ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра компьютерной топологии и алгебры

В.М. Быков

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Методическое пособие для подготовки студентов V курса математического факультета ЧелГУ к государственному экзамену

Челябинск

2002

1 Регулярные поверхности. Эквивалентность поверхностей

Из курса математического анализа известны три основных способа задания поверхности в пространстве: явный, неявный и параметрический. Явный способ представляет собой задание поверхности в виде графика гладкой функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Такой способ задания отвечает интуитивному представлению о поверхности, не имеющей ребер, углов и пиков, т.е. *гладкой.* Но свойство поверхности быть графиком существенно зависит от выбора системы координат, и самые простые поверхности (например, сфера), не являются графиками ни при каком выборе координатных осей. Это приводит к необходимости рассмотрения более общего способа задания поверхностей — неявного:

$$F(x, y, z) = 0 \ . \tag{1}$$

Уравнение (1) с гладкой функцией $F(x, y, z)$ может задавать множество, не отвечающее наглядным представлениям о поверхности. Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задает точку, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ — пустое множество. Поэтому на функцию F, кроме гладкости, нужно налагать дополнительные условия. Естественным условием является то, чтобы все точки, удовлетворяющие уравнению (1), были *неособыми*, т.е. чтобы в каждой такой точке хотя бы одна из частных производных функции F была отлична от нуля. Если, например, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) множество, задаваемое уравнением (1), является графиком гладкой функции $z = f(x, y)$. Поэтому множество (1) в окрестности каждой своей точки выглядит как график гладкой функции, и его естественно считать гладкой поверхностью.

Известен еще один способ задания поверхностей — параметрический, при котором радиус-вектор точки поверхности выражается в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\} \ , \tag{2}$$

где $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ — гладкие функции в области параметров Ω. Образ отображения (2) может вырождаться в линию и даже в точку. Чтобы избежать вырождений, на это отображение налагается условие регулярности.

Определение. *Регулярной поверхностью* в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется гладкое отображение $S\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, задаваемое уравнением

$\vec r = \vec r(u,v)$, для которого векторы

$$\vec r_u = \frac{\partial \vec r}{\partial u} \quad \text{и} \quad \vec r_v = \frac{\partial \vec r}{\partial v}$$

линейно независимы в каждой точке. Образ $S(\Omega)$ называется *носителем* регулярной поверхности S, а отображение $S\colon \Omega \to S(\Omega)$ — его *параметризацией*.

Линейная независимость векторов $\vec r_u$ и $\vec r_v$ в точке $(u_0, v_0) \in \Omega$ означает, что столбцы матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \tag{3}$$

в этой точке линейно независимы, т.е. ее ранг равен 2. Поэтому в матрице (3) найдется минор второго порядка, отличный от нуля. Предположим, например, что $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$, тогда по теореме об обратной функции в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) = \big(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)\big)$ существует гладкое отображение

$$\begin{cases} u &= & u(x,y) \\ v &= & v(x,y) \end{cases},$$

обратное к отображению

$$\begin{cases} x &= & x(u,v) \\ y &= & y(u,v) \end{cases},$$

заданному двумя первыми координатами векторного уравнения (2). Подставив функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в последнюю координату $z(u,v)$ этого уравнения, получим $z = z\big(u(x,y), v(x,y)\big) = f(x,y)$. Таким образом, часть поверхности, полученная ограничением отображения (2) на некоторую окрестность точки (u_0, v_0), является графиком гладкой функции $f(x,y)$, и потому ее носитель соответствует интуитивному представлению о гладкой поверхности.

Заметим, что график гладкой функции $z = f(x,y)$ всегда является носителем регулярной поверхности $\vec r = \{x, y, f(x,y)\}$ (проверьте регулярность!)

2 Касательная плоскость к поверхности

Пусть $S\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ — регулярная поверхность, заданная уравнением $\vec r = = \vec r(u,v)$. Будем говорить, что гладкая кривая $\gamma : (a,b) \to$

$\mathbb{R}^3$ *лежит на поверхности* S, если ее уравнение имеет вид $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. Кривая γ *проходит через точку* $(u_0, v_0) \in \Omega$ при $t = t_0 \in (a, b)$, если $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$.

Определение. *Касательным вектором* к поверхности S в точке (u_0, v_0) называется вектор скорости $\vec{r}\,'(t_0)$ любой гладкой кривой, лежащей на поверхности S и проходящей через эту точку при $t = t_0$.

Теорема — определение. Все касательные векторы к регулярной поверхности S в точке (u_0, v_0) лежат в одной плоскости, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности в данной точке.

Доказательство. Рассмотрим кривую γ_1 с параметром u, заданную уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$. Эта кривая лежит на поверхности, и ее вектор скорости в точке u_0 равен $\vec{e}_1 = \vec{r}_u(u_0, v_0)$. Аналогично, кривая γ_2 с параметром v, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$, имеет вектор скорости в точке v_0, равный $\vec{e}_2 = \vec{r}_v(u_0, v_0)$. Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — касательные к поверхности в точке (u_0, v_0), и по определению регулярной поверхности они линейно независимы. Покажем, что все векторы, касательные к S в этой точке, лежат в плоскости, натянутой на $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Пусть $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ — произвольная кривая, лежащая на S и проходящая через точку (u_0, v_0). Ее вектор скорости

$$\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \cdot u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0) \cdot v'(t_0) = u'(t_0)\vec{e}_1 + v'(t_0)\vec{e}_2$$

линейно выражается через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и потому лежит в плоскости, натянутой на эти векторы.

