

**Замкнутость класса
регулярных языков
относительно операций **дополнения,**
объединения и пересечения, катенации
и итерации, реверса, морфизмов,
замыканий относительно префиксов,
суффиксов, подслов
Проверка на изоморфность двух ДКА**

Алгоритмы построения ДКА

Направление: Математика и компьютерные науки

ДММИКН ИЕНИМ

Преподаватель: к.ф-м.н., доцент **Нагребцкая Ю.В.**

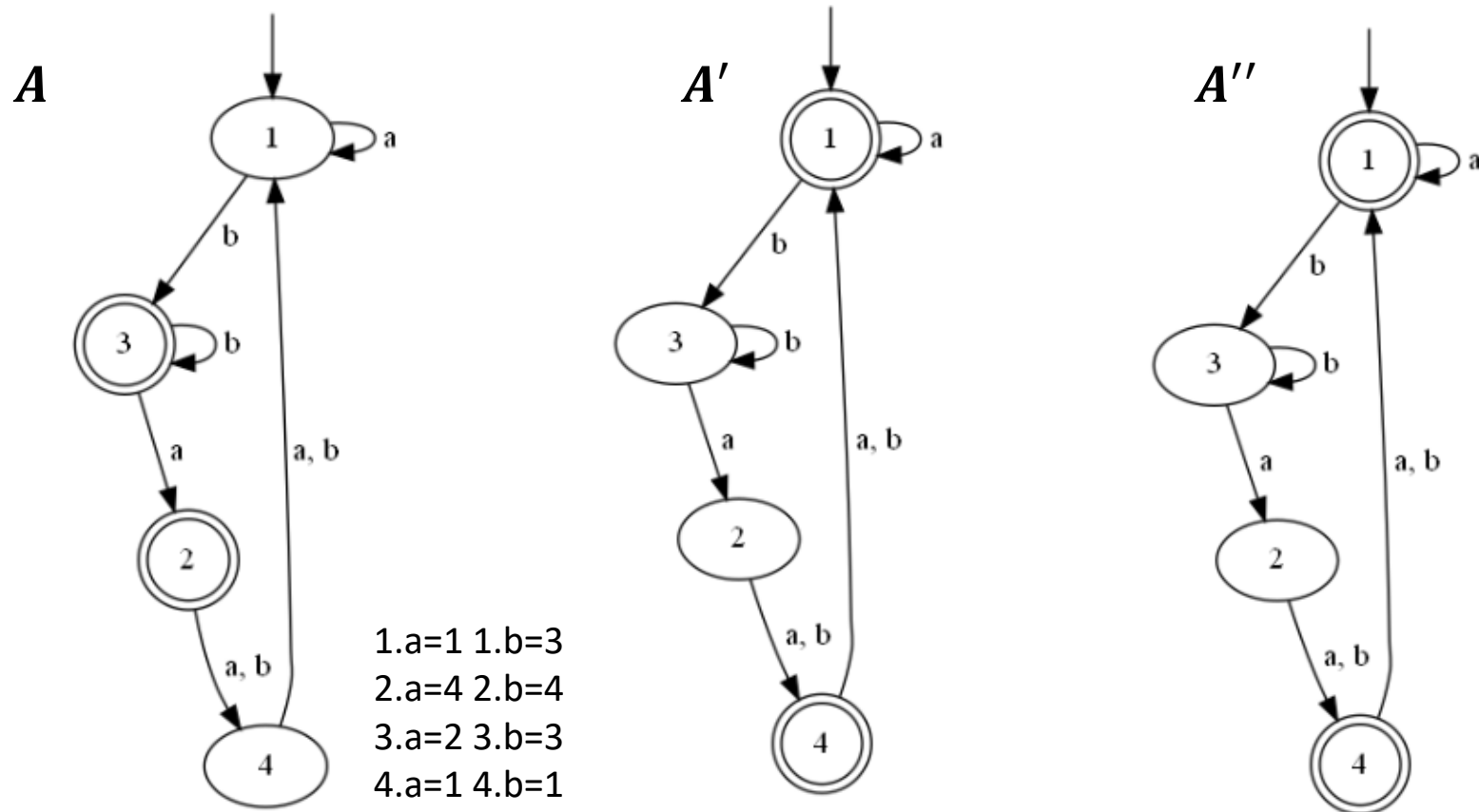
2025г.



Алгоритм построения ДКА для дополнения $\bar{L}$ языка L

- 1) По данному ДКА A строим ДКА A' , распознающий **дополнение** $\bar{L}$ языка $L = L(A)$. Для этого все не заключительные вершины автомата A делаем заключительными, а все заключительные вершины автомата A делаем неключительными.
- 2) По полученному ДКА A' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'' , распознающий тот же язык.

Пример 1 построения ДКА для дополнения $\bar{L}$ языка L



Построение ДКА для пересечения [объединения] двух языков при помощи декартового произведения ДКА

Сначала построим автоматы, распознающие каждый язык:

Пусть у первого автомата A_1 :

всего n состояний: $q_0, q_1, \dots, q_n$

F_1 - множество заключительных состояний

Пусть у второго автомата A_2 :

всего k состояний: $p_0, p_1, \dots, p_k$

F_2 - множество заключительных состояний

Тогда у искомого автомата A всего nk состояний, каждое из которых задается парой (q_i, p_i) :

$(q_0, p_0), (q_0, p_1), \dots, (q_0, p_k)$

$(q_1, p_0), (q_1, p_1), \dots, (q_1, p_k)$

...

$(q_n, p_0), (q_n, p_1), \dots, (q_n, p_k)$

Построение ДКА для пересечения [объединения] двух языков при помощи декартового произведения ДКА

Функция переходов нового автомата задается как: $\delta((q_i, p_j), a) = (\delta(q_i, a), \delta(p_j, a))$

т.е. например: $\delta(q_0, a) = q_1$; $\delta(p_0, a) = p_1$

Тогда: $\delta((q_0, p_0), a) = (q_1, p_1)$

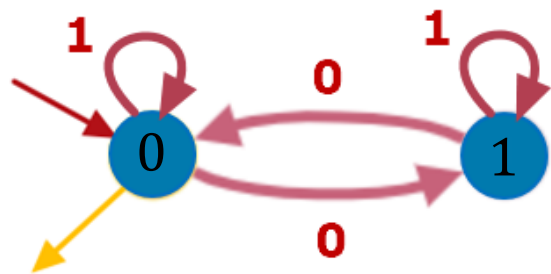
Различия между автоматами, распознающими пересечение и объединение, лишь во множестве заключительных состояний:

В случае пересечения состояние (q_i, p_j) будет заключительным, т. и т. т. к. $q_i \in F_1$ **и** $q_2 \in F_2$

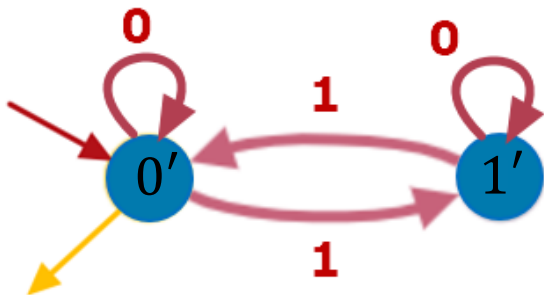
В случае объединения состояние (q_i, p_j) будет заключительным, т. и т. т. к. $q_i \in F_1$ **или** $q_2 \in F_2$

Пример 2 построения ДКА для для пересечения языков L_1 и L_2

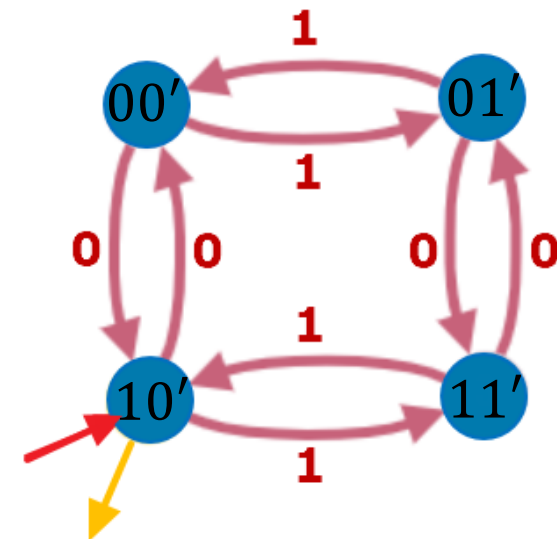
Построить приведенный автомат A , распознающий множество L бинарных слов с четным числом нулей и единиц.



Автомат A_1 , распознающий множество L_1 бинарных слов с четным числом нулей.



Автомат A_2 , распознающий множество L_2 бинарных слов с четным числом единиц.



Автомат A , распознающий множество L бинарных слов с четным числом нулей и единиц.

Алгоритм построения ДКА для катенации языков L_1 и L_2

- 1) Пусть A_1, A_2 — два ДКА, допускающие языки $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$.
- 2) Убираем из данных ДКА A_1, A_2 все недостижимые состояния и те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в обоих автоматах останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автоматы A_1 или A_2 допускают пустой язык, а значит, $L = L_1 \cdot L_2 = \emptyset$. Получаем НКА (неполные ДКА) A'_1, A'_2 , распознающие те же языки L_1, L_2 .
- 3) По НКА $A'_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1), A'_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ построим НКА $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, допускающий язык $L = L_1 \cdot L_2$

Положим $Q = Q_1 \cup Q_2, q_0 = q_0^1, F = F_2$.

Положим $\delta(q_1, a) = \delta_1(q_1, a)$ для всех $q_1 \in Q_1$ и $a \in \Sigma$.

Положим $\delta(q_2, a) = \delta_2(q_2, a)$ для всех $q_2 \in Q_2$ и $a \in \Sigma$.

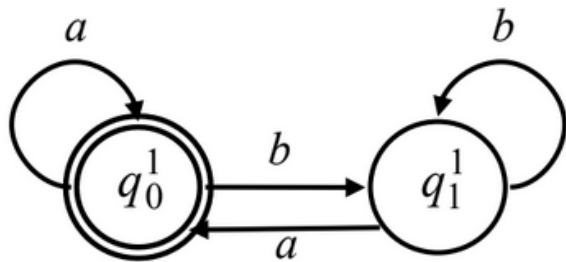
Положим $\delta(f, a) = \delta(q_0^2, a)$ для всех $f \in F_1$ и $a \in \Sigma$.

