

§ 36. Гипербола

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболы.

- Как и в случае эллипса, каноническое уравнение гиперболы является ее общим уравнением в смысле понятия общего уравнения кривой на плоскости, введенного в начале § 12.
- В школьном курсе математики дается другое определение гиперболы. Связь между «школьной» гиперболой и тем понятием гиперболы, которое введено только что, будет обсуждена в конце данного параграфа.

Вершины, фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет и директрисы гиперболы

Введем ряд понятий, играющих важную роль в изучении гиперболы. Пусть гипербола задана уравнением (1). Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ясно, что $c > a$.

Определения

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$ называются *вершинами* гиперболы, величина a — *действительной полуосью* гиперболы, а величина b — ее *мнимой полуосью*. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы, причем фокус F_1 называется *правым*, а фокус F_2 — *левым*. Если точка M принадлежит гиперболе, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами*. Величина $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ называются *директрисами* гиперболы.

Из определения эксцентриситета непосредственно вытекает следующий факт.

Замечание 36.1

Для любой гиперболы выполнено неравенство $e > 1$.

Расположение гиперболы на плоскости (1)

Изучим «внешний вид» гиперболы. Предположим, что точка $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Как и в случае эллипса, легко убедиться, что гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Поэтому достаточно изучить форму гиперболы лишь в первой четверти. Это позволяет далее считать, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Тогда, в силу (1),

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (2)$$

Рассмотрим прямую с уравнением $y = \frac{b}{a} \cdot x$, точнее, луч этой прямой, расположенный в первой четверти. Ясно, что $\frac{b}{a} \cdot x > \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$. Это означает, что гипербола расположена ниже прямой. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \cdot (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$ гипербола неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a} \cdot x$, которая, таким образом, является асимптотой гиперболы.

Расположение гиперболы на плоскости (2)

Нетрудно видеть, что в первой четверти нет точек гиперболы, для которых $x < a$. (В самом деле, $x^2 = a^2(1 + \frac{y^2}{b^2})$, и потому если $x \geq 0$, то $x = a \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \geq a$.) Вычислив первую и вторую производные функции (2), получим:

$$y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}}.$$

В частности, $y' > 0$ и $y'' < 0$ при любом $x > 0$. Следовательно, в первой четверти гипербола возрастает и выпукла. Кроме того, из (2) легко вытекает, что в первой четверти гипербола пересекает ось абсцисс в точке $(a, 0)$, а ось ординат не пересекает. С учетом симметрии относительно осей координат и того, что прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$ является асимптотой, получаем кривую, изображенную на рис. 1 на следующем слайде (чтобы выделить гипербола среди вспомогательных линий, она изображена красным цветом).

Расположение гиперболы на плоскости (рисунок)

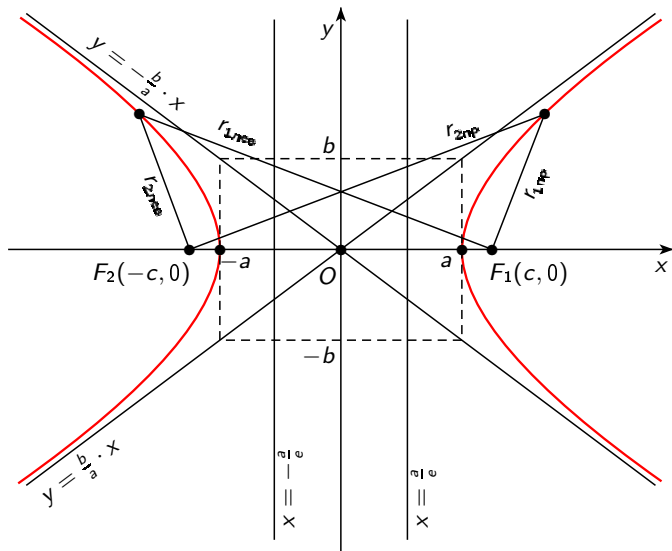


Рис. 1. Гипербола

Мы видим, что гипербола распадается на две части, одна из которых лежит в правой полуплоскости, а другая — в левой. Эти части называются, соответственно, *правой* и *левой ветвью* гиперболы. Отметим, что, в силу симметрии относительно осей координат, асимптотой гиперболы является не только прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$, но также и прямая $y = -\frac{b}{a} \cdot x$. Как и в случае эллипса (см. рис. 1 в § 35), директрисы гиперболы не пересекают кривую, а ее фокусы расположены «внутри» кривой. Отметим еще, что точки с координатами $(0, b)$ и $(0, -b)$ не принадлежат гиперболе, хотя и называются ее вершинами.

На рис. 1 указаны также используемые в дальнейшем обозначения для фокальных радиусов: если точка лежит на левой [правой] ветви гиперболы, то расстояния от нее до фокусов обозначаются через $r_{1\text{лев}}$ и $r_{2\text{лев}}$ [соответственно $r_{1\text{пр}}$ и $r_{2\text{пр}}$] (оба раза цифра 1 в индексах соответствует фокусу F_1 , а цифра 2 — фокусу F_2).