Упражнение. Проверьте, что *любой* вектор этой плоскости является касательным.

Так как касательная плоскость натянута на векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, то в качестве ее нормального вектора можно взять вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, и ее уравнение можно записать в виде

$$(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N}) = (\vec{R} - \vec{r}_0, [\vec{r}_u, \vec{r}_v]) = 0 \ .$$

Здесь $\vec{R} = \{X, Y, Z\}$ — радиус-вектор произвольной точки, $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$. В этом уравнении участвует смешанное произведение тройки векторов $\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle$, поэтому в координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Явное задание поверхности $z = f(x, y)$ равносильно параметрическому заданию $\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}$, поэтому нормальный вектор касательной плоскости к поверхности, заданной явно, имеет вид

$$\vec{N}_1 = [\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \{-f_x, -f_y, 1\} \ .$$

Уравнение касательной плоскости в этом случае удобно записывать в виде

$$Z - z_0 = f_x(X - x_0) + f_y(Y - y_0) \ ,$$

где производные f_x, f_y берутся в точке (x_0, y_0).

Неявное задание поверхности $F(x, y, z) = 0$ в окрестности неособой точки (x_0, y_0, z_0) сводится к явному: если, например, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции в этой окрестности $z = f(x, y)$, причем

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} \ , \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z} \ .$$

В качестве нормального вектора удобно взять $\vec{N}_2 = F_z \vec{N}_1 = \{F_x, F_y, F_z\}$, тогда уравнение касательной плоскости приобретет вид

$$F_x(X - x_0) + F_y(Y - y_0) + F_z(Z - z_0) = 0 \ .$$

3 Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма. Угол между кривыми на поверхности

Пусть S: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ — регулярная поверхность, $\gamma: \ \vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ — кривая на поверхности S, $t \in (a, b)$. Вычислим длину кривой γ от $t = \alpha$ до $t = \beta$, $a < \alpha < \beta < b$:

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}\,'(t)| \, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\vec{r}\,', \vec{r}\,')} dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\vec{r}_u u' + \vec{r}_v v', \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v')} dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\vec{r}_u, \vec{r}_u) u'^2 + 2(\vec{r}_u, \vec{r}_v) u'v' + (\vec{r}_v, \vec{r}_v) v'^2} dt \ .$$

Обозначим $E = (r_u, r_u)$, $F = (r_u, r_v)$, $G = (r_v, r_v)$. Эти коэффициенты зависят только от поверхности S, но не от кривой γ. Получим

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt \ . \qquad (4)$$

Если внести dt под корень и вспомнить, что $u'dt = du$, $v'dt = dv$, то равенство (4) запишется в виде

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \ .$$

Выражение, стоящее под корнем, называется *первой квадратичной формой* поверхности:

$$I(du, dv) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \ . \tag{5}$$

Если рассмотреть длину кривой с переменным верхним пределом

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt \ , \qquad \text{то}$$

$$ds(t) = s'(t)dt = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,,$$

поэтому первую квадратичную форму называют еще *квадратом дифференциала длины дуги*: $I(du, dv) = ds^2$.

Покажем, что выражение (5) действительно является квадратичной формой на касательной плоскости к поверхности S в каждой ее точке. В самом деле, касательная плоскость натянута на векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, поэтому всякий касательный вектор разлагается по базису $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$. По традиции координаты касательного вектора относительно этого базиса обозначаются через $\{du, dv\}$, а сам вектор — через $d\vec{r}$. При этом формула разложения вектора по базису совпадает с известной из анализа формулой полного дифференциала и потому легко запоминается:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \ .$$

Вычислим квадрат длины касательного вектора $d\vec{r}$:

$$|d\vec{r}|^2 = (d\vec{r}, d\vec{r}) = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = I(du, dv) = I(d\vec{r}) \ .$$

Поэтому первая квадратичная форма представляет собой *квадрат длины касательного вектора*: $I(du, dv) = I(d\vec{r}) = |d\vec{r}|^2$.

Первая квадратичная форма полностью определяет *скалярные произведения* касательных векторов: если

$$d\vec{r}_1 = \vec{r}_u du_1 + \vec{r}_v dv_1 \ , \qquad d\vec{r}_2 = \vec{r}_u du_2 + \vec{r}_v dv_2 \ ,$$

то
$$(d\vec{r}_1, d\vec{r}_2) = (\vec{r}_u du_1 + \vec{r}_v dv_1, \vec{r}_u du_2 + \vec{r}_v dv_2) =$$

$$= E\,du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G\,dv_1 dv_2 \equiv I(d\vec{r}_1, d\vec{r}_2) \ .$$

Определенное последним равенством выражение $I(d\vec{r}_1, d\vec{r}_2)$ представляет собой симметричную билинейную форму, соответствующую квадратичной форме $I(d\vec{r})$: при подстановке в него равных между собой векторов $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2 = d\vec{r}$ получается первая квадратичная форма.