Алгоритм построения ДКА для катенации языков L_1 и L_2

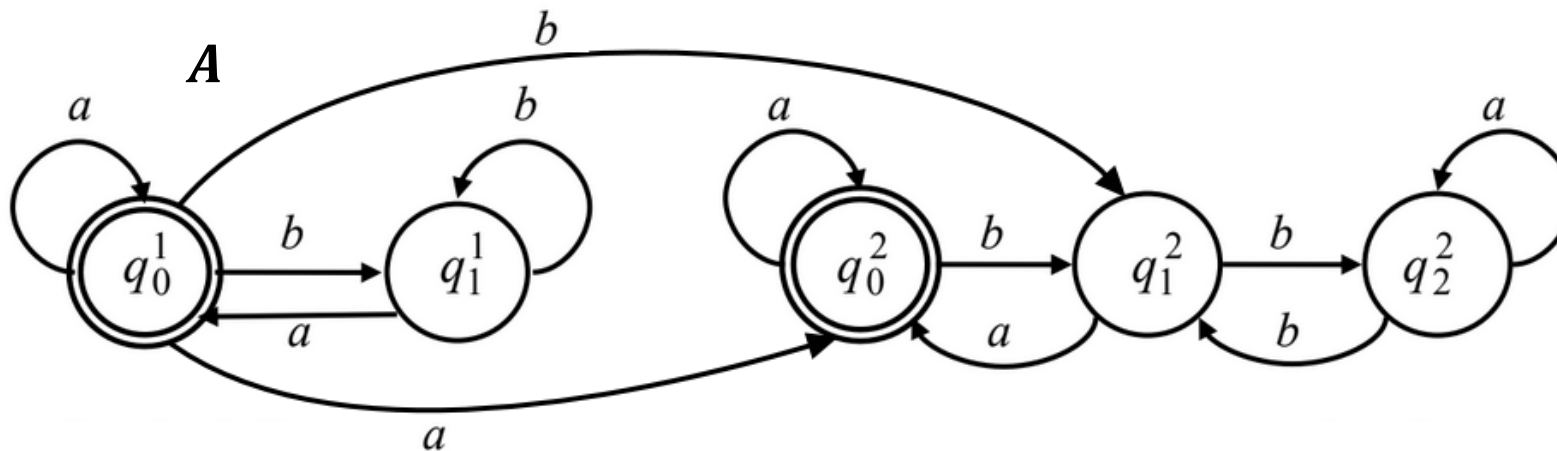
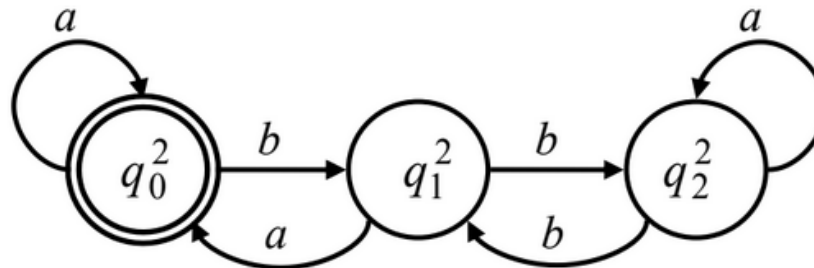
- 3) По полученному НКА A строим эквивалентный ДКА A' , распознающий тот же язык L .
- 4) По полученному ДКА A' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'' , распознающий язык L .

Пример 3 построения ДКА для для катенации
языков L_1 и L_2

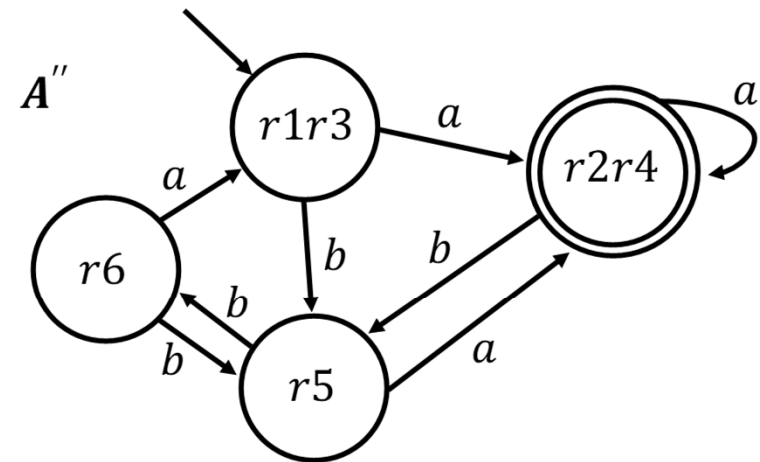
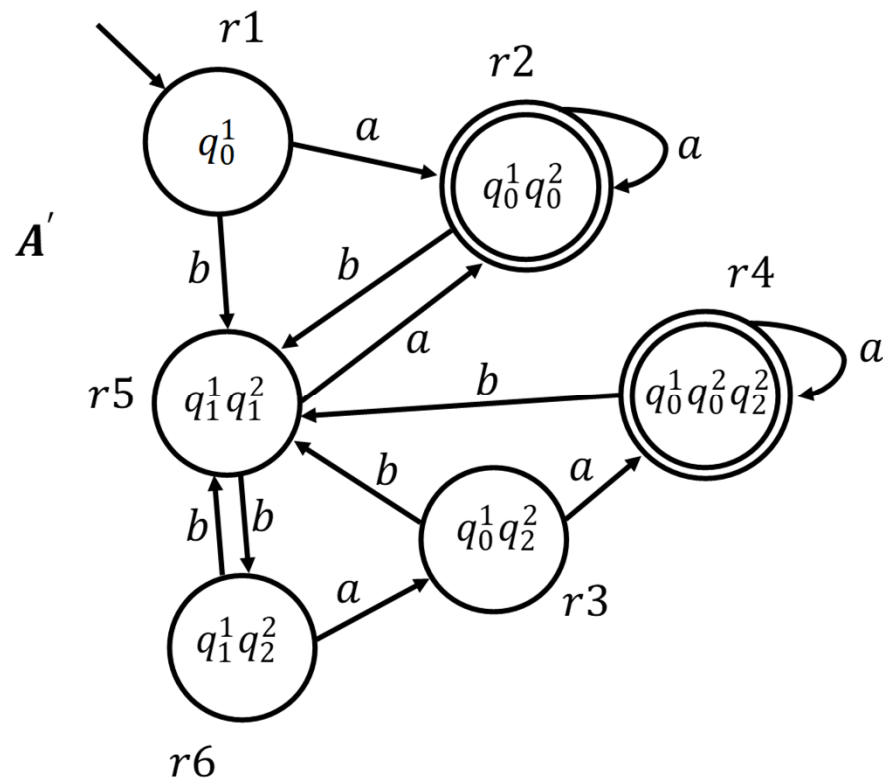
$A_1 = A'_1$



$A_2 = A'_1$



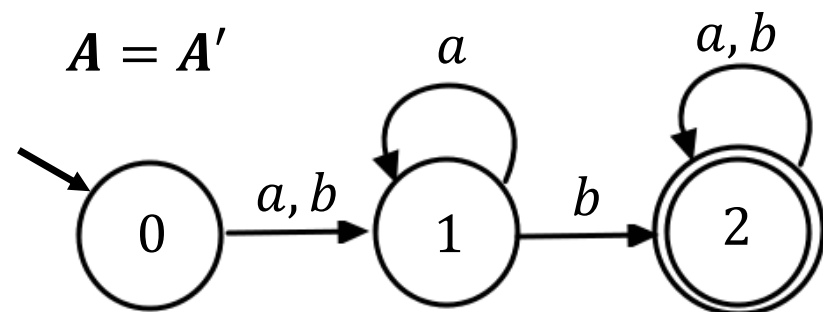
Пример 3 построения ДКА для для катенации языков L_1 и L_2 (продолжение)



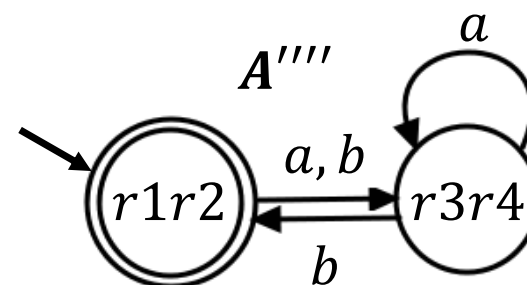
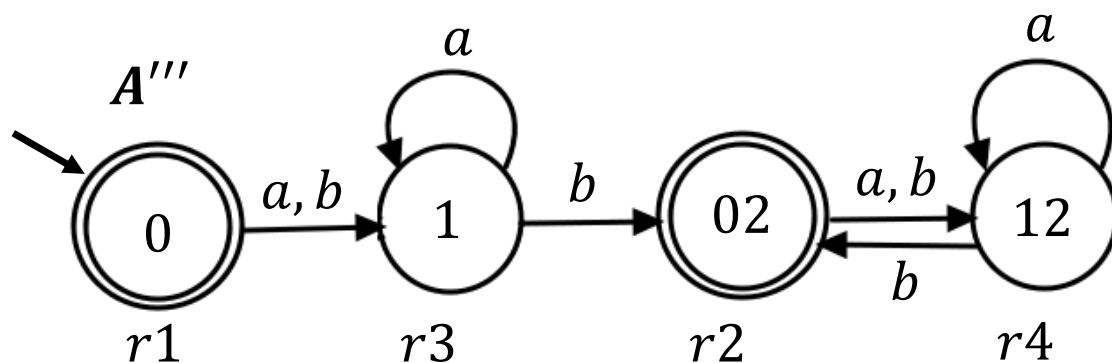
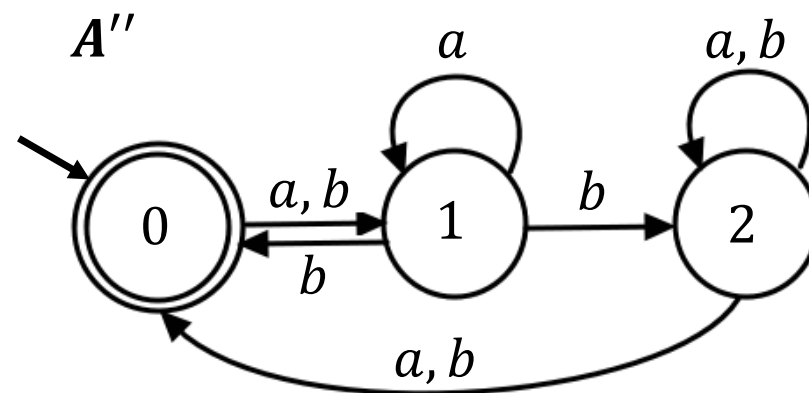
Алгоритм построения ДКА для итерации языка L

- 1) Пусть $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ - ДКА, распознающий язык L .
- 2) Убираем из данного ДКА A все недостижимые состояния и убираем те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в автомате останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автомат A допускает пустой язык. Получаем НКА (неполный ДКА) A' , распознающий тот же язык $L = L(A)$.
- 3) Построим НКА A'' , допускающий язык L^* по алгоритму, описанному в учебном пособии [Л.П. Жильцова, Т.Г. Смирнова](#)
[ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ И ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ](#), стр. 30-31
- 4) По полученному НКА A'' строим эквивалентный ДКА A''' , распознающий тот же язык L .
- 5) По полученному ДКА A''' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'''' , распознающий язык L .

