Глава XI. Квадрики на плоскости

§ 35. Эллипс

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

В гл. IV (§ 12–14) мы рассмотрели прямые и плоскости, т. е, кривые и поверхности, задаваемые уравнениями 1-го порядка. В оставшейся части курса изучаются кривые и поверхности, задаваемые уравнениями 2-го порядка. Они называются *квадриками* на плоскости и в пространстве. В этом и двух следующих параграфах мы рассмотрим три конкретные квадрики на плоскости, а в § 38 приведем их полную классификацию. После этого в гл. XII (§ 39–42) будут рассмотрены квадрики в пространстве.

!! *В этом и всех последующих параграфах предполагается, что все системы координат на плоскости и в пространстве, в которых будут записываться уравнения кривых и поверхностей, являются прямоугольными декартовыми.*

Определение эллипса

Определение

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

где $a, b > 0$ и $a \geqslant b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипса.

- Каноническое уравнение эллипса является его общим уравнением в смысле понятия общего уравнения кривой на плоскости, введенного в начале § 12.

Вершины, фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет и директрисы эллипса

Введем ряд понятий, играющих важную роль в изучении эллипса. Пусть эллипс задан уравнением (1). Ясно, что $a^2 - b^2 \geqslant 0$. Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ясно, что $0 \leqslant c < a$.

Определения

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$ называются *вершинами* эллипса, величина a — *большой полуосью* эллипса, а величина b — его *малой полуосью*. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* эллипса, причем фокус F_1 называется *правым*, а фокус F_2 — *левым*. Если точка M принадлежит эллипсу, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* и обозначаются соответственно через r_1 и r_2. Величина $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса (при $e = 0$ директрис эллипса не существует).

Из определения эксцентриситета непосредственно вытекает следующий факт.

Замечание 35.1

Для любого эллипса выполнены неравенства $0 \leqslant e < 1$.

Расположение эллипса на плоскости

Изучим «внешний вид» эллипса. Предположим, что точка $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда $x^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2})$, откуда $|x| = a \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \leqslant a$. Аналогично проверяется, что $|y| \leqslant b$. Это означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ координатной плоскости. Далее, очевидно, что эллипс симметричен относительно обеих осей координат, и потому достаточно понять, как он выглядит в первой четверти. Поэтому далее будем считать, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

Вычислив первую и вторую производные этой функции, получим:

$$y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

В частности, $y' < 0$ и $y'' < 0$ при любом $x > 0$. Следовательно, в первой четверти эллипс убывает и является выпуклым. Кроме того, из (2) легко выводится, что в первой четверти эллипс пересекает ось абсцисс в точке $(a, 0)$ и ось ординат в точке $(0, b)$. Отразив полученную кривую симметрично сначала в четвертую четверть, а затем в левую полуплоскость, получим кривую, выделенную красным цветом на рис. 1 на следующем слайде.

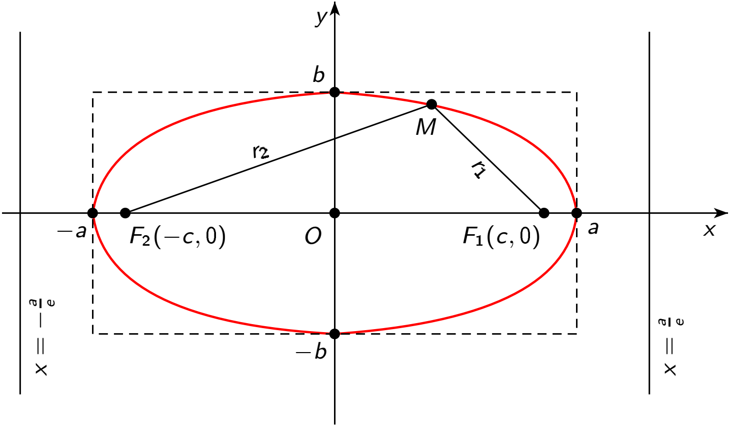

Рис. 1. Эллипс

Окружность как частный случай эллипса

Как показывает рис. 1, эллипс выглядит как вытянутая (вдоль оси абсцисс) или сжатая (вдоль оси ординат) окружность. Это не случайно. При $a = b$ уравнение (1) можно переписать в виде $x^2 + y^2 = a^2$, а последнее есть не что иное, как уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат. Далее, ясно, что если $a = b$, то $c = 0$, а значит и $e = 0$. Таким образом, имеют место следующие факты.