Зная первую квадратичную форму поверхности, мы знаем не только длины всех кривых на этой поверхности, но и все углы между ними. Действительно, пусть кривые

$$\gamma_1 : \ \vec{r} = \vec{r}(u_1(t), v_1(t)) = \vec{r}_1(t) \quad \text{и} \quad \gamma_2 : \ \vec{r} = \vec{r}(u_2(t), v_2(t)) = \vec{r}_2(t)$$

пересекаются в точке $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ при $t = t_0$. Назовем *углом между кривыми* в точке их пересечения угол между касательными к ним в этой точке. Если обозначить этот угол буквой φ, то

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{r}\,'_1, \vec{r}\,'_2)}{|\vec{r}\,'_1||\vec{r}\,'_2|} = \frac{Eu'_1 u'_2 + F(u'_1 v'_2 + u'_2 v'_1) + Gv'_1 v'_2}{\sqrt{E{u'_1}^2 + 2Fu'_1\, v'_1 + G{v'_1}^2}\sqrt{E{u'_2}^2 + 2Fu'_2\, v'_2 + G{v'_2}^2}}.$$

4 Примеры вычисления первой квадратичной формы, длин кривых и углов между ними

Пример 1. *Поверхность вращения* регулярной кривой в плоскости xOz

$$\begin{cases} x = f(u) > 0 \\ z = g(u) \ , \end{cases}$$

не пересекающей ось Oz, вокруг этой оси. Уравнение поверхности имеет вид

$$\vec{r} = \{f(u)\cos\varphi, f(u)\sin\varphi, g(u)\} \ .$$

Поэтому

$$\vec{r}_u = \{f'\cos\varphi, f'\sin\varphi, g'\}, \quad \vec{r}_\varphi = \{-f\sin\varphi, f\cos\varphi, 0\} \ ,$$

$$E = {f'}^2 + {g'}^2,\ F = 0,\ G = f^2, \quad I(du, d\varphi) = ({f'}^2 + {g'}^2)du^2 + f^2 d\varphi^2 \ .$$

Регулярность вращаемой кривой равносильна неравенству $E > 0$, а тот факт, что кривая не пересекает ось Oz — неравенству $G > 0$. Если бы кривая пересекала ось, то в точке пересечения поверхность вращения имела бы особенность типа вершины конуса, в которой нарушилась бы регулярность поверхности. Действительно, векторы скоростей кривых на конусе, проходящих через вершину, заполняют сам этот конус (а не плоскость, как у регулярных поверхностей).

Частные случаи:

Цилиндр радиуса R с образующими, параллельными оси Oz: $u = z$, $f(z) = R,\ g(z) = z \implies I(dz, d\varphi) = dz^2 + R^2 d\varphi^2$.

Конус с углом раствора α получается, если взять в качестве u расстояние ρ от текущей точки до начала координат и положить $f(\rho) = \rho \sin\alpha,\ g(\rho) = \rho\cos\alpha \implies I(d\rho, d\varphi) = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2\alpha\, d\varphi^2$.

Сфера радиуса R является поверхностью вращения полуокружности $x^2 + z^2 = = R^2,\ x > 0,\ y = 0$ вокруг своего диаметра Oz. Если взять в качестве параметра на этой полуокружности полярный угол θ в плоскости xOz, отсчитываемый от оси Oz в сторону положительного направления оси Ox, то $f(\theta) = R\sin\theta,\ g(\theta) = = R\cos\theta,\ 0 < \theta < \pi$, $I(d\theta, d\varphi) = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.

Катеноидом называется поверхность вращения *цепной линии* $x = a\,\mathrm{ch}\dfrac{z}{a}$ вокруг оси Oz. В наших обозначениях

$$u = z,\ \ f(z) = a\,\mathrm{ch}\frac{z}{a},\ \ g(z) = z, \quad I(dz, d\varphi) = \mathrm{ch}^2\frac{z}{a}(dz^2 + a^2 d\varphi^2)\ .$$

Пример 2. *Геликоидом* называется поверхность, образованная перпендикулярами, опущенными из всех точек винтовой линии на ее ось. Уравнение геликоида можно записать в виде $\vec r = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, a\varphi\}$, где (ρ, φ) — “почти” полярные координаты (с той разницей, что ρ может принимать отрицательные значения). Имеем $\vec r_\rho = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\}$, $\vec r_\varphi = \{-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, a\}$, откуда

$$E = 1,\ F = 0,\ G = \rho^2 + a^2, \quad I(d\rho, d\varphi) = d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)d\varphi^2\ .$$

Введем новый параметр u при помощи равенства

$$\rho = a\,\mathrm{sh}\frac{u}{a}, \quad \text{тогда} \quad d\rho = \mathrm{ch}\frac{u}{a}du, \quad I(du, d\varphi) = \mathrm{ch}^2\frac{u}{a}(du^2 + a^2 d\varphi^2)\ .$$

Мы получили ту же метрику, что и на катеноиде. Это означает, что геликоид и катеноид изгибаются друг на друга — факт далеко не очевидный!

Пример 3. На геликоиде $\vec r = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 3\varphi\}$ вычислим длину линии

$\varphi = \ln(\rho + \sqrt{\rho^2+9})$ между точками ее пересечения с линиями $\rho = 0$ и $\rho = 4$. Выберем ρ в качестве параметра, тогда

$$d\varphi = \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+9}}\ , \quad s = \int\limits_0^4 \sqrt{d\rho^2 + (\rho^2+9)d\varphi^2} = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{\rho^2+9}{\rho^2+9}}d\rho = 4\sqrt{2}\,.$$