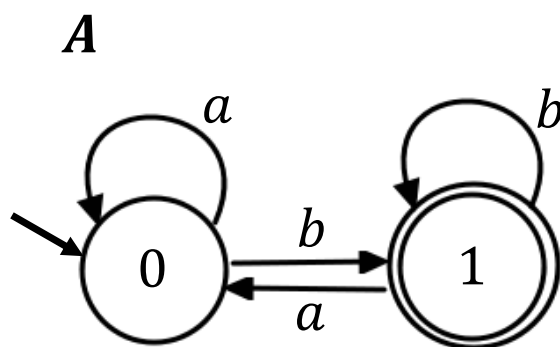
Пример 4 построения ДКА для итерации языка L



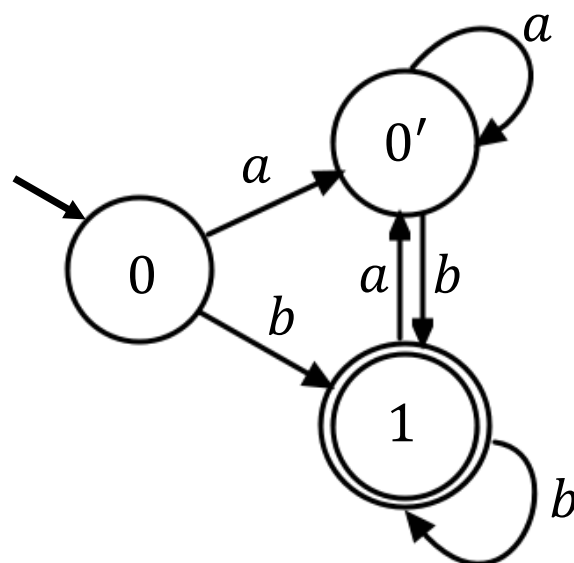
Случай 1: 0 — невозвратная



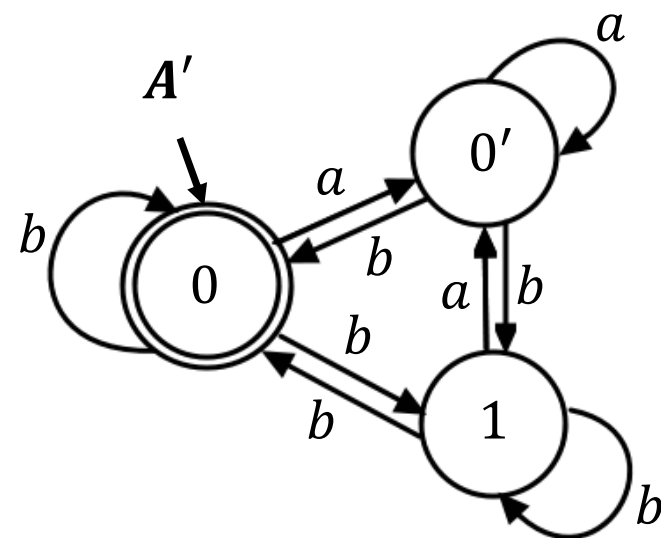
Пример 5 построения ДКА для итерации языка L



Случай 2:
0 — возвратная

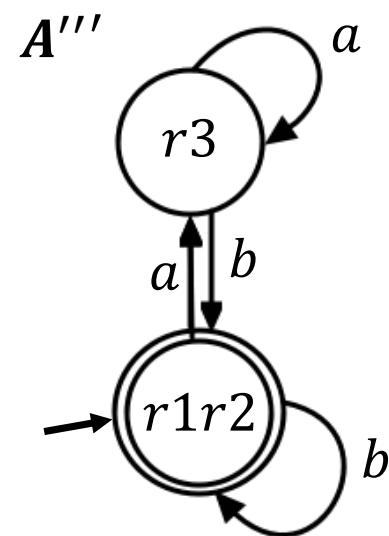
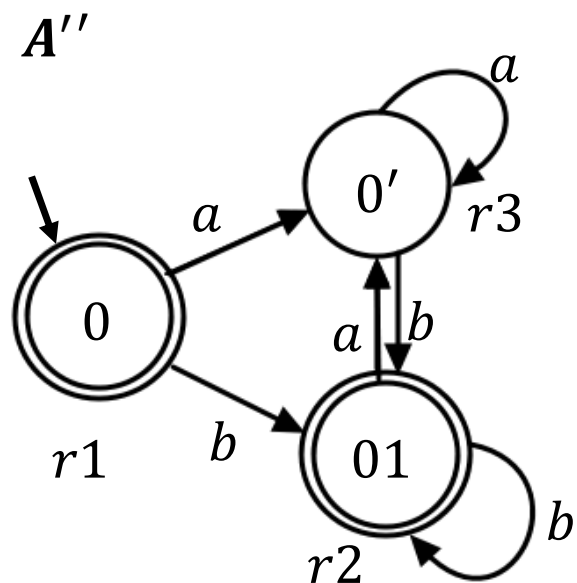


После шага 1:
0 — невозвратная



После шага 2:
0 — невозвратная

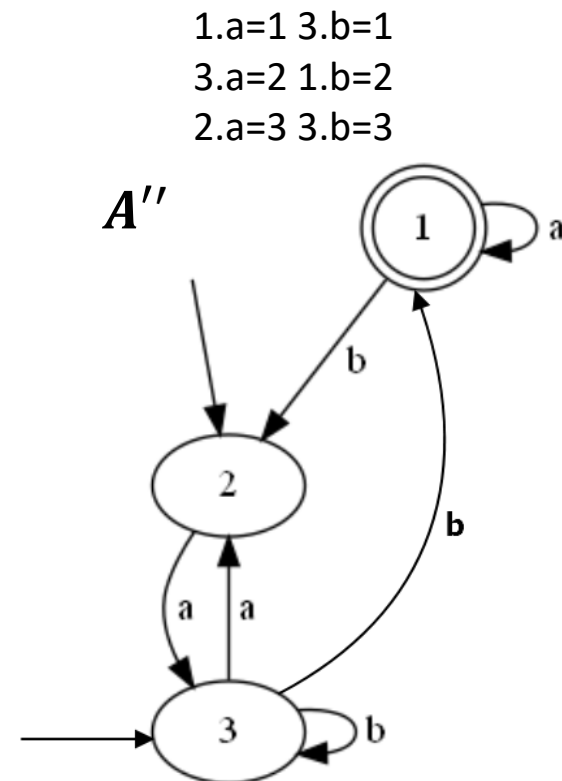
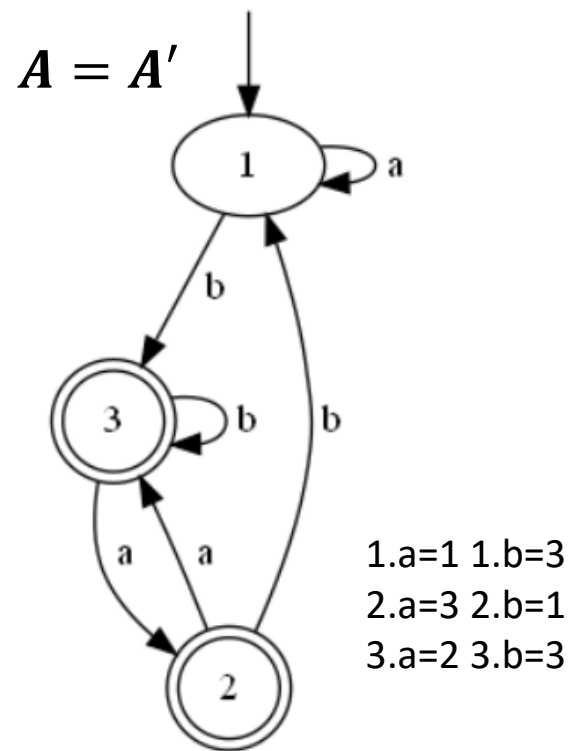
Пример 5 построения ДКА для итерации
языка L (продолжение)



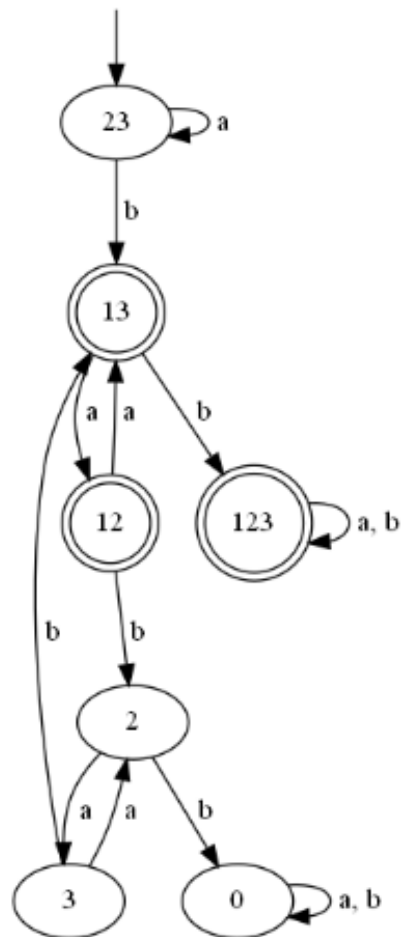
Алгоритм построения ДКА для реверса L^{revers} языка L

- 1) Убираем из данного ДКА A все недостижимые состояния и убираем те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в автомате останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автомат A допускает пустой язык. Получаем НКА (неполный ДКА) A' , распознающий тот же язык $L = L(A)$.
- 2) По полученному НКА A' строим НКА A'' , распознающий **реверс** L^{revers} языка $L = L(A)$. Для этого делаем начальную вершину автомата A' заключительной вершиной автомата A'' , а все заключительные – начальными, и разворачиваем все дуги в обратную сторону.
- 3) По полученному НКА A'' строим эквивалентный ДКА A''' , распознающий тот же язык.
- 4) По полученному ДКА A''' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'''' , распознающий тот же язык.