Основная цель данного параграфа — указать два утверждения, характеризующих гиперболу как геометрическое место точек с некоторыми свойствами. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма 36.1

Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), то

$$r_{1\text{пр}} = ex - a, \quad r_{2\text{пр}} = ex + a, \quad r_{1\text{лев}} = -ex + a, \quad r_{2\text{лев}} = -ex - a.$$

Доказательство. Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

откуда

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - b^2. \quad (3)$$

Предположим, что точка M лежит на правой ветви гиперболы.

Вычисление фокальных радиусов (2)

Используя (3), получаем, что выполнены равенства

$$\begin{aligned}r_{1np} &= |F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \\&= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - b^2} = \\&= \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 - b^2}.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2, \quad c = ea, \quad \text{и} \quad c^2 - b^2 = a^2,$$

имеем

$$r_{1np} = \sqrt{e^2x^2 - 2eax + a^2} = \sqrt{(ex - a)^2} = |ex - a|.$$

Поскольку $x \geq a$, а $e > 1$, то $|ex - a| = ex - a$, и потому $r_{1np} = ex - a$.
Остальные равенства из формулировки леммы проверяются вполне аналогично. □

Фокальное свойство гиперболы (1)

Следующее утверждение дает характеристику гиперболы, которую нередко принимают за ее определение.

Теорема 36.1 (фокальное свойство гиперболы)

Точка M принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда модуль разности расстояний от M до фокусов равен $2a$.

Доказательство. Необходимость. В силу леммы 36.1 имеем

$$|r_{1\text{пр}} - r_{2\text{пр}}| = |r_{1\text{лев}} - r_{2\text{лев}}| = 2a.$$

Достаточность. Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой выполнено равенство $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$. Тогда

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a,$$

или

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

После очевидных преобразований имеем

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a^2 - c^2 = -b^2$, последнее равенство можно переписать в виде

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Разделив это равенство на $-a^2b^2$, мы получим уравнение (1).



Следующее утверждение дает еще одну характеристику гиперболы.

Теорема 36.2 (директориальное свойство гиперболы)

Точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда отношение расстояния от M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы. □

Мы не приводим доказательство этого утверждения, поскольку оно вполне аналогично доказательству директориального свойства эллипса, данному в § 35.

Гипербола обладает следующим *оптическим свойством*:

Предложение 36.1 (оптическое свойство гиперболы)

Луч света, выпущенный из фокуса гиперболы, после отражения от ветви гиперболы, соответствующей другому фокусу, направлен так, что его продолжение проходит через другой фокус. □

Это утверждение, как и аналогичное ему оптическое свойство эллипса (см. предложение 35.1), мы приводим без доказательства.

«Школьная» гипербола (1)

В школьном курсе математики гиперболой называется график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Естественно возникает вопрос, как соотносится «школьная» гипербола с гиперболой, введенной в этом параграфе. Отвечая на этот вопрос, можно ограничиться случаем, когда $k > 0$ (если $k < 0$, можно сделать замену неизвестных $x' = -x$, $y' = y$).

Рассмотрим новую систему координат $Ox'y'$, полученную из старой поворотом на 45° . Используя формулы поворота системы координат (см. формулы (8) в § 11), получаем, что

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases} \quad (4)$$

Можно считать, что $x \neq 0$, так как кривая, заданная уравнением $y = \frac{k}{x}$, очевидно не имеет точек, абсцисса которых равна 0. Поэтому равенство $y = \frac{k}{x}$ эквивалентно равенству $xy = k$. Если подставить в него x и y из формул (4), мы получим

$$k = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}((x')^2 - (y')^2).$$

«Школьная» гипербола (2)

Это означает, что в системе координат $Ox'y'$ «школьная» гипербола определяется уравнением $\frac{(x')^2}{2k} - \frac{(y')^2}{2k} = 1$. Поскольку $k > 0$, то $2k = a^2$ для некоторого $a > 0$. Следовательно, последнее уравнение можно переписать в виде $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{a^2} = 1$. Мы получили уравнение вида (1), в котором $a = b$.

Определение

Гипербола, у которой действительная полуось равна мнимой, называется *равносторонней*.

Таким образом,

- «школьная» гипербола является частным случаем гиперболы, определяемой уравнением (1), а именно, равносторонней гиперболой. Каноническое уравнение эта гипербола имеет в системе координат, которая получается поворотом на угол 45° той системы координат, в которой она имеет уравнение вида $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.

Проведенные рассуждения иллюстрирует рис. 2 на следующем слайде.

«Школьная» гипербола (рисунок)

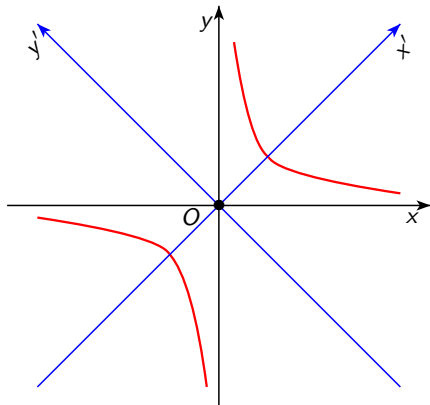


Рис. 2. «Школьная» гипербола