Пример 4. Вычислим угол между кривыми

$$\gamma_1 :\ \ln u - v = 0 \quad \text{и} \quad \gamma_2 :\ u^2 + v = 1$$

на поверхности $\vec{r} = \{u, v, 3u^2 + 2uv + v^2\}$. Эти кривые пересекаются в единственной точке (u_0, v_0), где $u_0 = 1$, $v_0 = 0$. Вычислим первую квадратичную форму:

$$\vec{r}_u = \{1, 0, 2(3u+v)\},\ \vec{r}_v = \{0, 1, 2(u+v)\}\ ,$$

$$E = 1 + 4(3u+v)^2,\ F = 4(3u+v)(u+v),\ G = 1 + 4(u+v)^2\ .$$

Для вычисления угла нам нужны только значения коэффициентов этой формы в точке $(u_0, v_0) = (1, 0)$: $E = 37$, $F = 12$, $G = 5$. В качестве параметра на обеих кривых можно взять $t = u$, тогда

$$(u_1(t), v_1(t)) = (t, \ln t), \quad (u_2(t), v_2(t)) = (t, 1 - t^2),$$

и в точке пересечения $t = t_0 = 1$. В базисе $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$

$$\vec{r}\,'_1(1) = \left\{1, \frac{1}{t}\right\}\Bigg|_{t=1} = \{1, 1\}\ , \quad \vec{r}\,'_2(1) = \{1, -2t\}\Bigg|_{t=1} = \{1, -2\}\ ,$$

$$\cos\varphi = \frac{37\cdot1\cdot1 + 12(1\cdot(-2) + 1\cdot1) + 5\cdot1\cdot(-2)}{\sqrt{37\cdot1^2 + 24\cdot1\cdot1 + 5\cdot1^2}\sqrt{37\cdot1^2 + 24\cdot1\cdot(-2) + 5\cdot(-2)^2}} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{66}\cdot3} = \frac{5}{\sqrt{66}} = 0{,}61546\ .$$

5 Кривизна линии на поверхности и вторая квадратичная форма

Пусть S: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ — регулярная поверхность, γ : $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$ — кривая на поверхности S, параметризованная натуральным параметром. В каждой точке поверхности S определен *единичный нормальный вектор* $\vec{n}$, полученный из нормального вектора $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ делением на его длину:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\ .$$

Поэтому в каждой точке кривой γ можно определить правый ортонормированный репер $\{\vec{n}, \vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{\tau}]\}$, где $\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}$ — единичный касательный вектор к γ. Разложим вектор ускорения (он же — вектор кривизны) $\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\vec{r}}$ по этому реперу. По лемме о производной единичного вектора $\dot{\vec{\tau}}$ ортогонален $\vec{\tau}$, так что коэффициент при $\vec{\tau}$ в этом разложении равен нулю:

$$\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\vec{r}} = k_n \vec{n} + k_g [\vec{n}, \vec{\tau}] \ .$$

Коэффициент k_n называется *нормальной кривизной*, а k_g — *геодезической кривизной* кривой γ в данной точке.

Вычислим нормальную кривизну k_n. Умножив скалярно обе части последнего равенства на $\vec{n}$, получим $k_n = (\dot{\vec{\tau}}, \vec{n})$. Так как $\vec{\tau} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}$, то

$$\dot{\vec{\tau}} = (\vec{r}_{uu} \dot{u} + \vec{r}_{uv} \dot{v}) \dot{u} + \vec{r}_u \ddot{u} + (\vec{r}_{vu} \dot{u} + \vec{r}_{vv} \dot{v}) \dot{v} + \vec{r}_v \ddot{v} =$$

$$= (\vec{r}_{uu} \dot{u}^2 + 2 \vec{r}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \vec{r}_{vv} \dot{v}^2) + \vec{r}_u \ddot{u} + \vec{r}_v \ddot{v} \ .$$

Если обе части этого равенства скалярно умножить на $\vec{n}$ и учесть, что все касательные векторы ортогональны нормальному, получим

$$k_n = (\dot{\vec{\tau}}, \vec{n}) = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}) \dot{u}^2 + 2 (\vec{r}_{uv}, \vec{n}) \dot{u} \dot{v} + (\vec{r}_{vv}, \vec{n}) \dot{v}^2 \ . \qquad (6)$$

Введем обозначения

$$L = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}), \quad M = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}), \quad N = (\vec{r}_{vv}, \vec{n}) \qquad (7)$$

и предположим, что направление кривой γ задано теперь не единичным вектором $\vec{\tau} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}$, а произвольным вектором $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ того же направления (что соответствует замене кривой γ на эквивалентную). Тогда

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}, \quad \dot{u} = \frac{du}{|d\vec{r}|}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{|d\vec{r}|},$$

и подстановка этих выражений в формулу (6) дает

$$k_n = \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{|d\vec{r}|^2} = \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2} \ .$$

Выражение в числителе называется *второй квадратичной формой* поверхности и обозначается $II(du, dv)$ или $II(d\vec{r})$. Ее коэффициенты вычисляются по формулам (7). Таким образом, для нормальной кривизны получается компактная формула

$$k_n = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)} \ .$$

Так как коэффициенты первой и второй квадратичных форм зависят только от поверхности, то нормальная кривизна кривой на поверхности в данной точке *не зависит от кривой*, а зависит только от ее направления (задаваемого вектором $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ или его координатами $\{du, dv\}$). Иными словами, *все кривые на поверхности, проходящие через данную точку в данном направлении, имеют одну и ту же нормальную кривизну.*

6 Вычисление главных кривизн, гауссовой и средней кривизны

Из курса линейной алгебры известно, что для любой квадратичной формы на касательной плоскости существует ортонормированный базис, в котором матрица этой формы имеет диагональный вид, т.е. форма приводится к сумме квадратов переменных с коэффициентами, однозначно определяемыми этой формой. Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — такой базис для второй квадратичной формы поверхности в данной точке. Обозначим через $\{\xi, \eta\}$ координаты касательного вектора $d\vec{r}$ относительно этого базиса: $d\vec{r} = \xi\vec{e}_1 + \eta\vec{e}_2$. Значение второй квадратичной формы на векторе $d\vec{r}$ равно $II(d\vec{r}) = k_1\xi^2 + k_2\eta^2$. Значение первой квадратичной формы на этом векторе равно $I(d\vec{r}) = |d\vec{r}|^2 = (d\vec{r}, d\vec{r}) = \xi^2 + \eta^2$.