Пример 6 построения ДКА для реверса L^{revers} языка L



Пример 6 построения ДКА для реверса L^{revers} языка L (продолжение)



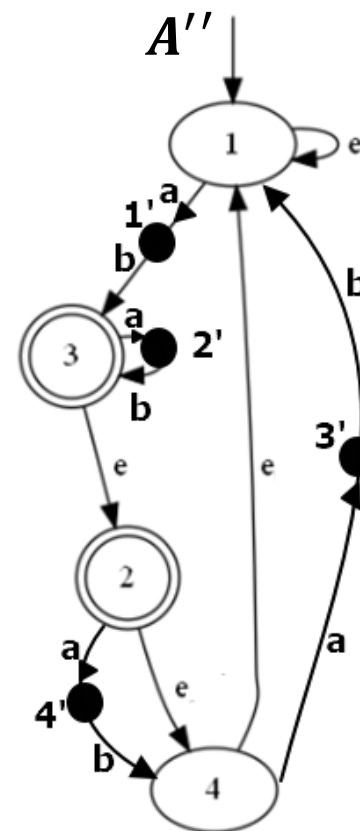
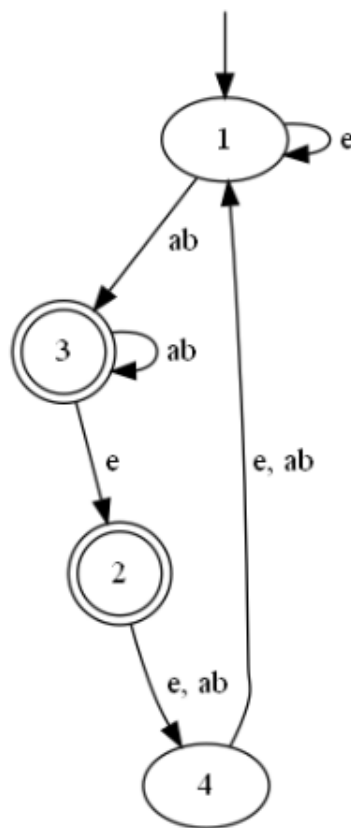
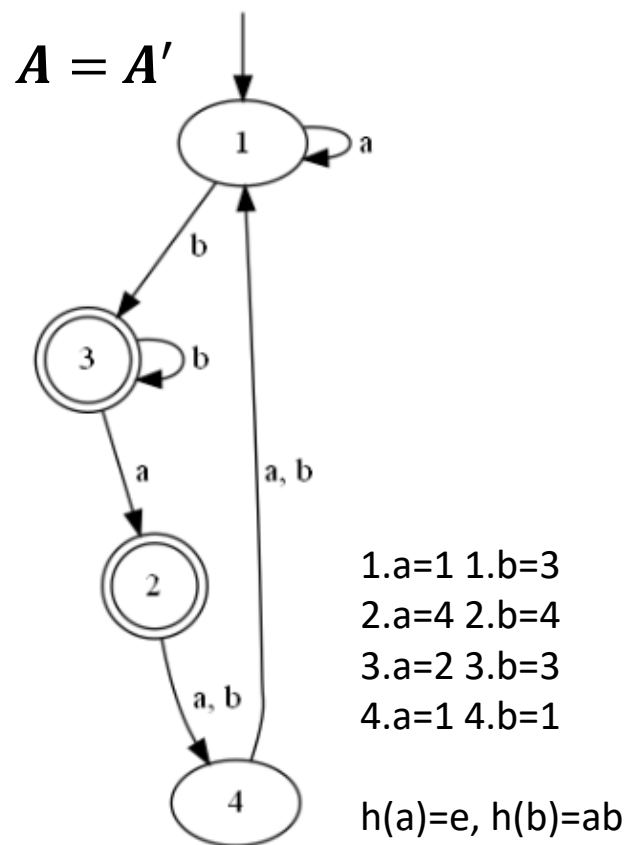
$23.a=23$ $23.b=13$
 $13.a=12$ $13.b=123$
 $123.a=123$ $123.b=123$
 $12.a=13$ $12.b=2$
 $2.a=3$ $2.b=0$
 $3.a=2$ $3.b=13$
 $0.a=0$ $0.b=0$

$$A''' = A''''$$

Алгоритм построения ДКА для гомоморфизма $h(L)$ языка L

- 1) Убираем из данного ДКА A все недостижимые состояния и убираем те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в автомате останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автомат A допускает пустой язык. Получаем НКА (неполный ДКА) A' , распознающий тот же язык $L = L(A)$.
- 2) По НКА A' строим НКА A'' с ε — переходами, распознающий **гомоморфный образ** $h(L)$ языка $L = L(A)$, где h — гомоморфизм Σ^* в Δ^* .
Для каждой метки $a \in \Sigma$ и дуги (q_1, q_2) ДКА A' с этой меткой меняем эту дугу на путь из q_1 в q_2 , помеченный словом $h(a)$, все вершины которого, кроме начальной q_1 и заключительной q_2 состоят из новых вершин q'_i .
- 3) По полученному НКА A'' с ε — переходами строим эквивалентный ДКА A''' , распознающий тот же язык.
- 4) По полученному ДКА A''' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'''' , распознающий тот же язык.

Пример 7 построения ДКА для гомоморфизма $h(L)$ языка L



Алгоритм построения ДКА для обратного гомоморфизма $h^{-1}(L)$ языка L

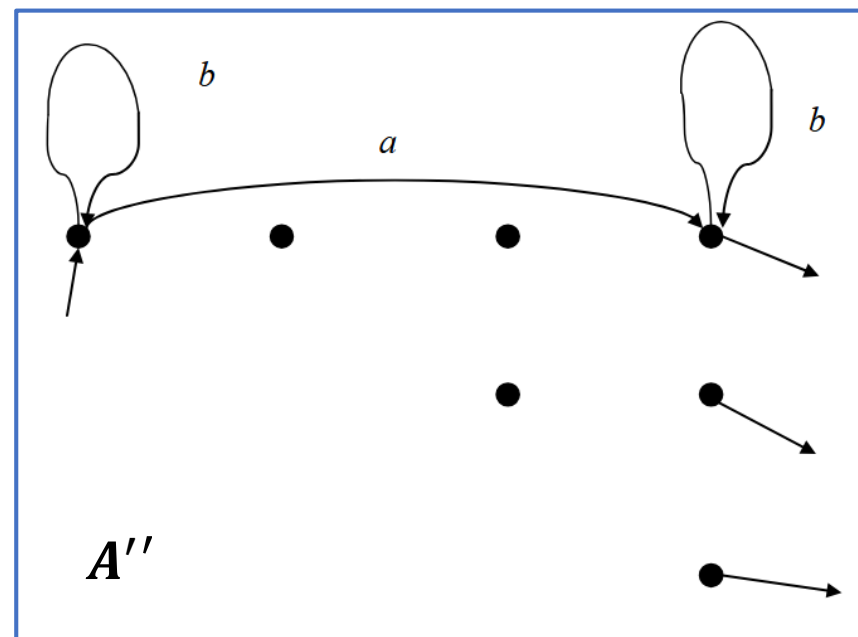
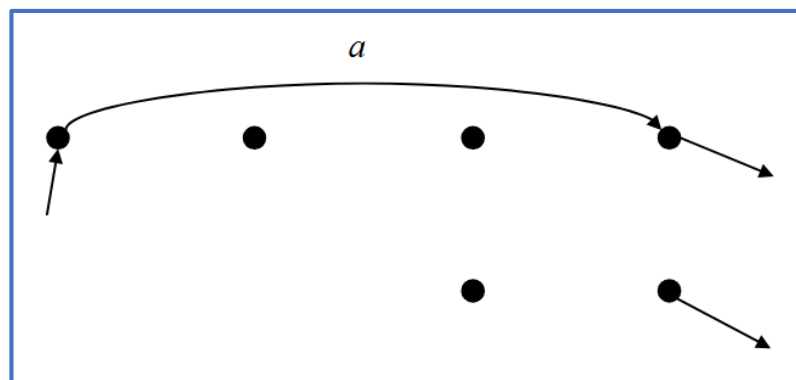
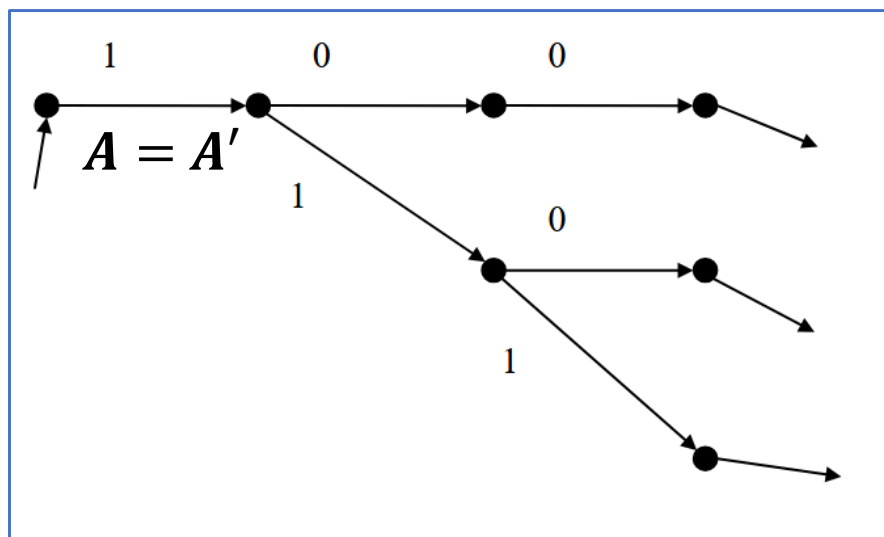
- 1) Убираем из данного ДКА A все недостижимые состояния и убираем те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в автомате останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автомат A допускает пустой язык. Получаем НКА (неполный ДКА) $A' = (Q', \Delta, \delta', q'_0, F')$, распознающий тот же язык $L = L(A)$.
- 2) По НКА A' строим НКА $A'' = (Q', \Sigma, \delta'', q'_0, F')$, распознающий **обратный гомоморфный образ** $h^{-1}(L)$ языка L , где h — гомоморфизм Σ^* в Δ^* :
 - если $h(a) \neq \varepsilon$, то для любых $q_1, q_2 \in Q'$ и любых $a \in \Sigma$ полагаем $\delta''(q_1, a) = q_2$ т. и т. т. к. $\delta'(q_1, h(a)) = q_2$, т.е. в A' есть путь из вершины q_1 в вершину q_2 , помеченный словом $h(a)$;
 - если $h(a) = \varepsilon$, то для любых неизолированных состояний $q \in Q'$ и $a \in \Sigma$ делаем петлю $\delta''(q, a) = q$.

4) Убираем из полученного НКА A'' все изолированные состояния, недостижимые состояния и те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. Получаем НКА A''' , распознающий тот же язык $h^{-1}(L)$.

