

§ 34. Положительно определенные квадратичные формы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Понятие положительно определенной формы

Квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем F можно рассматривать как отображение из множества F^n в F , которое каждому упорядоченному набору скаляров $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in F^n$ ставит в соответствие скаляр $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in F$. Этот скаляр естественно называть *значением формы* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе значений переменных $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Набор значений переменных $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется *ненулевым*, если найдется $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такой, что $x_i^0 \neq 0$.

Во многих приложениях важную роль играют формы над полем $\mathbb{R}$, значение которых на любом ненулевом наборе значений переменных больше 0. Их изучению и посвящен данный параграф.

Определение

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$, значение которой на любом ненулевом наборе значений переменных положительно, называется *положительно определенной*.

- *Всюду далее в этом параграфе рассматриваются только квадратичные формы над полем $\mathbb{R}$. В явном виде это, как правило, оговариваться не будет.*

Теорема 34.1

Пусть квадратичная форма $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет канонический вид $t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \dots + t_n y_n^2$. Форма f положительно определена тогда и только тогда, когда $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$.

Доказательство. Пусть форма f приводится к указанному в формулировке теоремы каноническому виду невырожденной линейной заменой переменных

[illegible]

Нам понадобится также обратная замена:

[illegible]

Она тоже невырожденна.

1-й критерий положительной определенности (2)

Необходимость. Предположим, что $t_i \leq 0$ для некоторого i . Положим $y'_i = 1$ и $y'_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$. Подставим в левые части равенств (2) y'_1 вместо y_1 , y'_2 вместо y_2 , ..., y'_n вместо y_n . Получим неоднородную крамеровскую систему линейных уравнений

[illegible]

Матрица этой крамеровской системы совпадает с матрицей замены (2). Поскольку эта замена невырождена, получаем, что определитель системы (3) отличен от нуля. По теореме Крамера система (3) имеет единственное решение $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Это решение — ненулевое, так как система (3) неоднородна. Поскольку $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \dots + t_n y_n^2$, имеем

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = t_1(y'_1)^2 + t_2(y'_2)^2 + \dots + t_n(y'_n)^2 = t_i \leq 0.$$

Следовательно, форма f не является положительно определенной.

Необходимость доказана.

1-й критерий положительной определенности (3)

Достаточность. Пусть $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ — произвольный ненулевой набор значений переменных формы f . Подставив их в равенства (2), получим набор $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ значений переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. Если $y'_1 = y'_2 = \dots = y'_n = 0$, то, подставив эти значения в правые части равенств (1), получим, что $x'_1 = x'_2 = \dots = x'_n = 0$. Следовательно, набор $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ — ненулевой. Поскольку, по условию, $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$, имеем

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = t_1(y'_1)^2 + t_2(y'_2)^2 + \dots + t_n(y'_n)^2 > 0.$$

Следовательно, форма f положительно определена. □

Критерий Сильвестра (1)

Для того, чтобы сформулировать еще один критерий положительной определенности формы, нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n . Миноры этой матрицы, расположенные в ее первых k строках и первых k столбцах (для всех $k = 1, 2, \dots, n$) называются **угловыми минорами** матрицы A . Угловым минором порядка k обозначается через Δ_k .

В частности, $\Delta_1 = a_{11}$ и $\Delta_n = |A|$.

Теорема 34.2 (критерий Сильвестра)

Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — квадратичная форма, а $A = (a_{ij})$ — ее матрица. Проведем доказательство индукцией по n .

База индукции очевидна: форма от одной переменной имеет вид $a_{11}x_1^2$. Ясно, что она положительно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} > 0$, а единственным угловым минором матрицы $A = (a_{11})$ этой формы является число a_{11} .

Шаг индукции. Пусть теперь $n > 1$. Представим форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{nn}x_n^2 + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n, \quad (4)$$

где $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ — сумма всех слагаемых формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не содержащих x_n . Обозначим угловые миноры матрицы A через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Ясно, что угловыми минорами матрицы формы $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ являются миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$.

Необходимость. Предположим, что форма f положительно определена. Если форма $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ не является положительно определенной, то существует ненулевой набор значений переменных $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ такой, что $g(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}) \leq 0$. Тогда

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0) = g(x'_1, \dots, x'_{n-1}) \leq 0,$$

что противоречит положительной определенности формы f . Таким образом, форма g положительно определена. По предположению индукции, ее угловые миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ положительны. Сделаем замену $X = TY$, которая приводит форму f к каноническому виду, и обозначим через D (диагональную) матрицу полученной формы. Из теоремы 34.1 вытекает, что $|D| > 0$.

В силу следствия 33.1 $\Delta_n = |A| > 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим теперь, что $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0$. В частности, все угловые миноры матрицы формы $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ положительны. По предположению индукции эта форма положительно определена. Пусть

[illegible]

— невырожденная линейная замена переменных, которая приводит форму g к каноническому виду $b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + b_{n-1\ n-1}y_{n-1}^2$. Поскольку форма g положительно определена, из теоремы 34.1 вытекает, что

$$b_{11}, b_{22}, \dots, b_{n-1, n-1} > 0. \quad (6)$$

Рассмотрим замену переменных

[illegible]

Обозначим матрицу замены (7) через T , а матрицу замены (5) — через T' . Разлагая определитель матрицы T по последней строке, имеем:

$$|T| = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1\,n-1} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2\,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1\,1} & t_{n-1\,2} & \dots & t_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1\,n-1} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1\,1} & t_{n-1\,2} & \dots & t_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} = |T'|.$$

Поскольку замена (5) невырожденна, получаем, что $|T| = |T'| \neq 0$, т.е. замена (7) тоже невырожденна.