Определение. Числа k_1, k_2 называется *главными кривизнами* поверхности в данной точке, их произведение $K = k_1 k_2$ — *гауссовой* или *полной* кривизной, а среднее арифметическое $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ — *средней* кривизной поверхности. Точки поверхности, в которых гауссова кривизна $K > 0$, называются *эллиптическими*. Точки, в которых $K < 0$, называются *гиперболическими*, а точки, в которых $K = 0$, но $H \neq 0$ — *параболическими*. Наконец, точки с $K = H = 0$ называются *точками уплощения*.

Можно показать (см. учебники), что в окрестности эллиптической точки поверхность имеет вид чаши или шапочки, т.е. слегка деформированного эллиптического параболоида. В частности, она лежит по одну сторону от касательной плоскости. В окрестности гиперболической точки поверхность является седлом, т.е. слегка деформированным гиперболическим параболоидом, и лежит по обе стороны касательной плоскости. В окрестности параболической точки поверхность близка к желобу, т.е. параболическому цилиндру, но не обязана пересекаться, как этот цилиндр, с касательной плоскостью по прямой. В окрестности точки уплощения поведение поверхности по отношению к касательной плоскости может быть самым разнообразным. Таким образом, локальное поведение регулярной поверхности определяется ее гауссовой и средней кривизной, и задача вычисления этих кривизн имеет первостепенное значение.

Покажем, что главные кривизны можно найти, не переходя к ортонормированному базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в касательной плоскости, в котором матрица второй квадратичной формы имеет диагональный вид. Так как

$$I(d\vec{r}) = \xi^2 + \eta^2 \ , \quad II(d\vec{r}) = k_1\xi^2 + k_2\eta^2 \ ,$$

то матрицы первой и второй квадратичных форм в этом базисе имеют вид

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \ .$$

Поэтому главные кривизны k_1, k_2 можно определить как корни уравнения

$$\det(\mathbf{B}' - k\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} k_1 - k & 0 \\ 0 & k_2 - k \end{vmatrix} = (k_1 - k)(k_2 - k) = 0 \ .$$

В исходном базисе $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ матрицы первой и второй квадратичных форм имеют вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \ .$$

Как и любые векторы, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ разлагаются по базису $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{e}_1 & = & c_{11}\vec{r}_u & + & c_{21}\vec{r}_v \ , \\ \vec{e}_2 & = & c_{12}\vec{r}_u & + & c_{22}\vec{r}_v \ . \end{array}$$

Коэффициенты этих разложений записываются в матрицу $\mathbf{C}$ (обратите внимание на порядок индексов!), которая называется *матрицей перехода* от базиса $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ к базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \ .$$

Из курса линейной алгебры известно, что матрицы одной и той же квадратичной формы (в данном случае первой или второй) в этих базисах связаны между собой равенствами $\mathbf{B}' = \mathbf{C}^\mathbf{t}\mathbf{B}\mathbf{C}$, $\mathbf{E} = \mathbf{C}^\mathbf{t}\mathbf{G}\mathbf{C}$. Поэтому

$$\det(\mathbf{B}' - k\mathbf{E}) = \det(\mathbf{C}^\mathbf{t}\mathbf{B}\mathbf{C} - k\mathbf{C}^\mathbf{t}\mathbf{G}\mathbf{C}) = \det\mathbf{C}^\mathbf{t}(\mathbf{B} - k\mathbf{G})\mathbf{C} =$$

$$= \det \mathbf{C^t} \det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) \det \mathbf{C} = \det^2 \mathbf{C} \cdot \det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) \ .$$

Так как $\det\mathbf{C} \neq 0$, то уравнение $\det(\mathbf{B}' - k\mathbf{E}) = 0$ равносильно уравнению $\det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) = 0$, т.е. *главные кривизны k_1, k_2 являются корнями уравнения* $\det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) = 0$, которое выписывается прямо по исходному уравнению поверхности и называется *характеристическим уравнением.* В развернутой форме характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = (EG - F^2)k^2 - (EN + GL - 2FM)k + (LN - M^2) = 0 \ . \tag{8}$$

Если нужны не сами главные кривизны, а только гауссова или средняя кривизна, то их можно найти по теореме Виета:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \ , \quad K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det\mathbf{B}}{\det\mathbf{G}} \ . \tag{9}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. Главные кривизны поверхности являются корнями характеристического уравнения (8), а гауссова и средняя кривизны вычисляются по формулам (9).

Заметим, что если нас интересуют только типы точек поверхности (эллиптические, гиперболические, параболические), то полностью вычислять гауссову кривизну по формуле (9) не нужно: достаточно найти знак ее числителя, т.е. определителя второй квадратичной формы.