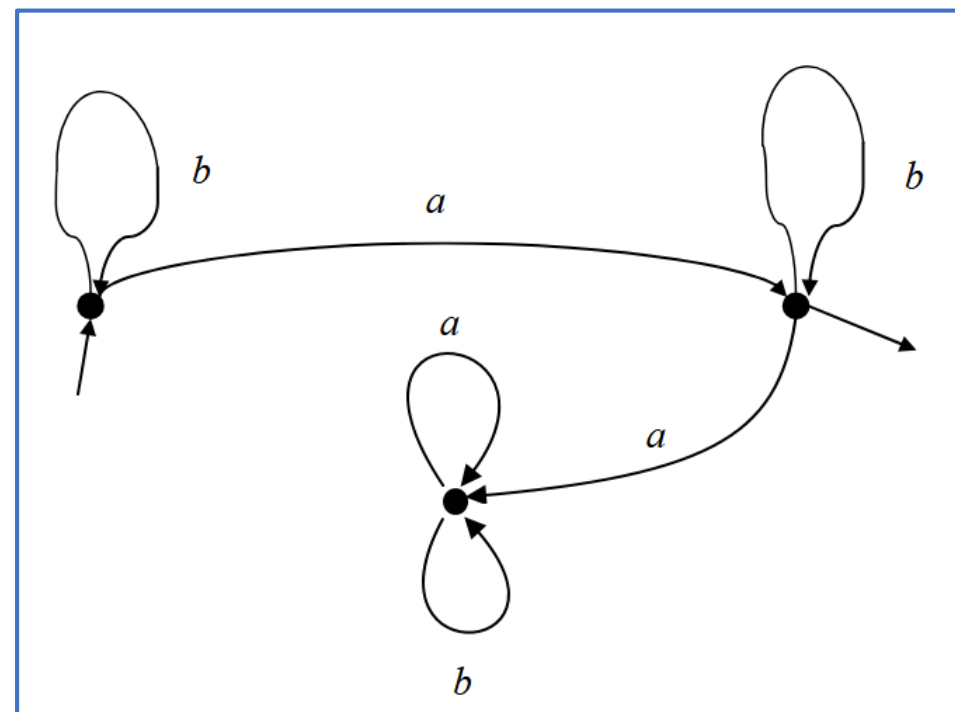
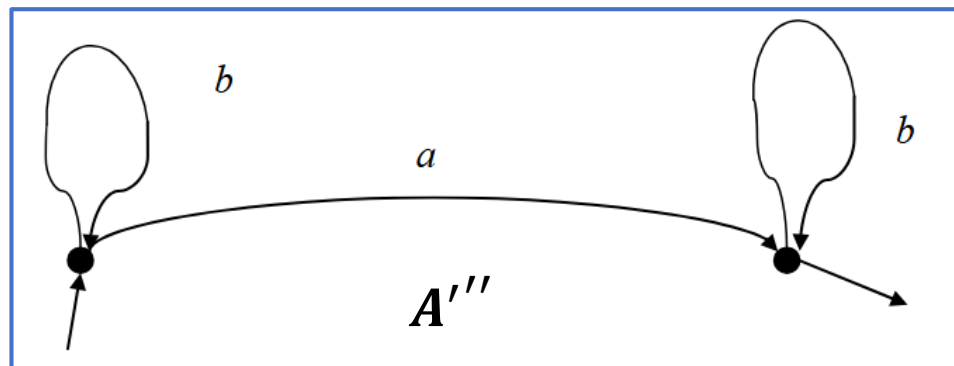
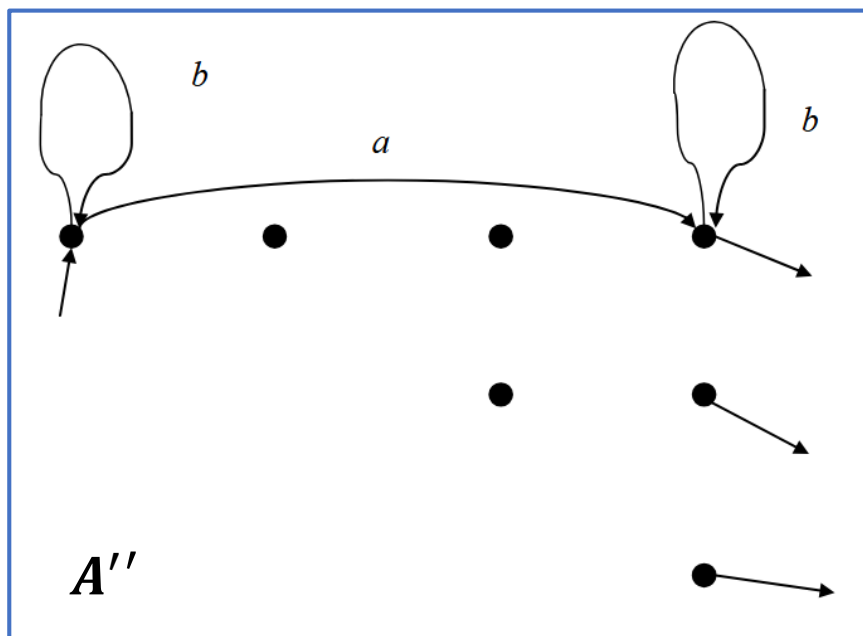
5) Если $h^{-1}(L) \neq \emptyset$ по НКА A''' строим эквивалентный ДКА A'''' .

6) По полученному ДКА A'''' строим приведенный ДКА A''''' , если это требуется по условию.

Пример 8 построения ДКА для обратного гомоморфизма $h^{-1}(L)$ языка L



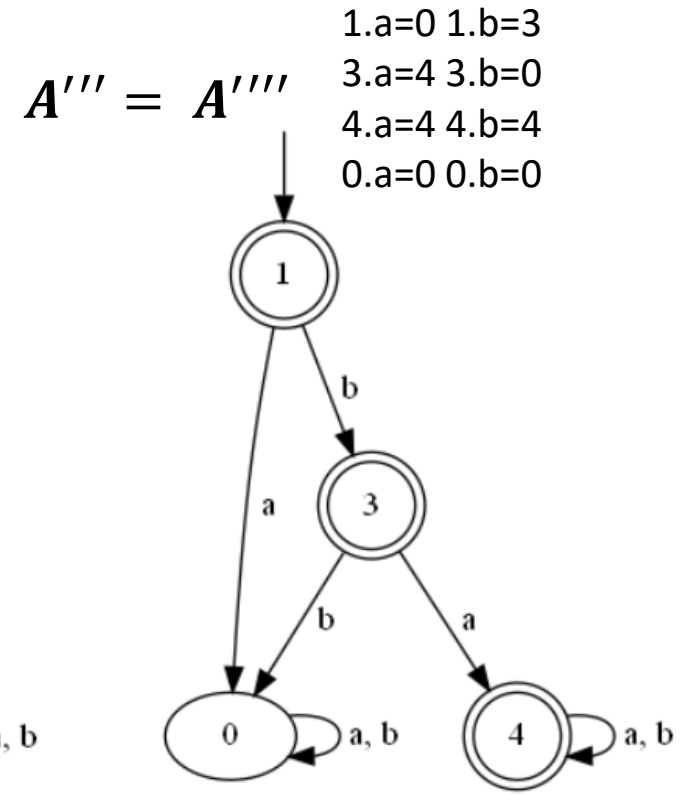
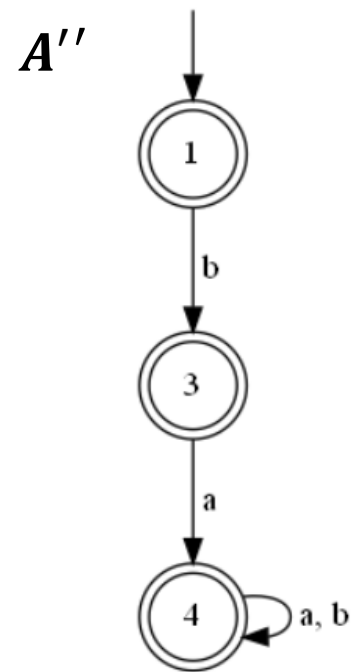
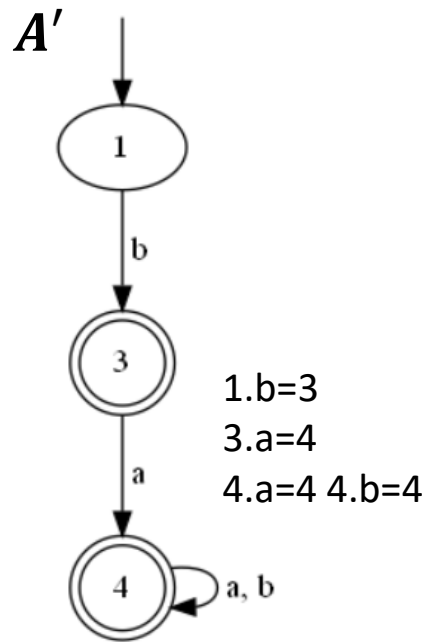
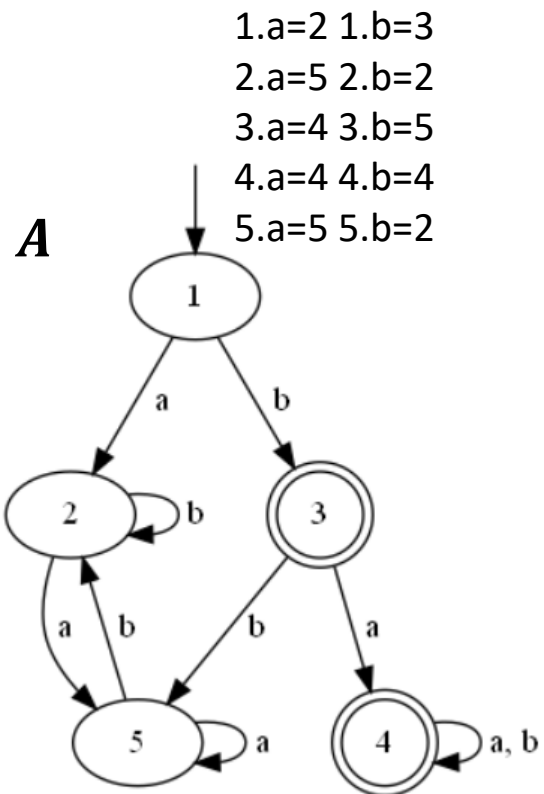
Пример 8 построения ДКА для обратного гомоморфизма $h^{-1}(L)$ языка L



Алгоритм построения ДКА для префиксного замыкания $Pref(L)$ языка L

- 1) Убираем из данного ДКА A все недостижимые состояния и убираем те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в автомате останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автомат A допускает пустой язык. Получаем НКА (неполный ДКА) A' , распознающий тот же язык $L = L(A)$.
- 2) Делаем все вершины заключительными, это НКА A'' , допускающий префиксное замыкание $Pref(L)$ языка L .
- 3) По полученному НКА A'' строим эквивалентный ДКА A''' , распознающий тот же язык $Pref(L)$.
- 4) По полученному ДКА A''' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'''' , распознающий тот же язык.

