ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра компьютерной топологии и алгебры

В.М. Быков

ТЕОРИЯ КРИВЫХ

*Методическое пособие для подготовки студентов V
курса
математического факультета ЧелГУ
к государственному экзамену*

Челябинск

2002

1 Гладкие и регулярные кривые

Интуитивное представление о движении точки, положение которой в момент времени t задается радиус-вектором $\vec{r}(t)$, приводит к следующему определению гладкой кривой как траектории ее движения.

Определение. *Гладкой кривой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется отображение $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, задаваемое уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x^1(t), \ldots, x^n(t)\}, \tag{1}$$

где $x^i(t)$ — гладкие (т.е. имеющие производные любого порядка) функции на интервале (a, b).

Вопрос: является ли окружность $x^2 + y^2 = 1$ гладкой кривой в $\mathbb{R}^2$?

Ответ: нет, так как окружность — множество на плоскости, а кривая — отображение некоторого интервала в плоскость.

Вопрос: является ли гладкой кривой отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданное уравнением

$$\vec{r} = \{\cos t, \sin t\} \ ? \tag{2}$$

Ответ: да.

Во многих геометрических задачах (в отличие от задач механики) нас интересует только линия, по которой движется точка, а не закон движения по этой линии. Представление о линии, заметаемой точкой при движении, приводит к следующему определению.

Определение. *Носителем* гладкой кривой $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ называется образ $L = \gamma((a, b)) \in \mathbb{R}^n$ отображения γ. Сама эта кривая называется *параметризацией* своего носителя.

Пример. Носитель кривой (2) есть окружность $x^2 + y^2 = 1$. Кроме параметризации (2), эта окружность обладает и другими параметризациями, например,

$$\vec{r} = \{\cos t^3, \sin t^3\} \ . \tag{3}$$

Носитель гладкой кривой не вполне соответствует интуитивному представлению о гладкой линии: он может иметь углы и даже вырождаться в точку.

Пример. Кривая $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданная уравнением

$$\vec{r} = \{t^2, t^3\} \ , \tag{4}$$

имеет своим носителем *полукубическую параболу*, две ветви которой касаются одна другой в начале координат, образуя между собой нулевой угол (см. рис. 1).

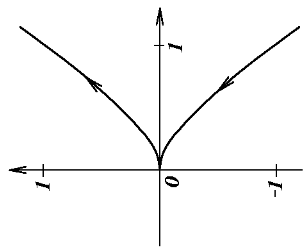

Рис. 1: Полукубическая парабола

Оказывается, единственной причиной возникновения угла у носителя гладкой кривой является обращение в нуль ее вектора скорости.

Определение. *Вектором скорости* кривой $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, заданной уравнением (1), в момент $t_0 \in (a,b)$ называется вектор

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Для гладкой кривой этот вектор существует при всех $t \in (a,b)$ и равен

$$\vec{r}\,'(t) = \{x^{1\,\prime}(t), \ldots, x^{n\,\prime}(t)\},$$

поскольку вычитание векторов, деление на число и переход к пределу производятся покоординатно. Выясним геометрический смысл вектора скорости. Разность $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ — это направляющий вектор прямой, проходящей через точку $\vec{r}(t_0)$ и близкую к ней точку $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$. Такая прямая называется *секущей* кривой γ в момент t_0 (см. рис. 2).

Вектор

$$\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

коллинеарен вектору $\Delta\vec{r}$ и потому также направлен вдоль секущей. Если его предел отличен от нуля, то он является направляющим вектором прямой, предельной для секущих, которую естественно назвать касательной. Если же этот предел равен нулю, то он не является направляющим вектором никакой прямой. Поэтому касательная к кривой γ в момент t_0 может не существовать (пример — кривая (4) в момент $t_0 = 0$), а может и существовать (пример — кривая (3) в момент $t_0 = 0$).

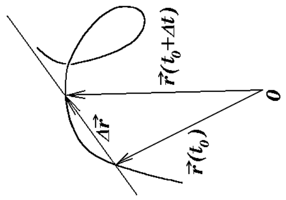

Рис. 2: Секущая с направляющим вектором $\Delta\vec r$

Определение. Кривая γ, заданная уравнением (1), называется *регулярной*, если вектор скорости $\vec r\,'(t) \neq \vec 0$. *Касательной* к регулярной кривой в момент времени $t_0 \in (a, b)$ называется прямая, проходящая через точку $\vec r(t_0)$ с направляющим вектором $\vec r\,'(t_0)$.

Регулярность есть свойство кривой, а не ее носителя: кривые (2) и (3) имеют один и тот же носитель, но первая из них регулярна, а вторая теряет регулярность при $t = 0$.

Так как регулярная кривая в любой момент времени имеет касательную, то ее носитель не имеет углов. Но он может иметь самопересечения.

Пример. Кривая $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданная уравнением

$$\vec r = \{t^2 - 1, t^3 - t\} \tag{5}$$

(см. рис. 3).

