1$.*

  $$A_1 \times \cdots \times A_{k+1} = (A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}.$$

  По предположению индукции $A_1 \times \cdots \times A_k$ счетно. Тогда произведение двух счетных множеств $(A_1 \times \cdots \times A_k)$ и A_{k+1} счетно по базе индукции. Утверждение доказано.

Задача 3. *Докажите, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.*

Решение. *Пусть S — счетное множество. Обозначим через $\mathcal{F}(S)$ множество всех его конечных подмножеств. Представим $\mathcal{F}(S)$ как объединение множеств подмножеств фиксированной мощности:*

$$\mathcal{F}(S) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(S), \quad \text{где } \mathcal{F}_n(S) = \{A \subset S : |A| = n\}.$$

Каждое $\mathcal{F}_n(S)$ равномощно некоторому подмножеству S^n (так как каждому подмножеству из n элементов можно сопоставить упорядоченный набор этих элементов). По предыдущей задаче S^n счетно, значит, и $\mathcal{F}_n(S)$ счетно (как подмножество счетного множества). Таким образом, $\mathcal{F}(S)$ есть счетное объединение счетных множеств, которое счетно.

Задача 4. *Докажите, что множество всех многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.*

Решение. *Многочлен степени n с целыми коэффициентами однозначно задается набором $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Множество $\mathbb{Z}^{n+1}$ счетно как декартово произведение конечного числа счетных множеств (задача 2). Множество всех многочленов есть объединение по всем $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множеств многочленов степени не выше n. Это счетное объединение счетных множеств, следовательно, оно счетно.*

Задача 5. *Докажите, что число непересекающихся интервалов на действительной прямой не более чем счетно.*

Решение. *Рассмотрим произвольное семейство попарно непересекающихся интервалов на $\mathbb{R}$. В каждом таком интервале содержится хотя бы одно рациональное число (так как $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$). Выберем по одному рациональному числу из каждого интервала. Поскольку интервалы не пересекаются, выбранные рациональные числа различны. Таким образом, мы построили инъективное отображение из множества интервалов в $\mathbb{Q}$. Так как $\mathbb{Q}$ счетно, то множество интервалов не более чем счетно.*

Задача 6. *Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции на действительной оси не более, чем счетно.*

Решение. *Пусть f — монотонная функция на $\mathbb{R}$. В каждой точке x существуют односторонние пределы $f(x-)$ и $f(x+)$, причем $f(x-) \le f(x) \le f(x+)$. Точка x является точкой разрыва тогда и только тогда, когда $f(x-) < f(x+)$. Величина скачка $J_x = f(x+) - f(x-) > 0$. Для каждой точки разрыва x выберем рациональное число $q_x \in (f(x-), f(x+))$. Так как функция монотонна, интервалы скачков $(f(x-), f(x+))$ для разных точек разрыва не пересекаются. Следовательно, отображение $x \mapsto q_x$ инъективно. Множество рациональных чисел счетно, значит, множество точек разрыва не более чем счетно.*

Задача 7. *(*) Докажите, что множество всех алгебраических чисел (т.е. чисел, которые являются корнями многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами) счетно.*

Решение. *По задаче 4 множество многочленов с целыми коэффициентами счетно. Каждый многочлен степени n имеет не более n корней. Следовательно, множество корней каждого отдельного многочлена конечно. Множество всех алгебраических чисел является объединением множеств корней всех многочленов с целыми коэффициентами. Это счетное объединение конечных множеств, которое является счетным.*

Задача 8. *Докажите, что $|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)|$. Чему равняется $|\mathbb{R}^n|, n \in \mathbb{N}$?*

Решение. *Для доказательства равенства мощностей воспользуемся теоремой Кантора-Бернштейна. Очевидно, что $|(0,1)| \le |(0,1) \times (0,1)|$, так как можно рассмотреть инъекцию $x \mapsto (x, 1/2)$. Построим инъекцию из $(0,1) \times (0,1)$ в $(0,1)$. Запишем числа $x, y \in (0,1)$ в виде десятичных дробей, не содержащих девяток в периоде: $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$, $y = 0.y_1y_2y_3\ldots$. Сопоставим паре (x, y) число $z = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$. Это отображение инъективно. Следовательно, $|(0,1) \times (0,1)| \le |(0,1)|$. По теореме Кантора-Бернштейна $|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)|$. Так как $|(0,1)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (континуум), то по индукции получаем $|\mathbb{R}^n| = \mathfrak{c}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Задача 9. *Найти мощность множества всех прямых на плоскости.*

Решение. *Каждая прямая на плоскости задается уравнением* $ax + by + c = 0$, *где* $(a, b) \neq (0, 0)$. *Множество таких троек* (a, b, c) *является подмножеством* $\mathbb{R}^3$, *мощность которого равна* $\mathfrak{c}$. *Следовательно, мощность множества прямых не превосходит* $\mathfrak{c}$. *С другой стороны, рассмотрим множество вертикальных прямых* $x = c$, *где* $c \in \mathbb{R}$. *Это множество имеет мощность* $\mathfrak{c}$ *и является подмножеством всех прямых. Таким образом, мощность множества всех прямых на плоскости равна* $\mathfrak{c}$ *(континуум).*

Задача 10. *Докажите, что счетное объединение континуальных множеств имеет мощность континуум.*

Решение. *Пусть* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *где* $|A_i| = \mathfrak{c}$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$. *Оценим мощность сверху:* $|A| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. *Оценим мощность снизу:* $A \supseteq A_1$, *поэтому* $|A| \geq |A_1| = \mathfrak{c}$. *По теореме Кантора-Бернштейна* $|A| = \mathfrak{c}$.

Задача 11. *Сколько существует функций из множества* $\mathbb{Z}$ *в себя?*

Решение. *Множество всех функций из* $\mathbb{Z}$ *в* $\mathbb{Z}$ *обозначается* $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$. *Его мощность равна*

$$|\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}| = |\mathbb{Z}|^{|\mathbb{Z}|} = \aleph_0^{\aleph_0}.$$

Известно, что $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. *Действительно,* $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. *Таким образом, существует континуум функций из* $\mathbb{Z}$ *в себя.*