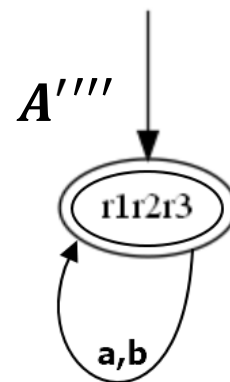
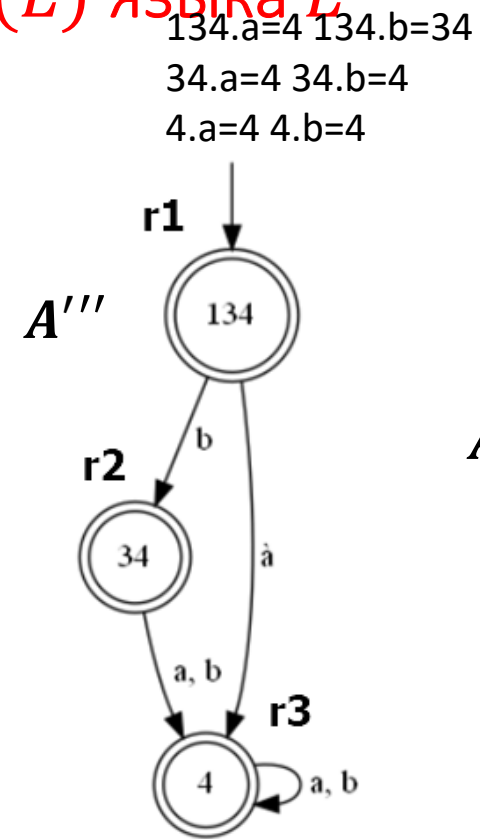
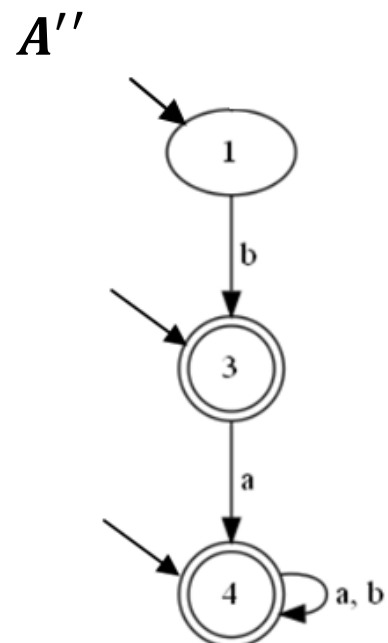
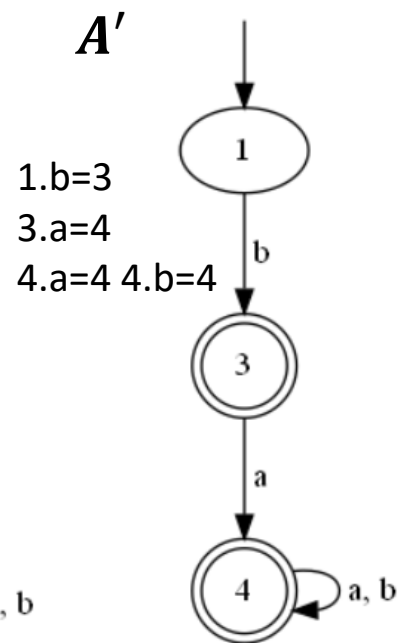
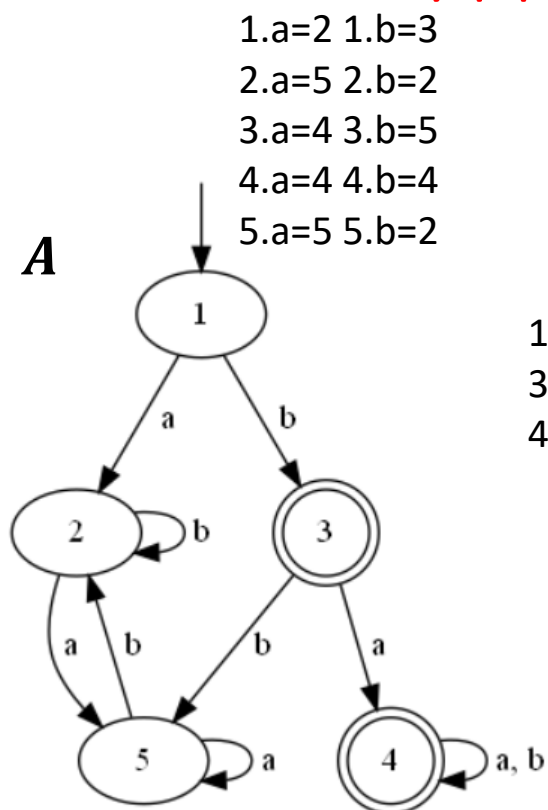
Пример 9 построения ДКА для префиксного замыкания $Pref(L)$ языка L



Алгоритм построения ДКА для суффиксного замыкания $Suff(L)$ языка L

- 1) Убираем из данного ДКА A все недостижимые состояния и убираем те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в автомате останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автомат A допускает пустой язык. Получаем НКА(неполный ДКА) A' распознающий тот же язык $L = L(A)$.
- 2) Делаем все вершины начальными, это НКА A'' , допускающий $Suff(L)$.
- 3) По полученному НКА A'' строим эквивалентный ДКА A''' , распознающий тот же язык.
- 4) По полученному ДКА A''' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'''' , распознающий тот же язык.

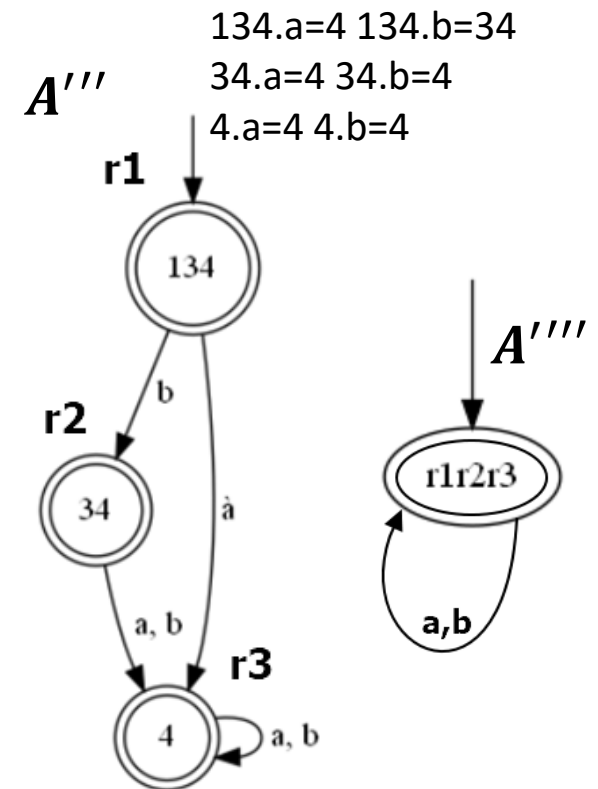
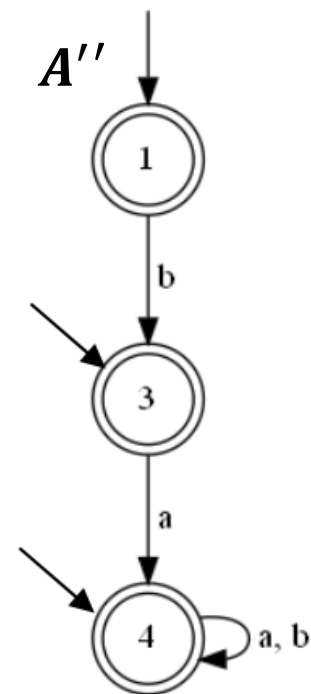
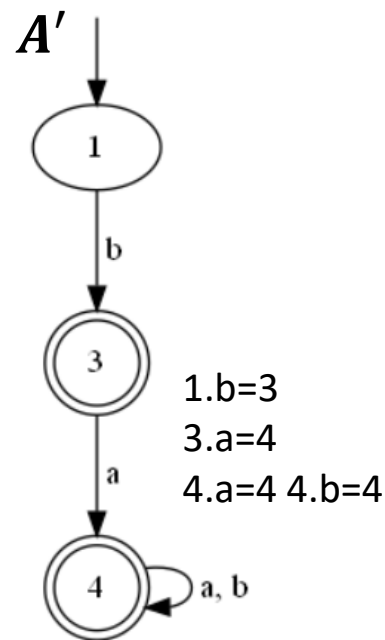
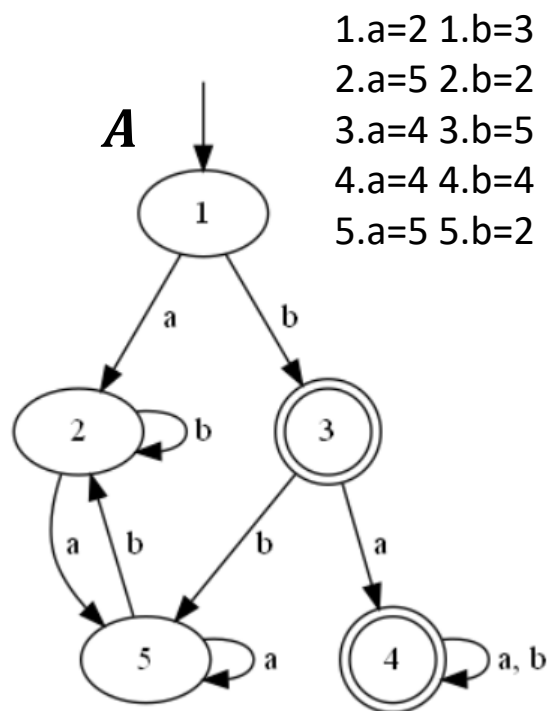
Пример 10 построения ДКА для суффиксного замыкания $Suff(L)$ языка L



Алгоритм построения ДКА для замыкания $Fact(L)$ языка L относительно подслов

- 1) Убираем из данного ДКА A все недостижимые состояния и убираем те состояния, из которых нельзя попасть в заключительные. При этом предполагаем, что в автомате останется начальная и хотя бы одна заключительная вершина, иначе автомат A допускает пустой язык. Получаем НКА(неполный ДКА) A' , распознающий тот же язык $L = L(A)$.
- 2) Делаем все вершины начальными и заключительными, это НКА A'' , допускающий $Fact(L)$.
- 3) По полученному НКА A'' строим эквивалентный ДКА A''' , распознающий тот же язык.
- 4) По полученному ДКА A''' строим, если это требуется по условию, эквивалентный приведенный ДКА A'''' , распознающий тот же язык.