Эта кривая всюду регулярна, но ее носитель имеет самопересечение в точке $(0, 0)$, которая проходится дважды: при $t = -1$ и при $t = 1$. Вблизи начала координат носитель естественным образом распадается на две ветви, каждая из которых имеет свою касательную в точке $(0, 0)$: одна — с направляющим вектором $\vec r\,'(-1) = \{-2, 2\}$, а другая — с направляющим вектором $\vec r\,'(1) = \{2, 2\}$. Первая ветвь представляет собой носитель ограничения кривой γ на некоторую окрестность точки $t_1 = -1$, а вторая — носитель ограничения γ на окрестность точки $t_2 = 1$. Этот пример показывает, почему мы определяем касательную к *кривой в момент времени* $t_0 \in (a, b)$, а не к *ее носителю в точке* $\vec r(t_0) \in \mathbb{R}^2$: в точке $(0, 0)$ две ветви носителя имеют две разных касательных — одну при $t_1 = -1$, а другую — при $t_2 = 1$.

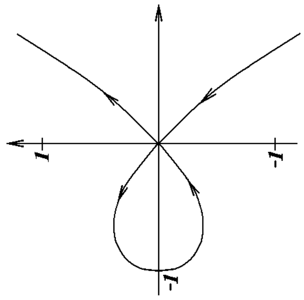

Рис. 3: Самопересекающаяся регулярная кривая

2 Эквивалентные кривые. Замена параметра

Основной интерес для геометрии представляют не сами гладкие кривые, а их носители, которые называются *линиями*. Одна и та же линия может иметь разные параметризации. Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ имеет хорошую (т.е. регулярную) параметризацию (2), а также плохую (нерегулярную) параметризацию (3). Наглядно это означает, что по окружности можно двигаться равномерно (согласно закону движения (2)), а можно, замедляя движение, остановиться в момент $t = 0$, а затем снова начать разгоняться (согласно (3)). Регулярность параметризации означает, что движение происходит без остановок (а потому и без возвращений назад, т.е. в определенном направлении). С точки зрения изучения формы линии естественно считать эквивалентными все движения по ней в одном и том же направлении, но с разной скоростью.

Определение. Гладкая кривая $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$, *эквивалентна* кривой $\gamma_1 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{r} = \vec{r}_1(\tau)$, если существует гладкое биективное отображение $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$, задаваемое уравнением $t = \varphi(\tau)$, для которого производная $\dot{\varphi}(\tau) > 0$, и $\vec{r}(\varphi(\tau)) \equiv \vec{r}_1(\tau)$. Отображение φ называется *заменой параметра*.

Упражнение. Проверьте, что отношение эквивалентности кривых обладает свойствами

1) рефлексивности: $\gamma \sim \gamma$,

2) симметричности: $\gamma \sim \gamma_1 \Longrightarrow \gamma_1 \sim \gamma$,

3) транзитивности: $\gamma \sim \gamma_1,\ \gamma_1 \sim \gamma_2 \Longrightarrow \gamma \sim \gamma_2$.

Указание. Эквивалентность $\gamma \sim \gamma$ реализуется заменой параметра $\varphi(t)=t$; если эквивалентность $\gamma\sim\gamma_1$ реализуется заменой $t=\varphi(\tau)$, то эквивалентность $\gamma_1\sim\gamma$ реализуется обратной заменой $\tau=\varphi^{-1}(t)$; если эквивалентность $\gamma\sim\gamma_1$ реализуется заменой $t=\varphi(\tau)$, а эквивалентность $\gamma_1\sim\gamma_2$ реализуется заменой $\tau=\psi(s)$, то эквивалентность $\gamma\sim\gamma_2$ реализуется сложной функцией $t=\varphi(\psi(s))$.

Определим *класс эквивалентности* кривой γ как множество всех кривых, эквивалентных ей: $[\gamma]=\{\gamma_1|\gamma_1\sim\gamma\}$. Из свойств отношения эквивалентности, установленных в последнем упражнении, следует, что два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются (докажите!). Класс эквивалентности кривых называется *ориентированной кривой.*

Упражнение. Проверьте следующие свойства эквивалентных кривых:

1) эквивалентные кривые имеют один и тот же носитель;

2) кривая, эквивалентная регулярной, сама регулярна;

3) векторы скорости эквивалентных регулярных кривых в соответствующих точках коллинеарны и потому определяют одну и ту же касательную.

3 Теорема о натуральной параметризации регулярной кривой

Одной из задач, приводящих к понятию определенного интеграла, является задача определения пройденного пути по скорости: длина пути есть интеграл от скорости по промежутку времени, в течение которого происходило движение. В принятой нами терминологии этот факт выражается следующим образом.

Пусть $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ — регулярная кривая, заданная уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in(a,b)$.

Определение. *Длиной* кривой γ от $t=t_0$ до $t=t_1$, где $a<t_0<t_1<b$, называется число

$$s(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}|\vec{r}\,'(t)|\,dt\,. \tag{6}$$

Эквивалентные параметризации носителя регулярной кривой — это движения по нему с разными скоростями, но в одном и том же направлении. Среди всех таких движений выделяются движения с постоянной скоростью, которую естественно принять за единицу скорости. Соответствующие параметризации называются натуральными.