7 Примеры вычисления главных кривизн, гауссовой и средней кривизны

Пример 1. Поверхность вращения регулярной кривой в плоскости xOz

$$\begin{cases} x = f(u) > 0 \\ z = g(u) \ , \end{cases}$$

не пересекающей ось Oz, вокруг этой оси. Уравнение поверхности имеет вид

$$\vec{r} = \{f(u)\cos\varphi, f(u)\sin\varphi, g(u)\} \ .$$

Поэтому

$$\vec{r}_u = \{f'\cos\varphi, f'\sin\varphi, g'\}, \quad \vec{r}_\varphi = \{-f\sin\varphi, f\cos\varphi, 0\} \ ,$$

$$E = {f'}^2 + {g'}^2, \ F = 0, \ G = f^2, \quad I(du, d\varphi) = ({f'}^2 + {g'}^2)du^2 + f^2 d\varphi^2 \ ,$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi] = \begin{vmatrix} f'\cos\varphi & f'\sin\varphi & g' \\ -f\sin\varphi & f\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \{-fg'\cos\varphi, -fg'\sin\varphi, ff'\} ,$$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi]| = f\sqrt{f'^2 + g'^2} , \quad \vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_\varphi]|} = \frac{\{-g'\cos\varphi, -g'\sin\varphi, f'\}}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} .$$

Вычислим вторые производные:

$$\vec{r}_{uu} = \{f''\cos\varphi, f''\sin\varphi, g''\}, \quad \vec{r}_{u\varphi} = \{-f'\sin\varphi, f'\cos\varphi, 0\} ,$$

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = \{-f\cos\varphi, -f\sin\varphi, 0\} .$$

Отсюда

$$L = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}) = \frac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \quad M = 0 , \quad N = (\vec{r}_{\varphi\varphi}, \vec{n}) = \frac{fg'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} . \tag{10}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - k(f'^2 + g'^2) & 0 \\ 0 & \dfrac{fg'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - kf^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Главные кривизны в направлении меридиана и параллели выражаются соответственно формулами

$$k_1 = \frac{f'g'' - f''g'}{(f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} , \quad k_2 = \frac{g'}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}} . \tag{11}$$

Выражение для полной кривизны имеет вид

$$K = \frac{(f'g'' - f''g')g'}{f(f'^2 + g'^2)^2} .$$

Частные случаи:

Цилиндр радиуса R с образующими, параллельными оси Oz: $u = z$, $f(z) = R$, $g(z) = z \implies I(dz, d\varphi) = dz^2 + R^2 d\varphi^2$. Так как $f' = f'' = 0$, $g' = 1$, то согласно (10) и (11) $L = M = 0$, $N = R$, $k_1 = 0$, $k_2 = \dfrac{1}{R}$, откуда $K = 0$, $H = \dfrac{1}{2R}$, и все точки цилиндра — параболические.

Конус с углом раствора α: $u = \rho$, $f(\rho) = \rho\sin\alpha$, $g(\rho) = \rho\cos\alpha \implies I(d\rho, d\varphi) = d\rho^2 + \rho^2\sin^2\alpha\, d\varphi^2$. Так как $f' = \sin\alpha$, $f'' = 0$, $g' = \cos\alpha$, $g'' = 0$, то согласно (10) и (11) $L = M = 0$, $N = \sin\alpha\,\cos\alpha$,

$k_1 = 0$, $k_2 = \mathrm{ctg}\alpha$, откуда $K = 0$, $H = \dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{2}$, и все точки конуса — параболические.

Сфера радиуса R: $u = \theta$, $f(\theta) = R\sin\theta$, $g(\theta) = R\cos\theta$, $0 < \theta < \pi$ $\Longrightarrow I(d\theta, d\varphi) = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Так как $f' = R\cos\theta$, $f'' = g' = -R\sin\theta$, $g'' = -R\cos\theta$, то согласно (10) и (11) $L = -R$, $M = 0$, $N = -R\sin^2\theta$, $k_1 = k_2 = = -\dfrac{1}{R}$, откуда $K = \dfrac{1}{R^2}$. Таким образом, гауссова кривизна сферы *постоянна и положительна*, и все ее точки — эллиптические.

Псевдосфера — поверхность вращения *трактрисы*

$$\begin{cases} x = f(\theta) = R\sin\theta \ , \\ z = g(\theta) = -R\left(\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}\right| + \cos\theta\right) \ . \end{cases}$$

Так как $f' = R\cos\theta$, $g' = -R\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$, то $I(d\theta, d\varphi) = R^2(\mathrm{ctg}^2\theta d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Так как $f'' = -R\sin\theta$, $g'' = R\cos\theta(\mathrm{ctg}^2\theta + 2)$, то

$$II(d\theta, d\varphi) = R(\mathrm{ctg}\theta d\theta^2 - \cos\theta\sin\theta d\varphi^2) \ ,$$

$$k_1 = \frac{1}{R\mathrm{ctg}\theta} \ , \quad k_2 = -\frac{1}{R}\mathrm{ctg}\theta \ , \quad K = k_1 k_2 = -\frac{1}{R^2} \ .$$

Итак, полная кривизна псевдосферы *постоянна и отрицательна*, и все ее точки — гиперболические.

Катеноид:

$$u = z, \ f(z) = a\mathrm{ch}\frac{z}{a}, \ g(z) = z, \quad I(dz, d\varphi) = \mathrm{ch}^2\frac{z}{a}(dz^2 + a^2 d\varphi^2) \ .$$

Так как $f' = \mathrm{sh}\dfrac{z}{a}$, $f'' = \dfrac{1}{a}\mathrm{ch}\dfrac{z}{a}$, $g' = 1$, $g'' = 0$, то согласно (10) и (11) $L = -\dfrac{1}{a}$, $M = 0$, $N = a$,

$$k_1 = -\frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\dfrac{z}{a}} \ , \quad k_2 = \frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\dfrac{z}{a}} \ , \quad K = -\frac{1}{a^2\mathrm{ch}^4\dfrac{z}{a}} \ , \quad H = 0 \ ,$$

и все точки катеноида — гиперболические.