Пример 11 построения ДКА для замыкания $Fact(L)$ языка L относительно подслов



Стандартная нумерация ДКА

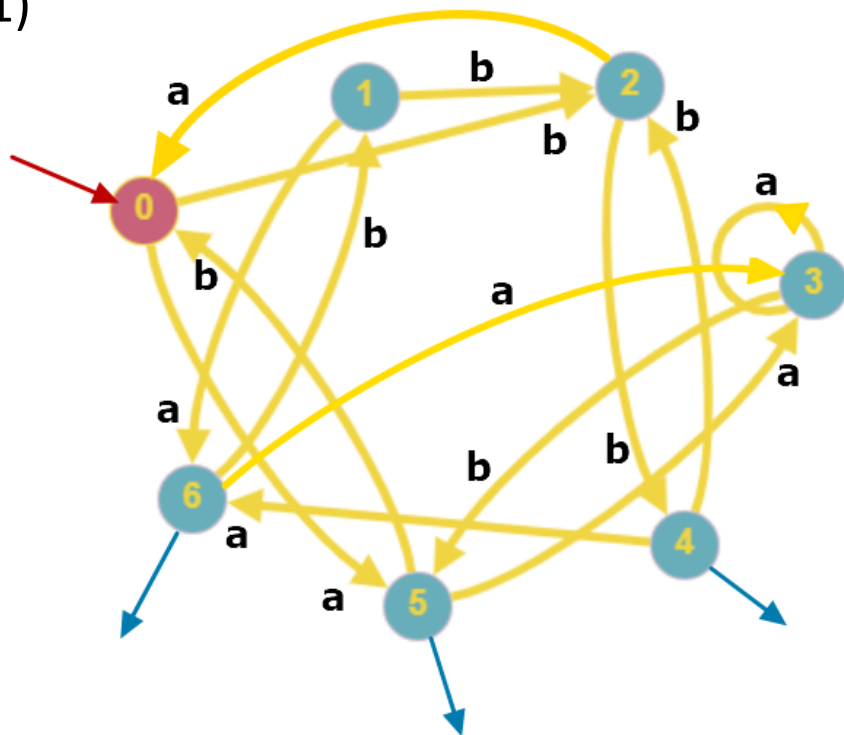
- 1) Пусть $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ - ДКА. БОО $\Sigma = \{a, b\}$.
- 2) Стираем все старые номера состояний автомата A .
- 3) Перенумеруем вершины автомата A следующим образом, строя перестановку σ множества Q (биекцию Q на себя). При этом N — номер текущей вершины.
 - Вначале полагаем $\sigma(q) = 0$ для всех $q \in Q, N = 0$.
 - Начинаем обход автомата как графа поиском в ширину, начиная с начальной вершины s , которой присваиваем номер 1, т.е. $\sigma(s) = 1$. Полагаем $N = 1$.
 - Пусть значение $\sigma(q)$ уже определено.
 - Если для $q_1 = \delta(q, a)$ значение $\sigma(q_1)$ еще не определено, то полагаем $\sigma(q_1) = N + 1, N = N + 1$.
 - Если для $q_2 = \delta(q, b)$ значение $\sigma(q_2)$ еще не определено, то полагаем $\sigma(q_2) = N + 1, N = N + 1$.
- 4) Так продолжаем, пока не определим перестановку σ для всех состояний автомата A .

Изоморфность двух ДКА

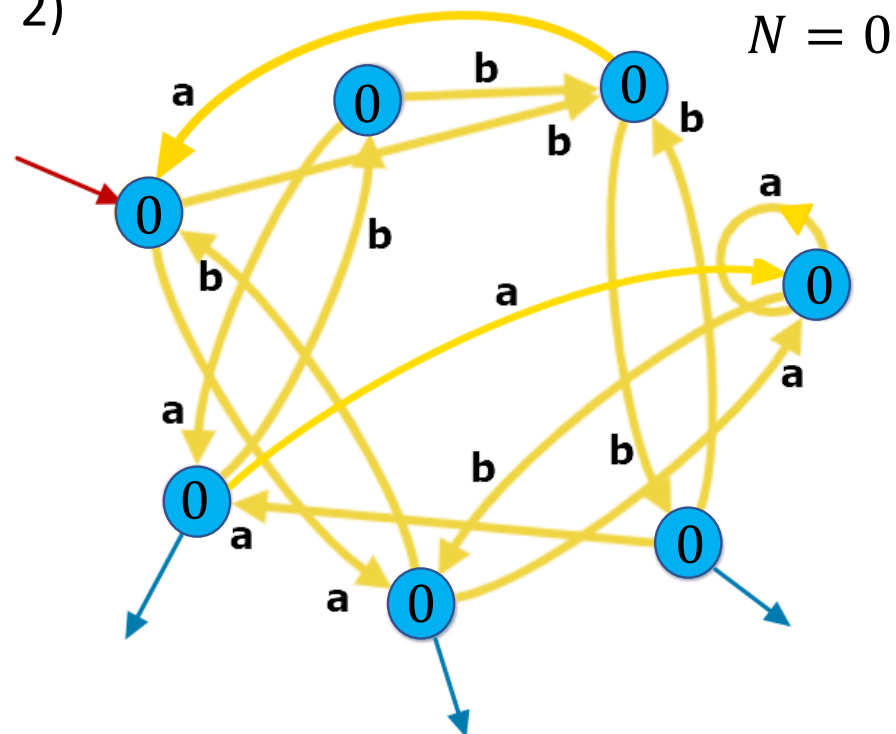
ЕСЛИ ПОСЛЕ ПРИВЕДЕНИЯ ДВУХ ДКА A_1 И A_2 К СТАНДАРНОЙ НУМЕРАЦИИ ПОЛУЧИЛИСЬ ОДИНАКОВЫЕ АВТОМАТЫ, ТО ДКА A_1 И A_2 БЫЛИ ИЗОМОРФНЫ!

Пример 12 стандартной нумерации ДКА

1)

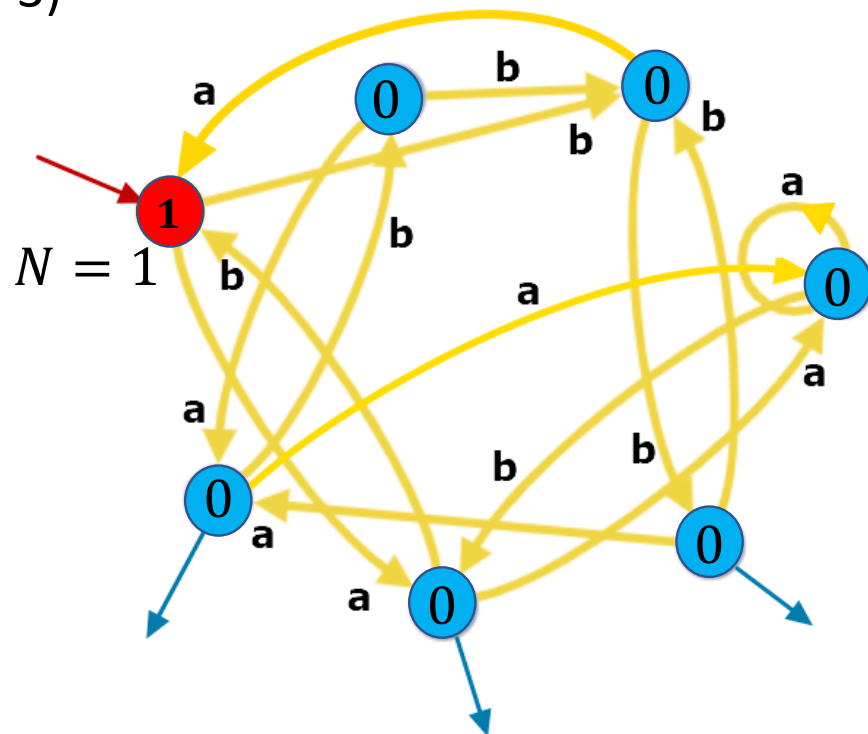


2)



Пример 11 стандартной нумерации ДКА

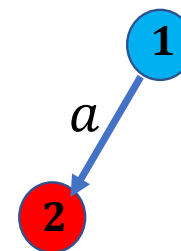
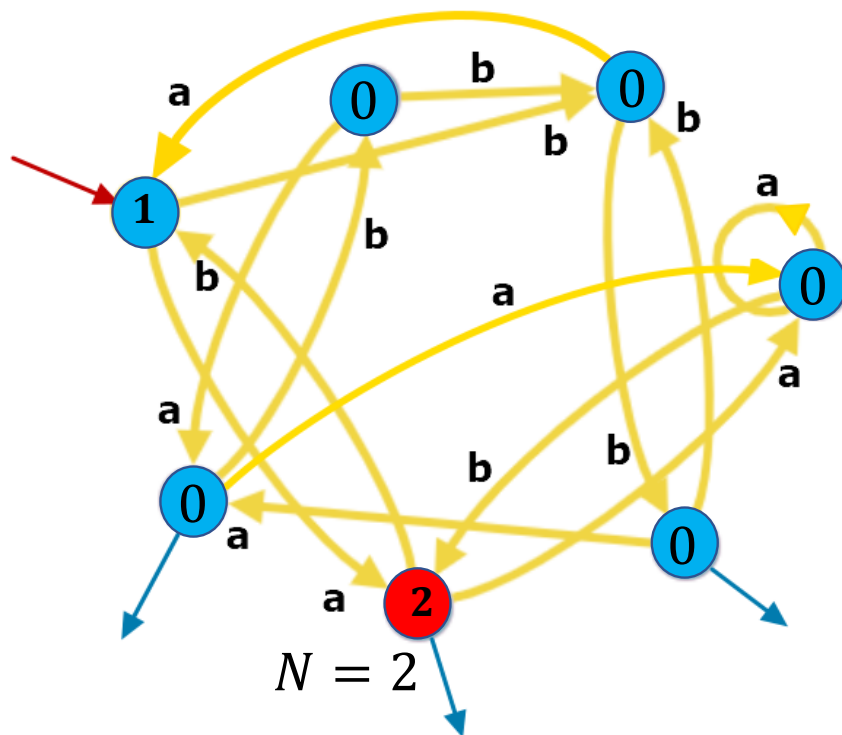
3)