Определение. Параметр t кривой γ, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, называется *натуральным*, если вектор скорости единичный: $|\vec{r}\,'(t)| \equiv 1$.

Интуитивно ясно, что по любой регулярной линии можно двигаться с единичной скоростью, при этом время движения численно равно пройденному пути. Точное выражение этого факта содержится в следующей теореме.

Теорема. Всякая регулярная кривая эквивалентна кривой с натуральным параметром. В качестве натурального параметра можно взять длину $s = s(t)$ кривой γ от фиксированного t_0 до переменного t:

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau\,. \tag{7}$$

Всякий натуральный параметр отличается от указанного прибавлением некоторой постоянной.

Доказательство. По теореме о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу производная функции (7) равна $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| > 0$ в силу регулярности γ. Поэтому $s(t)$ — возрастающая функция, и существует обратная функция $t = t(s)$, производная которой равна

$$\dot{t}(s) = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t(s))|} > 0\,.$$

Функция $t = t(s)$ является заменой параметра, осуществляющей эквивалентность исходной кривой γ и кривой γ_1, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t(s)) \equiv \vec{r}_1(s)$. Имеем

$$\dot{\vec{r}}_1(s) = \vec{r}\,'(t(s)) \cdot \dot{t}(s) = \frac{\vec{r}\,'(t(s))}{|\vec{r}\,'(t(s))|}\,,$$

так что $|\dot{\vec{r}}_1(s)| \equiv 1$, и s — натуральный параметр на γ_1.

Пусть теперь $\gamma \sim \gamma_1$, где γ_1: $\vec{r} = \vec{r}_1(s)$, s — натуральный параметр, $t = \varphi(s)$ — замена параметра. Вычислим интеграл (7):

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau = \left\| \begin{array}{c} \tau = \varphi(\sigma) \\ d\,\tau = \dot{\varphi}(\sigma)\, d\sigma \end{array} \right\| =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s} |\vec{r}\,'(\varphi(\sigma))| \dot{\varphi}(\sigma)\, d\sigma = \int\limits_{s_0}^{s} |\dot{\vec{r}}_1(\sigma)|\, d\sigma = \int\limits_{s_0}^{s} 1 \cdot d\sigma = s - s_0\,.$$

Отсюда $s = s(t) + s_0$, и теорема доказана.

4 Репер Френе. Кривизна и кручение, формулы Френе

Нам понадобится следующая лемма о производной единичного вектора.

Лемма. Пусть γ — гладкая кривая, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, причем $|\vec{r}(t)| \equiv 1$. Тогда:

1) вектор скорости $\vec{r}\,'(t)$ ортогонален $\vec{r}(t)$;

2) длина вектора скорости $\vec{r}\,'(t)$ равна угловой скорости $\omega(t)$ вращения вектора $\vec{r}(t)$ (определение угловой скорости см. в доказательстве).

Доказательство. 1) Дифференцируя тождество $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$, получим $(\vec{r}, \vec{r})\,' = (\vec{r}\,', \vec{r}) + (\vec{r}, \vec{r}\,') = 2(\vec{r}\,', \vec{r}) = 0 \iff \vec{r}\,' \perp \vec{r}$.

2) Определим угловую скорость вращения единичного вектора $\vec{r}(t)$ в момент t равенством

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| ,$$

где $\Delta\varphi$ — угол между векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t + \Delta t)$. Имеем

$$|\vec{r}\,'(t)| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| .$$

Так как $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t + \Delta t)$ — единичные векторы, то $|\Delta\vec{r}| = 2 \sin \dfrac{|\Delta\varphi|}{2}$, откуда

$$|\vec{r}\,'(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \sin \frac{|\Delta\varphi|}{2}}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \frac{|\Delta\varphi|}{2}}{\frac{|\Delta\varphi|}{2}} \cdot \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = 1 \cdot \omega(t) .$$

Начиная с этого места, мы ограничиваемся кривыми в трехмерном пространстве. Пусть γ — регулярная кривая. Параметризуем ее натуральным параметром s: $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Из определения натурального параметра следует, что вектор скорости $\tau(s) = \dot{\vec{r}}(s)$ является единичным касательным вектором кривой γ в момент s. Рассмотрим его производную — вектор ускорения $\ddot{\vec{r}}(s)$. Длина этого вектора, т.е. величина ускорения $k(s) = |\ddot{\vec{r}}(s)|$, называется *кривизной* кривой γ в момент s. По лемме о производной единичного вектора $\ddot{\vec{r}}(s) \perp \dot{\vec{r}}(s)$, т.е. ускорение ортогонально скорости точки (и ее перемещению). Такое ускорение в школьном курсе физики называется *центростремительным*. По этой же лемме $|\ddot{\vec{r}}(s)|$, есть угловая скорость вращения вектора $\dot{\vec{r}}(s)$. Таким образом, мы можем понимать кривизну в любом из двух возможных смыслов: во-первых, $k(s)$ есть центростремительное ускорение точки, движущейся по кривой с единичной скоростью; во-вторых, $k(s)$ есть угловая скорость вращения касательной к γ в момент s.