Пример 2. *Геликоид*: $\vec{r} = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, a\varphi\}$, $\vec{r}_\rho = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\}$, $\vec{r}_\varphi = \{-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, a\}$, откуда

$$E = 1, \ F = 0, \ G = \rho^2 + a^2, \quad I(d\rho, d\varphi) = d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)d\varphi^2 \ .$$

Геликоид не является поверхностью вращения, поэтому формулы примера 1 неприменимы, и все нужно считать заново. Единичный нормальный вектор выражается формулой

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]}{|[\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]|} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \{a \sin\varphi, -a\cos\varphi, \rho\} \ .$$

Далее, $\vec{r}_{\rho\rho} = \vec{0}$, $\vec{r}_{\rho\varphi} = \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\}$, $\vec{r}_{\varphi\varphi} = \{-\rho\cos\varphi, -\rho\sin\varphi, 0\}$,

$$L = (\vec{r}_{\rho\rho}, \vec{n}) = 0 \ , \quad N = (\vec{r}_{\varphi\varphi}, \vec{n}) = 0 \ , \quad M = (\vec{r}_{\rho\varphi}, \vec{n}) = -\frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \ .$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & -\dfrac{a}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{\rho^2+a^2}} & -k(\rho^2+a^2) \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad \text{откуда}$$

$$k_{1,2} = \pm\frac{a}{\rho^2 + a^2} \ , \quad K = -\frac{a^2}{(\rho^2 + a^2)^2} \ , \quad H = 0 \ .$$

Если применить подстановку $\rho = a \,\mathrm{sh}\dfrac{u}{a}$, которая превращает первую квадратичную форму геликоида в аналогичную форму катеноида, то

$$\rho^2 + a^2 = a^2 \mathrm{ch}^2 \frac{u}{a} \ , \quad K = -\frac{1}{a^2 \mathrm{ch}^4 \dfrac{u}{a}} \ , \quad H = 0 \ \text{— как у катеноида!}$$

ПРОБНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

ВАРИАНТ №1

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\vec{r} = \{2u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3\}$ в точке $P_0(3, 5, 7)$.

2. Найдите первую квадратичную форму поверхности $\vec{r} = \{a \,\mathrm{ch}\, u \cos v, a \,\mathrm{ch}\, u \sin v, b \,\mathrm{sh}\, u\}$.

ВАРИАНТ №2

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2)$ в точке $P_0\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4} - \ln 2\right)$.

2. Найдите угол между кривыми $\gamma_1 : 2u - v = 0$ и $\gamma_2 : v - u = 1$ на поверхности $\vec{r} = \{u^2, 2u - v^2, 2\sqrt{u} + v\}$.

ВАРИАНТ №3

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\vec{r}=\{u,u^2-2v,u^3-3uv\}$ в точке $P_0(1,3,4)$.

2. Найдите первую квадратичную форму поверхности $\vec{r}=\{a,\operatorname{sh}u\cos v,a\operatorname{sh}u\sin v,b\operatorname{ch}u\}$.

ВАРИАНТ №4

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\ln x+\operatorname{arctg}y+xyz-\dfrac{\pi}{4}=0$ в точке $P_0(1,1,0)$.

2. Найдите угол между кривыми $\gamma_1 : 2u-v=0$ и $\gamma_2 : u+v=3$ на поверхности $\vec{r}=\{u^2-v^2,2uv,u^2+v^2\}$.

ВАРИАНТ №5

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\vec{r}=\{u^2,2u-v^2,2\sqrt{u}+v\}$ в точке $P_0(1,-2,4)$.

2. Найдите первую квадратичную форму поверхности $\vec{r}=\{u\cos v,u\sin v,u^2\}$.

ВАРИАНТ №6

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=e^{x+y}+\arcsin xy$ в точке $P_0(1,0,e)$.

2. Найдите угол между кривыми $\gamma_1 : u+v=2$ и $\gamma_2 : u-v=0$ на поверхности $\vec{r}=\{u,u^2-2v,u^3-3uv\}$.

ВАРИАНТ №7

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\vec{r}=\{u^2-v^2,2uv,u^2+v^2\}$ в точке $P_0(-3,4,5)$.

2. Найдите первую квадратичную форму поверхности $\vec{r}=\{a\cos u\cos v,a\cos u\sin v,c\sin u\}$.

ВАРИАНТ №8

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $e^{x-y}-\arcsin xyz+\dfrac{\pi}{6}\cos(x+z)-\sqrt{e}=0$ в точке $P_0\left(1,\dfrac{1}{2},-1\right)$.

2. Найдите угол между кривыми $\gamma_1 : v=1+u$ и $\gamma_2 : v=3-u$ на поверхности $\vec{r}=\{u\cos v,u\sin v,u^2\}$.