Замена (7) переводит форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в форму

$$\begin{aligned}
 h(y_1, y_2, \dots, y_n) &= b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{n-1\ n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}y_n^2 + \\
 &\quad + 2a_{1n}(t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \dots + t_{1\ n-1}y_{n-1})y_n + \\
 &\quad + 2a_{2n}(t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \dots + t_{2\ n-1}y_{n-1})y_n + \\
 &\quad + \dots + 2a_{n-1\ n}(t_{n-1\ 1}y_1 + t_{n-1\ 2}y_2 + \dots + t_{n-1\ n-1}y_{n-1})y_n = \\
 &= b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{n-1\ n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}y_n^2 + \\
 &\quad + 2(a_{1n}t_{11} + a_{2n}t_{21} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ 1})y_1y_n + \\
 &\quad + 2(a_{1n}t_{12} + a_{2n}t_{22} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ 2})y_2y_n + \\
 &\quad + \dots + 2(a_{1n}t_{1\ n-1} + a_{2n}t_{2\ n-1} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ n-1})y_{n-1}y_n = \\
 &= b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{n-1\ n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}y_n^2 + \\
 &\quad + 2b_{1n}y_1y_n + 2b_{2n}y_2y_n + \dots + 2b_{n-1\ n}y_{n-1}y_n,
 \end{aligned}$$

где $b_{in} = a_{1n}t_{1i} + a_{2n}t_{2i} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Выделив полный квадрат по каждой из переменных $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, получим:

$$h(y_1, y_2, \dots, y_n) = b_{11} \left(y_1 + \frac{b_{1n}}{b_{11}} \cdot y_n \right)^2 + b_{22} \left(y_2 + \frac{b_{2n}}{b_{22}} \cdot y_n \right)^2 + \dots + b_{n-1, n-1} \left(y_{n-1} + \frac{b_{n-1, n}}{b_{n-1, n-1}} \cdot y_n \right)^2 + \left(a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}} - \frac{b_{2n}^2}{b_{22}} - \dots - \frac{b_{n-1, n}^2}{b_{n-1, n-1}} \right) y_n^2.$$

Сделаем замену переменных

[illegible]

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{b_{n-1n}}{b_{n-1n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1. Следовательно, замена (8) невырождена. Ясно, что

$$y_1 + \frac{b_{1n}}{b_{11}} \cdot y_n = z_1, y_2 + \frac{b_{2n}}{b_{22}} \cdot y_n = z_2, \dots, y_{n-1} + \frac{b_{n-1n}}{b_{n-1n-1}} \cdot y_n = z_{n-1}, y_n = z_n.$$

Поэтому после применения замены (8) форма $h(y_1, y_2, \dots, y_n)$ перейдет в форму

$$q(z_1, z_2, \dots, z_n) = b_{11}z_1^2 + b_{22}z_2^2 + \dots + b_{n-1n-1}z_{n-1}^2 + b_{nn}z_n^2,$$

где $b_{nn} = a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}} - \frac{b_{2n}^2}{b_{22}} - \dots - \frac{b_{n-1n}^2}{b_{n-1n-1}}$. Обозначим матрицу этой формы через D .

Форма $q(z_1, z_2, \dots, z_n)$ получена из формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ последовательным применением замен (7) и (8). По условию $|A| = \Delta_n > 0$. В силу следствия 33.1 $|D| > 0$. Матрица D диагональна, а на ее главной диагонали стоят числа $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$. Следовательно, $|D| = b_{11}b_{22} \cdots b_{nn} > 0$. Учитывая (6), получаем, что $b_{nn} > 0$. Еще раз учитывая (6), получаем, что форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительно определена в силу теоремы 34.1. □

Отрицательно определенные формы (1)

Определение

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ называется *отрицательно определенной*, если ее значение на любом ненулевом наборе значений переменных отрицательно.

Из критерия Сильвестра легко вытекает следующий критерий отрицательной определенности формы.

Следствие 34.1

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда все ее угловые миноры нечетных порядков отрицательны, а все ее угловые минора четных порядков положительны.

Доказательство. Форма f отрицательно определена тогда и только тогда, когда форма $-f$, получаемая из формы f умножением всех коэффициентов последней на -1 , положительно определена. Обозначим угловые миноры формы f через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, а угловые миноры формы $-f$ через $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$.

Отрицательно определенные формы (2)

Для всякого $k = 1, 2, \dots, n$ матрица, определителем которой является минор Δ'_k , имеет порядок k и получается из матрицы, определителем которой является минор Δ_k , умножением на -1 . Следовательно, $\Delta'_k = (-1)^k \Delta_k$. В силу критерия Сильвестра форма f отрицательно определена тогда и только тогда, когда $(-1)^k \Delta_k > 0$ для всякого k . Это, очевидно, эквивалентно тому, что $\Delta_k < 0$ при нечетных k и $\Delta_k > 0$ при четных k . □