Определение. Кривая γ называется *бирегулярной*, если $k(s) > 0$.

Для бирегулярной кривой можно определить вектор $\vec{\nu}(s) = \dfrac{\dot{\vec{\tau}}(s)}{k(s)}$. Так как $\vec{\nu}(s) \parallel \dot{\vec{\tau}}(s)$, а $\dot{\vec{\tau}}(s) \perp \vec{\tau}(s)$, то $\vec{\nu}(s) \perp \vec{\tau}(s)$, т.е. вектор $\vec{\nu}(s)$ ортогонален касательной. Кроме того, $|\vec{\nu}(s)| \equiv 1$. Поэтому $\vec{\nu}(s)$ называется *единичным вектором главной нормали*. Пару единичных ортогональных векторов $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$ можно дополнить до правого ортонормированного репера в точке $\vec{r}(s)$ при помощи вектора $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$, где квадратные скобки обозначают векторное произведение. $\vec{\beta}(s)$ называется *единичным вектором бинормали* (т.е. второй нормали; первая, она же главная, задается вектором $\vec{\nu}(s)$). Репер $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ в точке $\vec{r}(s)$ называется *сопровождающим репером* или *репером Френе* кривой γ при значении параметра, равном s. Заметим, что в случае, когда γ не является инъективным отображением, одна и та же точка $\vec{r}(s)$ может соответствовать *различным* значениям s, и реперы Френе при этих значениях параметра могут быть различными, хотя приложены они в одной и той же точке $\vec{r}(s)$.

При движении точки по кривой (с единичной скоростью, т.к. параметр s натурален) репер Френе вращается вокруг точки своего приложения $\vec{r}(s)$. Количественное описание этого вращения содержат *формулы Френе*, к выводу которых мы приступаем. Чтобы не загромождать формул, параметр s в них опускаем.

Определение вектора $\vec{\nu}$ можно записать в виде $\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$. Это — первая из формул Френе. Остальные устроены так же: они выражают производные векторов репера Френе через сами эти векторы. Выразим $\dot{\vec{\beta}}$ через $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$. По лемме о производной единичного вектора $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$. Так как $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$, то $\dot{\vec{\beta}} = [\dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}}]$. Вектор $\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$ коллинеарен $\vec{\nu}$, поэтому их векторное произведение равно нулю, и $\dot{\vec{\beta}} = [\vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}}] \perp \vec{\tau}$. Так как $\dot{\vec{\beta}}$ ортогонален $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$, то он коллинеарен (т.е. пропорционален) вектору $\vec{\nu}$. Коэффициент пропорциональности обозначается $-\varkappa$ ($\varkappa$ — греческая буква "каппа"), а величина $\varkappa = \varkappa(s)$ называется *кручением* кривой γ в точке s. Таким образом, вторая формула Френе имеет вид $\dot{\vec{\beta}} = -\varkappa\vec{\nu}$.

Выясним геометрический смысл кручения. Взяв модули обеих частей последнего равенства, получим $|\varkappa| = |\dot{\vec{\beta}}|$, где $|\dot{\vec{\beta}}|$ согласно лемме о производной единичного вектора есть угловая скорость вращения вектора $\vec{\beta}$, который является единичным нормальным вектором плоскости, натянутой на $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$. Эта плоскость называется *соприкасающейся* плоскостью кривой γ в точке s. Поэтому абсолютная величина кручения равна угловой скорости вращения соприкасающейся плоскости. Знак кручения выбран из того соображения, чтобы правый винт имел положительное кручение.

Для вывода последней формулы Френе заметим, что $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$, откуда $\dot{\vec{\nu}} = [\dot{\vec{\beta}}, \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, \dot{\vec{\tau}}] = -\varkappa[\vec{\nu}, \vec{\tau}] + k[\vec{\beta}, \vec{\nu}] = \varkappa\vec{\beta} - k\vec{\tau}$.

Выпишем все три формулы Френе вместе, причем одноименные векторы репера Френе будем писать один под другим:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} & = & & k\vec{\nu} & \\ \dot{\vec{\nu}} & = & -k\vec{\tau} & & +\varkappa\vec{\beta} \\ \dot{\vec{\beta}} & = & & -\varkappa\vec{\nu} & . \end{cases}$$

Координатные плоскости репера Френе, отличные от соприкасающейся, также имеют собственные названия. Плоскость, натянутая на векторы $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$, называется *нормальной* плоскостью кривой в данной точке, потому что кривая (т.е. ее касательная) перпендикулярна этой плоскости. Плоскость, натянутая на $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$, называется *спрямляющей*.

5 Вычисление элементов репера Френе, кривизны и кручения при произвольной параметризации кривой

Пусть γ: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — регулярная кривая. *Кривизной* этой кривой в момент t называется кривизна эквивалентной ей кривой γ_1: $\vec{r} = \vec{r}_1(s)$ с натуральным параметром s при соответствующем значении $s = s(t)$. Так как произвол во введении натурального параметра ограничен прибавлением к нему постоянной, то кривизна γ, определенная при помощи любой кривой γ_1 с натуральным параметром, эквивалентной γ, будет одна и та же. В частности, корректно определено свойство необращения кривизны γ в нуль, т.е. бирегулярности γ, а для бирегулярной кривой корректно определены репер Френе в любой точке и кручение. Во многих задачах важно уметь находить оси, координатные плоскости и базисные векторы репера Френе прямо по исходной параметризации, не вводя натурального параметра. Покажем, как это делается.