ОТВЕТЫ: (по модулю 8)

Вариант 1.
1. $(u_0, v_0) = (2, 1)\,, \quad \vec{n} = \{18, 3, -4\}$.
2. $I(d\vec{r}) = (a^2\mathrm{sh}^2u + b^2\mathrm{ch}^2u)du^2 + a^2\mathrm{ch}^2u\,dv^2$.
Вариант 2.
1. $\vec{n} = \{3, 1, 2\}$.
2. $\cos\varphi = \pm\dfrac{11}{7\sqrt{3}}$.
Вариант 3.
1. $(u_0, v_0) = (1, -1)\,, \quad \vec{n} = \{6, 3, -2\}$.
2. $I(d\vec{r}) = (a^2\mathrm{ch}^2u + b^2\mathrm{sh}^2u)du^2 + a^2\mathrm{sh}^2u\,dv^2$.
Вариант 4.
1. $\vec{n} = \{2, 1, 2\}$.
2. $\cos\varphi = \pm\sqrt{\dfrac{2}{11}}$.
Вариант 5.
1. $(u_0, v_0) = (1, 2)\,, \quad \vec{n} = \{3, -1, -4\}$.
2. $I(d\vec{r}) = (1 + 4u^2)du^2 + u^2dv^2$.
Вариант 6.
1. $\vec{n} = \{-e, -e - 1, 1\}$.
2. $\cos\varphi = \pm\dfrac{4}{\sqrt{65}}$.
Вариант 7.
1. $(u_0, v_0) = (1, 2)\,, \quad \vec{n} = \{3, -4, 5\}$.
2. $I(d\vec{r}) = (a^2\sin^2u + c^2\cos^2u)du^2 + a^2\cos^2u\,dv^2$.
Вариант 8.
1. $\vec{n} = \{\sqrt{3e} + 1, -\sqrt{3e} + 2, -1\}$.
2. $\cos\varphi = \pm\dfrac{2}{3}$.

ПРОБНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3

ВАРИАНТ №1

1. Определите типы точек поверхности $z = \ln x + \mathrm{arctg}\, y$.
2. На поверхности $\vec{r} = \{u^3 - v, 2uv, v^2\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (0, -1)$ в направлении кривой $\gamma : v + \cos u = 0$.

ВАРИАНТ №2

1. Вычислите среднюю кривизну поверхности

$$\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, u + v\}\ .$$

2. На поверхности $\vec{r} = \{uv^2, -u+2v, u^2\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (1, 2)$ в направлении кривой $\gamma : 2u^2 - v = 0$.

ВАРИАНТ №3

1. Определите типы точек поверхности $z = x^2 + xy + y^2$.
2. На поверхности $\vec{r} = \{v^3, 3uv^2, 3u^2v\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (-1, 1)$ в направлении кривой $\gamma : u + v^3 = 0$.

ВАРИАНТ №4

1. Вычислите главные кривизны поверхности
$$\vec{r} = \left\{\frac{u^2}{2} + v, u + \frac{v^2}{2}, uv\right\} \text{ в точке } P_0\left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) .$$
2. На поверхности $\vec{r} = \{2u, v^2 - u, uv\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (0, 1)$ в направлении кривой $\gamma : u + \ln v = 0$.

ВАРИАНТ №5

1. Определите типы точек поверхности $z = e^y \sin x$.
2. На поверхности $\vec{r} = \{u^2 + v^2, u, v^2\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (2, -1)$ в направлении кривой $\gamma : u - 2v^2 = 0$.

ВАРИАНТ №6

1. Вычислите среднюю кривизну поверхности
$$\vec{r} = \left\{\sqrt{u^2+1}\cos v, \sqrt{u^2+1}\sin v, \ln(u + \sqrt{u^2+1})\right\} .$$
2. На поверхности $\vec{r} = \{uv^2, u - v, u^2\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (-1, 0)$ в направлении кривой $\gamma : v = \sin \pi u$.

ВАРИАНТ №7

1. Определите типы точек поверхности $z = x + \ln y$.
2. На поверхности $\vec{r} = \{u + v^2, u - v^2, u^2\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (2, -1)$ в направлении кривой $\gamma : u + v^3 = 1$.

ВАРИАНТ №8

1. Вычислите главные кривизны поверхности $\vec{r} = \{u^2 + 2v, uv, v^2\}$ в точке $P_0(-1, -1, 1)$.
2. На поверхности $\vec{r} = \{2uv, u^2, v^2\}$ найдите кривизну нормального сечения в точке $(u_0, v_0) = (1, 3)$ в направлении кривой $\gamma : v^3 - 3uv^2 = 0$.

ОТВЕТЫ: (по модулю 8)

Вариант 1.

1. При $y < 0$ — гиперболические, $y = 0$ — параболические, $y > 0$ — эллиптические.
2. $k_n = 0$.

Вариант 2.

1. $H = -\dfrac{2(1+u^2)}{(2u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
2. $k_n = -\dfrac{58}{453\sqrt{14}}$.

Вариант 3.

1. Все точки эллиптические.
2. $k_n = -\dfrac{8}{225\sqrt{14}}$.

Вариант 4.

1. $k_1 = 0,\ k_2 = -\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$.
2. $k_n = -\dfrac{2}{7\sqrt{5}}$.

Вариант 5.

1. Все точки гиперболические.
2. $k_n = -\dfrac{2\sqrt{2}}{129}$.

Вариант 6.

1. $H = 0$.
2. $k_n = \dfrac{2\pi^2}{5 + 2\pi + \pi^2}$.

Вариант 7.

1. Все точки параболические.
2. $k_n = \dfrac{3}{85}$.

Вариант 8.

1. $k_1 = \dfrac{2}{27},\ k_2 = \dfrac{1}{6}$.
2. $k_n = 0$.