1

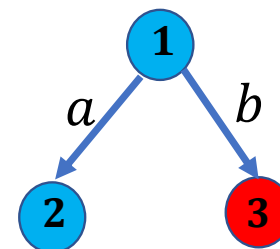
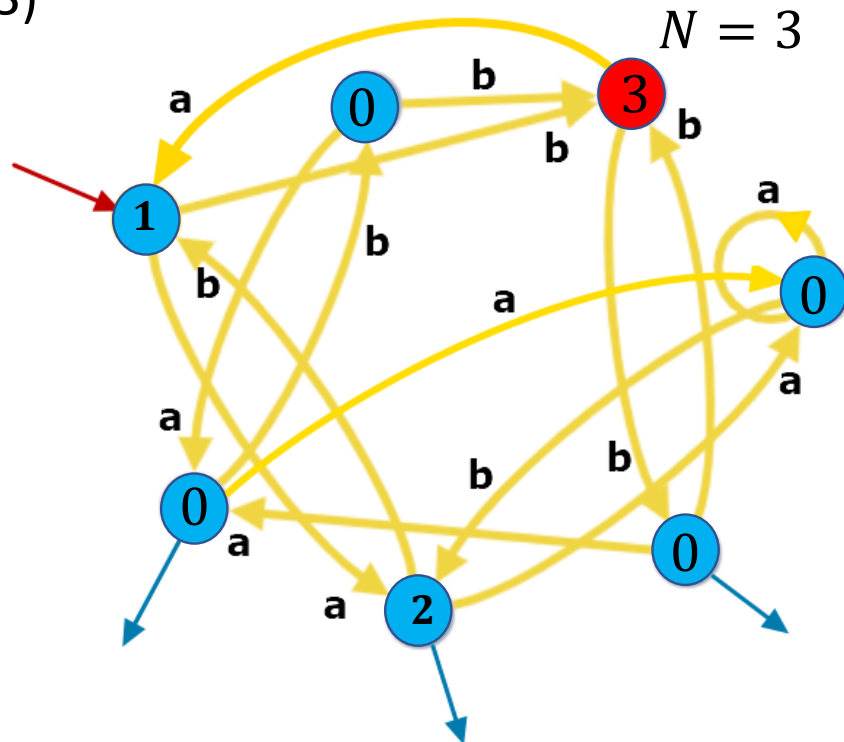
Пример 11 стандартной нумерации ДКА

3)



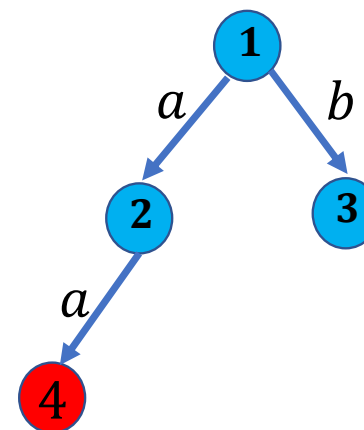
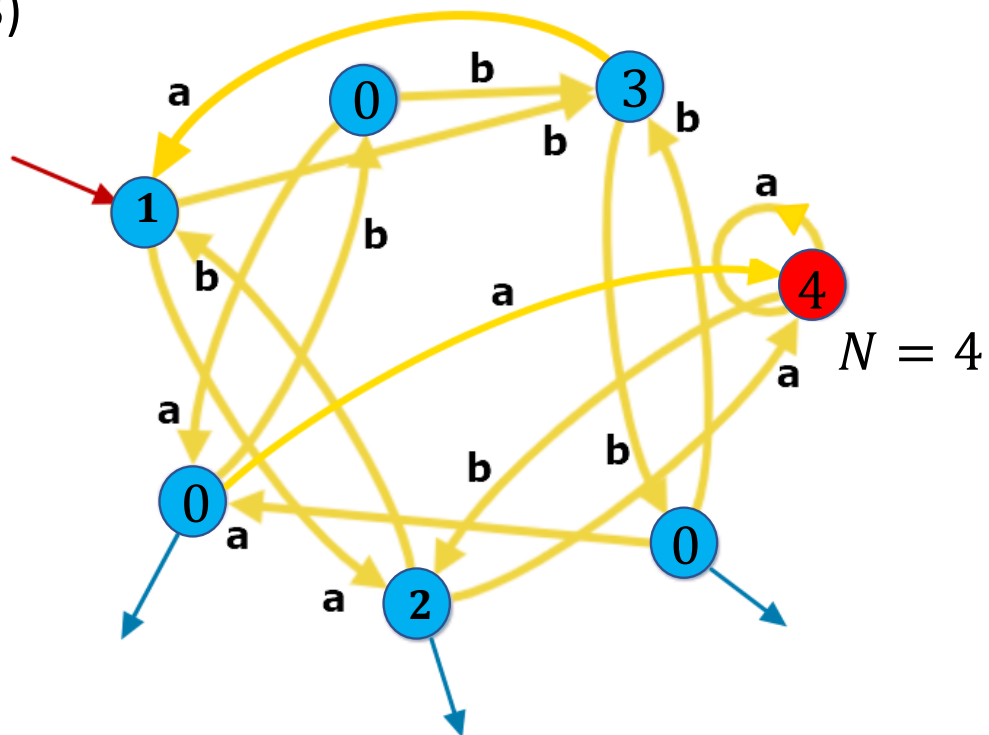
Пример 11 стандартной нумерации ДКА

3)



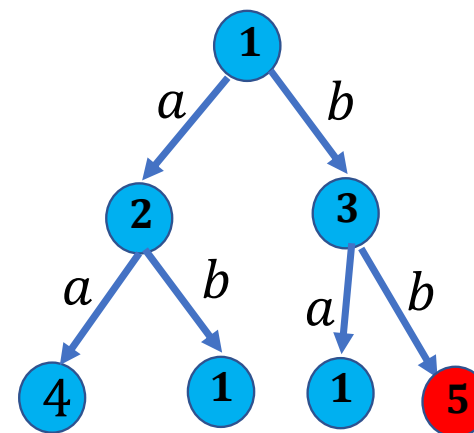
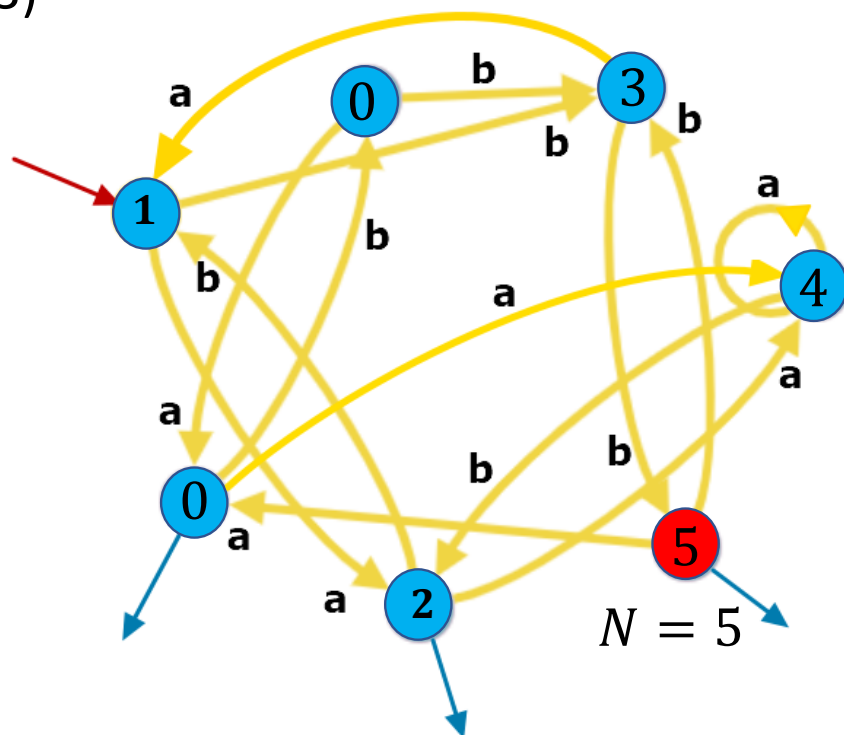
Пример 11 стандартной нумерации ДКА

3)



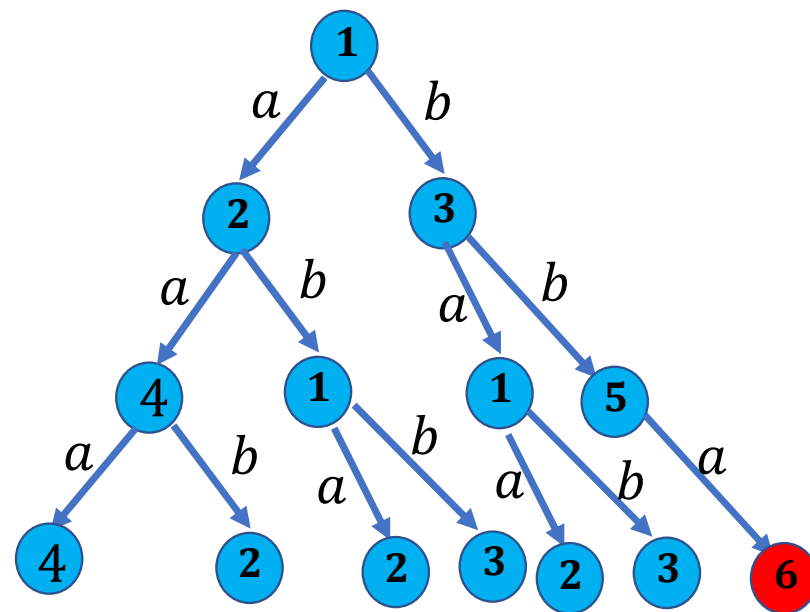
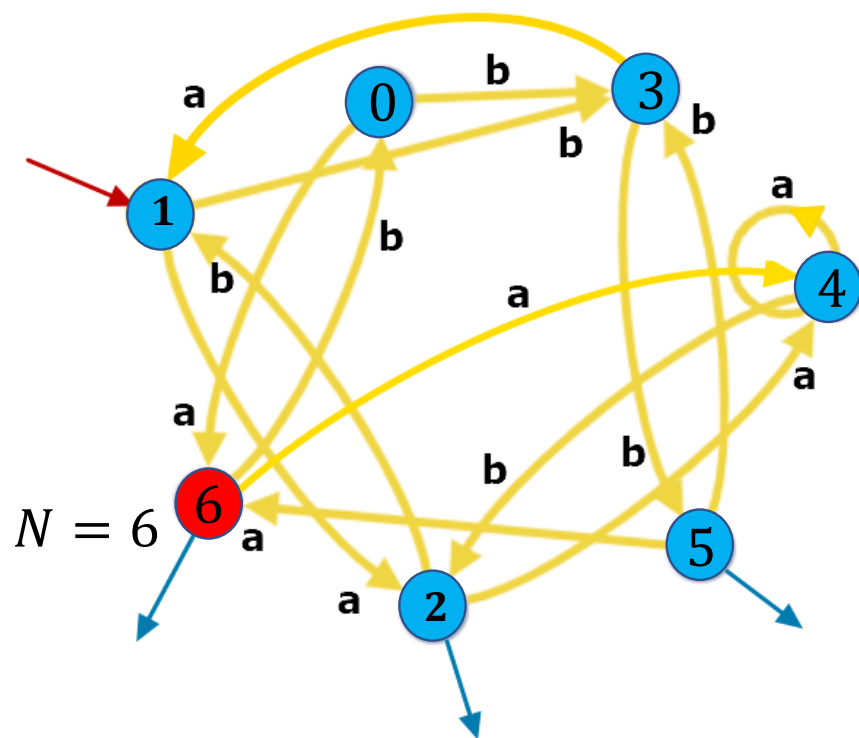
Пример 11 стандартной нумерации ДКА

3)



Пример 11 стандартной нумерации ДКА

3)



Пример 11 стандартной нумерации ДКА