Прежде всего напомним уравнения прямой и плоскости, известные из курса аналитической геометрии. Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) с направляющим вектором $\vec{l} = \{a, b, c\}$, может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} X &= & x_0 & + & \lambda a, \\ Y &= & y_0 & + & \lambda b, \\ Z &= & z_0 & + & \lambda c, \end{cases}$$

где $\vec{R} = \{X, Y, Z\}$ — радиус-вектор произвольной точки, а λ — параметр на прямой (буква t у нас занята в качестве параметра на кривой γ).

Плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) с нормальным вектором $\vec{N} = \{A, B, C\}$, задается общим уравнением

$$A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0) = 0\ .$$

Пусть γ: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — регулярная кривая. Касательная к ней в момент t_0 проходит через точку $\vec{r}(t_0) = \{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\}$ с направляющим вектором $\vec{r}\,'(t_0)$. Поэтому параметрические уравнения *касательной* имеют вид

$$\begin{cases} X &= & x(t_0) & + & \lambda x'(t_0), \\ Y &= & y(t_0) & + & \lambda y'(t_0), \\ Z &= & z(t_0) & + & \lambda z'(t_0). \end{cases}$$

Вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ является также нормальным вектором для *нормальной плоскости*, поэтому ее уравнение имеет вид

$$(X - x(t_0))x'(t_0) + (Y - y(t_0))y'(t_0) + (Z - z(t_0))z'(t_0) = 0\ .$$

Для нахождения единичного касательного вектора $\vec{\tau}$ поступим следующим образом. Пусть $s = s(t)$ — длина дуги (7), γ_1: $\vec{r} = \vec{r}_1(s) = \vec{r}(t(s))$ — кривая с натуральным параметром, эквивалентная γ. Тогда $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(s(t))$, откуда $\vec{r}\,' = \dot{\vec{r}}_1 \cdot s' = \dot{\vec{r}}_1 \cdot |\vec{r}\,'|$, и

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}\ . \tag{8}$$

Точно так же для любой векторной функции $\vec{f}_1(s)$ и функции $\vec{f}(t) = \vec{f}_1(s(t))$, полученной из нее заменой параметра, получим $\vec{f}\,' = \dot{\vec{f}}_1 \cdot s' = \dot{\vec{f}}_1 \cdot |\vec{r}\,'|$, откуда

$$\dot{\vec{f}}_1 = \frac{\vec{f}\,'}{|\vec{r}\,'|}\ .$$

Применив эту формулу к функции $\vec{f}_1 = \dot{\vec{r}}_1$, получим

$$\ddot{\vec r}_1=\frac{\left(\dot{\vec r}_1\right)'}{|\vec r\,'|}=\frac{1}{|\vec r\,'|}\left(\frac{\vec r\,'}{|\vec r\,'|}\right)'=\frac{\vec r\,''|\vec r\,'|-\vec r\,'(|\vec r\,'|)'}{|\vec r\,'|^3}\ .$$

Имеем

$$(|\vec r\,'|)'=\frac{d}{dt}\left({x'}^2+{y'}^2+{z'}^2\right)^{\frac12}=\frac12\left({x'}^2+{y'}^2+{z'}^2\right)^{-\frac12}(2xx'+2yy'+2zz')=$$

$$=\frac{(\vec r\,',\vec r\,'')}{|\vec r\,'|}\ ,\quad \text{откуда}\quad \ddot{\vec r}_1=\frac{\vec r\,''}{|\vec r\,'|^2}-\frac{(\vec r\,',\vec r\,'')}{|\vec r\,'|^4}\vec r\,'\ . \qquad (9)$$

Из равенства (9) вытекают важные следствия.

Следствие 1 (новое определение бирегулярной кривой). Кривая γ: $\vec r=\vec r(t)$ бирегулярна $\Longleftrightarrow$ векторы $\vec r\,'$ и $\vec r\,''$ линейно независимы.

Доказательство ($\Longleftarrow$). Если $\vec r\,'$ и $\vec r\,''$ линейно независимы, то, в частности, $\vec r\,'\neq\vec 0$, и справедлива формула (9). Если $\ddot{\vec r}_1=\vec 0$, то эта формула дает линейную зависимость между $\vec r\,'$ и $\vec r\,''$, что противоречит условию. Поэтому $\ddot{\vec r}_1\neq\vec 0\Longrightarrow k=|\ddot{\vec r}_1|>0$.