- *Окружность является частным случаем эллипса. Обе полуоси окружности совпадают с ее радиусом, фокусы окружности совпадают между собой и расположены в центре окружности. Эксцентриситет окружности равен* 0*. Окружность не имеет директрис.*

Эксцентриситет является мерой вытянутости эллипса, его «удаленности» от окружности.

- Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше похож на окружность, а чем он ближе к единице, тем более эллипс вытянут вдоль оси абсцисс.

Чем кометы отличаются от планет?

Укажем одно «физическое свойство» эллипса.

- Эллипс — это та кривая, по которой одно тело движется вокруг другого по действием силы притяжения (например, Земля вокруг Солнца или Луна вокруг Земли). При этом тело, вокруг которого происходит движение, всегда находится в одном из фокусов эллипса.

Отметим, что эксцентриситеты орбит, по которым «обычные» планеты движутся вокруг Солнца, как правило, весьма малы. Например, эксцентриситет орбиты Земли равен $0,0167$. А у орбит, по которым движутся кометы, эксцентриситет, напротив, весьма близок к единице (например, у кометы Галлея он равен $0,967$). Именно поэтому кометы так редко появляются вблизи Солнца.

Вычисление фокальных радиусов

Основная цель данного параграфа — доказать два утверждения, характеризующих эллипс как геометрическое место точек с некоторыми свойствами. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма 35.1

Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1), *то* $r_1 = a - ex$ *и* $r_2 = a + ex$.

Доказательство. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$. Следовательно,

$$r_1 = |F_1 M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Поскольку

$$c^2 + b^2 = a^2, \;\; 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2 \;\text{ и }\; ea = c,$$

имеем

$$r_1 = \sqrt{e^2 x^2 - 2eax + a^2} = \sqrt{(ex - a)^2} = |\,ex - a|.$$

Так как $0 \leqslant e < 1$ и $x \leqslant a$, то $ex - a \leqslant 0$. Это означает, что $r_1 = |\,ex - a| = a - ex$. Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. $\square$

Фокальное свойство эллипса (1)

Следующее утверждение дает характеризацию эллипса, которую нередко принимают за его определение.

Теорема 35.1 (фокальное свойство эллипса)

Точка M принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1), тогда и только тогда, когда сумма расстояний от M до фокусов равна $2a$.

Доказательство. *Необходимость.* Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то, в силу леммы 35.1,

$$|F_1M| + |F_2M| = r_1 + r_2 = (a - ex) + (a + ex) = 2a.$$

Достаточность. Предположим, что $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой выполнено равенство $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

и возведем обе части полученного равенства в квадрат.

Получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

что после очевидных преобразований дает

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a^2 - c^2 = b^2$, последнее равенство можно переписать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив это равенство на a^2b^2, получим уравнение (1). $\square$

Следующее утверждение дает еще одну характеризацию эллипса.

Теорема 35.2 (директориальное свойство эллипса)

Точка M принадлежит эллипсу (не являющемуся окружностью) тогда и только тогда, когда отношение расстояния от M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

Докажем сформулированное утверждение для правого фокуса и правой директрисы. Для левого фокуса и левой директрисы доказательство абсолютно аналогично.

Доказательство. *Необходимость.* Обозначим через ℓ директрису с уравнением $x = \frac{a}{e}$. Очевидно (и вытекает из формулы (15) в § 12), что расстояние от точки $M(x, y)$ до ℓ равно $\frac{a}{e} - x = \frac{a-ex}{e}$. Используя лемму 35.1, получаем, что если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то

$$\frac{|F_1M|}{d(M,\ell)} = \frac{r_1}{(a-ex)/e} = \frac{a-ex}{a-ex} \cdot e = e.$$

Достаточность. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости, для которой выполнено равенство $\frac{|F_1M|}{d(M,\ell)} = e$ или $|F_1M| = e \cdot d(M,\ell)$. Ясно, что $|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Используя формулу (15) из § 12, получаем, что $d(M,\ell) = |x - \frac{a}{e}|$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = e \cdot \left|x - \frac{a}{e}\right|.$$

Возводя это равенство в квадрат, имеем

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2.$$

Поскольку $ea = c$, последнее равенство можно переписать в виде

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Учитывая, что

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{и} \quad 1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

имеем

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Разделив это равенство на b^2, получим уравнение (1).

Эллипс обладает следующим *оптическим свойством*:

Предложение 35.1 (оптическое свойство эллипса)

Луч света, выпущенный из фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходит через другой его фокус. $\square$

Доказывать это утверждение мы не будем.