Доказательство ($\Longrightarrow$). Бирегулярность γ означает, что $\vec r\,'\neq\vec 0$ (чтобы можно было ввести натуральный параметр) и $k=|\ddot{\vec r}_1|>0$. Если $\vec r\,'$ и $\vec r\,''$ линейно зависимы, то найдутся числа α, β, не равные одновременно нулю, для которых $\alpha\vec r\,'+\beta\vec r\,''=\vec 0$. При этом $\beta\neq 0$, иначе из последнего равенства следовало бы, что $\alpha\vec r\,'=\vec 0$, но $\vec r\,'\neq\vec 0$ по условию, а $\alpha\neq 0$, поскольку в противном случае α и β обращались бы в нуль одновременно. Поэтому $\vec r\,''$ линейно выражается через $\vec r\,'$:

$$\vec r\,''=-\frac{\alpha}{\beta}\vec r\,'=\lambda\vec r\,'\ .$$

Подставив это выражение в равенство (9), получим $\ddot{\vec r}_1=\vec 0$, что противоречит бирегулярности γ.

Следствие 2 (новое определение соприкасающейся плоскости). Соприкасающаяся плоскость бирегулярной кривой есть плоскость, натянутая на векторы $\vec r\,'$ и $\vec r\,''$.

Доказательство. По следствию 1 векторы $\vec r\,'$ и $\vec r\,''$ линейно независимы и потому однозначно определяют некоторую плоскость Π. Из (8) и (9) следует, что векторы $\vec\tau=\dot{\vec r}_1$ и $\vec\nu=\dfrac1k\ddot{\vec r}_1$ лежат в плоскости Π, поэтому натянутая на них соприкасающаяся плоскость содержится в плоскости Π и, следовательно, совпадает с ней.

Из следствия 2 вытекает, что в качестве нормального вектора к *соприкасающейся плоскости* можно взять векторное произведение $[\vec r\,'(t_0),\vec r\,''(t_0)]$. Этот же вектор является направляющим для прямой, ортогональной соприкасающейся плоскости, т.е. для *бинормали*.

Упражнение. Напишите уравнения бинормали и соприкасающейся плоскости.

Для вычисления кривизны найдем векторное произведение $[\dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1]$ двумя способами: по формулам Френе и по формулам (8) — (9). Имеем

$$[\dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1] = [\vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}}] = [\vec{\tau}, k\vec{\nu}] = k[\vec{\tau}, \vec{\nu}] = k\vec{\beta} \ ,$$

$$[\dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1] = \left[\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}, \ \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'|^2} - \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')}{|\vec{r}\,'|^4}\vec{r}\,'\right] = \frac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']}{|\vec{r}\,'|^3}, \quad \text{откуда} \quad k\vec{\beta} = \frac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']}{|\vec{r}\,'|^3} \ . \tag{10}$$

Взяв модули обеих частей последнего равенства, получим

$$k = \frac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3} \ .$$

Подстановка этого значения кривизны в (10) дает $\quad \vec{\beta} = \dfrac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}$.

Конечно, с точностью до знака эта формула очевидна, т.к. выше уже было отмечено, что вектор $[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']$ направлен по бинормали. Так как *главная нормаль* ортогональна бинормали и касательной, то в качестве ее направляющего вектора можно взять векторное произведение $[[\vec{r}\,', \vec{r}\,''], \vec{r}\,']$. Этот же вектор является нормальным для *спрямляющей плоскости.*

Упражнение. Напишите уравнения главной нормали и спрямляющей плоскости.

Зная векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$, можно без труда найти единичный вектор главной нормали $\vec{\nu}$:

$$\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}] = \left[\frac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}, \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}\right] = \frac{[[\vec{r}\,', \vec{r}\,''], \vec{r}\,']}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']||\vec{r}\,'|} \ .$$

Заметим, что знаменатель равен модулю вектора, стоящего в числителе, т.к. натянутый на векторы $[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']$ и $\vec{r}\,'$ параллелограмм является прямоугольником, и его площадь равна произведению длин сторон. Поэтому справедливость последней формулы для $\vec{\nu}$ с точностью до знака очевидна.

Для вычисления кручения будет полезна формула для третьей производной $\dddot{\vec{r}}_1$, аналогичная (8) и (9).

Упражнение. Выведите формулу вида

$$\dddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,'|^3} + \lambda\vec{r}\,'' + \mu\vec{r}\,' \ . \tag{11}$$

Чему равны λ и μ ?

Далее поступаем так же, как при вычислении кривизны: находим выражения для смешанного произведения $\langle \dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1, \dddot{\vec{r}}_1 \rangle$ по формулам Френе и по формулам (8), (9), (11), а затем приравниваем их. Используя выражение (11) для $\dddot{\vec{r}}_1$, получим

$$\langle \dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1, \dddot{\vec{r}}_1 \rangle = \langle \vec{\tau}, k\vec{\nu}, -k^2\vec{\tau} + \dot{k}\vec{\nu} + k\varkappa\vec{\beta} \rangle = k^2\varkappa \langle \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta} \rangle = k^2\varkappa \ ,$$

$$\langle \dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1, \dddot{\vec{r}}_1 \rangle = \left\langle \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}, \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'|^2} - \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')}{|\vec{r}\,'|^4}\vec{r}, \frac{\vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,'|^3} + \lambda\vec{r}\,'' + \mu\vec{r}\,' \right\rangle = \frac{\langle \vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''' \rangle}{|\vec{r}\,'|^6},$$

откуда

$$k^2\varkappa = \frac{\langle \vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''' \rangle}{|\vec{r}\,'|^6} \ .$$

Подставляя сюда известное значение кривизны, получим

$$\varkappa = \frac{\langle \vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''' \rangle}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2} \ .$$

Важный частный случай: если $t = s$ — натуральный параметр, то кручение выражается по формуле

$$\varkappa = \frac{\langle \dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1, \dddot{\vec{r}}_1 \rangle}{k^2} = \frac{\langle \dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1, \dddot{\vec{r}}_1 \rangle}{|\ddot{\vec{r}}_1|^2} \ .$$

Выведенные выше громоздкие формулы учить наизусть не нужно. Достаточно запомнить формулы для кривизны и кручения, а также тот геометрический факт, что вектор $\vec{r}\,'$ направлен по касательной, а вектор $[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']$ — по бинормали. Направление главной нормали, ортогональное этим векторам, можно получить, взяв их векторное произведение. Этого уже достаточно, чтобы написать уравнения трех координатных прямых и трех координатных плоскостей репера Френе, а также найти единичные векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$.

Рассмотрим типичную задачу на отыскание элементов репера Френе.

Задача. Найти координатные оси, плоскости, базисные векторы репера Френе кривой $\vec{r} = \{2t, \ln t, t^2\}$ в точке $P_0(2, 0, 1)$, а также ее кривизну и кручение в произвольной точке.

Решение. Сначала найдем значение параметра t_0, соответствующее точке P_0, из системы

$$\begin{cases} 2t_0 &= 2, \\ \ln t_0 &= 0, \\ {t_0}^2 &= 1, \end{cases}$$

откуда $t_0 = 1$. Далее вычисляем $\vec{r}\,'(t) = \left\{2, \frac{1}{t}, 2t\right\}$, $\vec{r}\,'(1) = \{2, 1, 2\}$.
Этого уже достаточно, чтобы написать уравнения касательной

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} X & = & 2 & + & 2\lambda \\ Y & = & & & \lambda \\ Z & = & 1 & + & 2\lambda \end{array}\right.$$

и нормальной плоскости: $2(X-2) + Y + 2(Z-1) = 0$. Так как

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + (2t)^2} = \sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}} = \frac{2t^2+1}{t}, \quad |\vec{r}\,'(1)| = 3\,,$$

то единичный касательный вектор равен $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{r}\,'(1)}{|\vec{r}\,'(1)|} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.
Далее,

$$\vec{r}\,''(t) = \left\{0, -\frac{1}{t^2}, 2\right\}, \quad \vec{r}\,''(1) = \{0, -1, 2\}\,,$$

$$[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)] = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & -\frac{1}{t^2} & 2 \end{vmatrix} = \left\{\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}\right\}, \quad [\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1)] = \{4, -4, -2\}\,.$$

Этого достаточно, чтобы написать уравнения бинормали

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} X & = & 2 & + & 4\lambda \\ Y & = & & - & 4\lambda \\ Z & = & 1 & - & 2\lambda \end{array}\right.$$

и соприкасающейся плоскости: $4(X-2) - 4Y - 2(Z-1) = 0$. Так как

$$|[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)]| = \sqrt{\left(\frac{4}{t}\right)^2 + (-4)^2 + \left(-\frac{2}{t^2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^4}} = \frac{2(2t^2+1)}{t^2}\,,$$

то $|[\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1)]| = 6$, и единичный вектор бинормали равен

$$\vec{\beta} = \frac{[\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1)]}{|[\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1)]|} = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}\,.$$

Кривизна в любой точке вычисляется по формуле

$$k = \frac{|[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)]|}{|\vec{r}\,'(t)|^3} = \frac{2(2t^2+1)}{t^2} : \left(\frac{2t^2+1}{t}\right)^3 = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}\,.$$

Для отыскания главной нормали вычислим

$$[[\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t)],\vec{r}\,'(t)] = \begin{vmatrix} \frac{4}{t} & -4 & -\frac{2}{t^2} \\ 2 & \frac{1}{t} & 2t \end{vmatrix} = \left\{-8t+\frac{2}{t^3}, -8-\frac{4}{t^2}, \frac{4}{t^2}+8\right\},$$

$$[[\vec{r}\,'(1),\vec{r}\,''(1)],\vec{r}\,'(1)] = \{-6,-12,12\}\ .$$

Этого достаточно, чтобы написать уравнения главной нормали

$$\begin{cases} X &= 2 - 6\lambda \\ Y &= \quad - 12\lambda \\ Z &= 1 + 12\lambda \end{cases}$$

и спрямляющей плоскости: $\quad -6(X-2)-12Y+12(Z-1)=0.\quad$ Так как

$$|[[\vec{r}\,'(1),\vec{r}\,''(1)],\vec{r}\,'(1)]| = 18\ ,$$

то единичный вектор главной нормали равен

$$\vec{\nu} = \frac{[[\vec{r}\,'(1),\vec{r}\,''(1)],\vec{r}\,'(1)]}{|[[\vec{r}\,'(1),\vec{r}\,''(1)],\vec{r}\,'(1)]|} = \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}\ .$$

Для отыскания кручения нужно вычислить $\vec{r}\,'''(t) = \left\{0, \frac{2}{t^3}, 0\right\}$, а затем — смешанное произведение $\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'''\rangle = ([\vec{r}\,',\vec{r}\,''],\vec{r}\,''')$, где оба множителя в скалярном произведении уже известны:

$$\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'''\rangle = \frac{4}{t}\cdot 0 - 4\cdot\frac{2}{t^3} - \frac{2}{t^2}\cdot 0 = -\frac{8}{t^3}\ .$$

Тогда

$$\varkappa = \frac{\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'''\rangle}{|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|^2} = -\frac{8}{t^3} : \left(\frac{2(2t^2+1)}{t^2}\right)^2 = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2}\ .$$

В заключение — несколько практических замечаний.

1). При первой же возможности подставляйте в координаты векторов значение t_0, чтобы они были *числами*, а не сложными выражениями, содержащими t. Оперировать с числовыми векторами намного проще.

2). Направляющие векторы прямых и нормальные векторы плоскостей нужны *с точностью до пропорциональности*, поэтому в них можно выносить общие множители координат и сокращать на них, т.е. просто игнорировать их.

3). Смешанное произведение не следует вычислять как определитель, а только как *скалярное произведение* векторов $[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']$ и $\vec{r}\,'''$, которые к моменту вычисления кручения уже известны.

ПРОБНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ВАРИАНТ №1

1. Найдите спрямляющую плоскость и вектор $\vec{\beta}$ для кривой

$$\vec{r} = \{e^t \cos t, e^t \sin t, e^t\}$$

в точке $P_0(1, 0, 1)$ и её кручение в любой точке.

ВАРИАНТ №2

1. Найдите нормальную плоскость и бинормаль кривой

$$\vec{r} = \left\{t, \frac{t^3}{3}, \frac{1}{2t}\right\}$$

в точке $P_0\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ и её кривизну в любой точке.

ВАРИАНТ №3

1. Найдите соприкасающуюся плоскость и вектор $\vec{\nu}$ для кривой

$$\vec{r} = \{t^2, 1 - t, t^3\}$$

в точке $P_0(1, 0, 1)$ и её кручение в любой точке.

ВАРИАНТ №4

1. Найдите бинормаль и вектор $\vec{\nu}$ для кривой

$$\vec{r} = \{2t, \ln t, t^2\}$$

в точке $P_0(2, 0, 1)$ и её кривизну в любой точке.

ВАРИАНТ №5

1. Найдите соприкасающуюся плоскость и вектор $\vec{\nu}$ для кривой

$$\vec{r} = \left\{t, \frac{t^3}{3}, \frac{1}{2t}\right\}$$

в точке $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{24}, 1\right)$ и её кручение в любой точке.

ВАРИАНТ №6

1. Найдите спрямляющую плоскость и вектор $\vec{\beta}$ для кривой

$$\vec{r} = \{t^2, 1-t, t^3\}$$

в точке $P_0(1, 2, -1)$ и её кривизну в любой точке.

ОТВЕТЫ: (по модулю 6)

1. Спрямляющая плоскость $-(x-1)+y=0$.
Вектор $\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{-1,-1,2\}$. Кручение $\kappa = -\frac{1}{3e^t}$.

2. Нормальная плоскость $2(x-1)+2(y-\frac{1}{3})-(z-\frac{1}{2})=0$.
Бинормаль

$$\left\{\begin{array}{ccccc} X & = & 1 & + & 2\lambda \\ Y & = & \frac{1}{3} & - & \lambda \\ Z & = & \frac{1}{2} & + & 2\lambda \end{array}\right.$$

Кривизна $k = \frac{8t^3}{(2t^4+1)^2}$.

3. Соприкасающаяся плоскость $3(x-1)+3y-(z-1)=0$.
Вектор $\vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{266}}\{-8,11,9\}$. Кручение $\kappa = \frac{3}{1+9t^2+9t^4}$.

4. Бинормаль

$$\begin{cases} X &= 2 + 2\lambda \\ Y &= - 2\lambda \\ Z &= 1 - \lambda \end{cases}$$

Вектор $\vec{\nu} = \dfrac{1}{3}\{-1,-2,2\}$. Кривизна $k = \dfrac{2t}{(2t^2+1)^2}$.

5. Соприкасающаяся плоскость $4(x-\frac{1}{2}) - 8(y - \frac{1}{24}) + (z+1) = 0$.
Вектор $\vec{\nu} = \dfrac{1}{9}\{7,4,4\}$. Кручение $\kappa = -\dfrac{8t^3}{(2t^4+1)^2}$.

6. Спрямляющая плоскость $8(x-1) + 11(y-2) + 9(z+1) = 0$.
Вектор $\vec{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{19}}\{3,-3,1\}$. Кривизна $k = \dfrac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^2}$.