

# Глава X. Квадратичные формы

## § 33. Приведение формы к каноническому виду и закон инерции

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт естественных наук и математики,  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

## 33.1. Понятие квадратичной формы. Канонический вид

### Определения

**Формой** над полем  $F$  называется многочлен от произвольного числа переменных над этим полем, в котором все одночлены имеют одну и ту же ненулевую степень. Эта степень называется **степенью формы**. Формы 1-й степени, т. е. многочлены вида  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ , а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — переменные, называются **линейными**. Формы 2-й степени называются **квадратичными**. Квадратичную форму принято записывать в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_{ij} \in F$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \leq j$ , а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — переменные. Скаляры  $a_{ij}$  называются **коэффициентами** формы (1).

В дальнейшем мы будем иметь дело почти исключительно с квадратичными формами. Поэтому слово «квадратичная» часто будет опускаться.

*! Всюду в дальнейшем, кроме тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, слово «форма» означает «квадратичная форма».*

## Определение

*Матрицей квадратичной формы* (1) называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Матрица любой квадратичной формы является симметрической.
- Кратко матрицу формы (1) записывают в виде  $A = (a_{ij})$ , полагая (как правило, неявно), что  $a_{ij} = a_{ji}$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

# Матричная запись квадратичной формы

Пусть  $A$  — матрица квадратичной формы (1). Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вычислив, согласно определению, произведение матриц  $X^T A X$ , можно убедиться, что оно представляет собой квадратную матрицу порядка 1, единственным элементом которой является правая часть равенства (1). отождествляя, как это часто делается, квадратную матрицу 1-го порядка с ее единственным элементом, можно записать форму (1) в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X. \quad (2)$$

## Определение

Правая часть равенства (2) называется *матричной записью* квадратичной формы (1).

## Определения

### Система равенств вида

[illegible]

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — наборы переменных, а  $b_{ij}$  — скаляры. называется *линейной заменой переменных*. Замена переменных (3) называется *невырожденной*, если матрица  $B = (b_{ij})$  невырожденна. Матрица  $B$  называется *матрицей замены переменных* (3). Замену (3) можно записать в виде  $X = BY$ , где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Замена переменных  $Y = B^{-1}X$  называется *обратной к замене*  $X = BY$ .

## Замечание 33.1

Если к квадратичной форме  $f = X^T A X$  применить замену переменных  $X = B Y$ , то получится квадратичная форма с матрицей  $B^T A B$ .

**Доказательство.** Подставив  $B Y$  вместо  $X$  в форму  $X^T A X$ , мы получим форму  $(B Y)^T A (B Y) = Y^T (B^T A B) Y$ , матрица которой равна  $B^T A B$ .  $\square$

Из этого замечания вытекает

## Следствие 33.1

Если квадратичная форма  $g$  получена из формы  $f$  невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм  $f$  и  $g$  либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0.

**Доказательство.** Пусть форма  $g = Y^T C Y$  получена из формы  $f = X^T A X$  невырожденной линейной заменой переменных  $X = B Y$ . В силу замечания 33.1  $C = B^T A B$ . Поскольку  $|B^T| = |B|$ , имеем  $|C| = |B^T A B| = |B^T| \cdot |A| \cdot |B| = |A| \cdot |B|^2$ . Остается учесть, что  $|B|^2 > 0$ .  $\square$

## Определение

Говорят, что квадратичная форма имеет **канонический вид**, если матрица этой формы диагональна. Иными словами, форма имеет канонический вид, если в ней все коэффициенты при произведениях различных переменных равны 0.

## Теорема 33.1

*Из любой квадратичной формы можно с помощью невырожденной линейной замены переменных получить квадратичную форму, имеющую канонический вид.*

**Доказательство.** Мы приведем два доказательства этого факта. Оба они конструктивны, т. е. содержат алгоритмы приведения формы к каноническому виду. Первый алгоритм (**метод Лагранжа**) менее громоздок и его удобно применять при решении задач. Второй алгоритм (**метод приведения формы к главным осям**) применим только к формам над полем  $\mathbb{R}$ . Он пригодится нам в § 41 при изучении поверхностей второго порядка.

# Метод Лагранжа (1)

**Метод Лагранжа.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — квадратичная форма с матрицей  $A = (a_{ij})$ . Назовем переменную  $x_i$  **фиктивной**, если  $a_{ij} = 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots, n$ . Если форма  $f$  содержит фиктивные переменные, то мы можем сначала привести к каноническому виду сумму всех слагаемых формы без фиктивных переменных, а затем добавить квадраты всех фиктивных переменных с коэффициентами 0. Поэтому будем далее считать, что форма не содержит фиктивных переменных. Покажем, что мы можем привести форму к виду

$$b_{11}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n), \quad (4)$$

где  $g(y_2, \dots, y_n)$  — квадратичная форма, зависящая только от переменных  $y_2, \dots, y_n$ . Если  $a_{1i} = 0$  для всех  $i > 1$ , то форма уже имеет такой вид (с точностью до обозначения переменных). Предположим поэтому, что  $a_{1i} \neq 0$  для некоторого  $i > 1$ . Для простоты обозначений будем считать, что  $i = 2$  (в общем случае рассуждения аналогичны). Дальнейшие рассмотрения разбиваются на два случая.

**Случай 1:**  $a_{11} \neq 0$ . Обозначим через  $f'$  сумму всех слагаемых формы  $f$ , не содержащих переменную  $x_1$ . Тогда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + f'(x_2, \dots, x_n).$$

Сумму слагаемых, содержащих  $x_1$ , дополним до полного квадрата:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11} \cdot \left( x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}^2} \right) - \\ &\quad - \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + f'(x_2, \dots, x_n) = \\ &= a_{11} \cdot \left( x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \right)^2 + g(x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где

$$g(x_2, \dots, x_n) = f'(x_2, \dots, x_n) - \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}.$$

Рассмотрим замену переменных

[illegible]

## Метод Лагранжа (3)

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1. В частности, замена (5) невырождена. Ясно, что

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}}, \quad y_2 = x_2, \dots, \quad y_n = x_n.$$

Следовательно, замена (5) приводит форму  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  к виду  $a_{11}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$ , т. е. к форме вида (4).

**Случай 2:**  $a_{11} = 0$ . Напомним, что  $a_{12} \neq 0$ . Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 & , \\ x_2 = y_1 - y_2 & , \\ x_3 = & y_3 & , \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n = & & y_n. \end{cases} \quad (6)$$

## Метод Лагранжа (4)

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ее через  $B$ . По предложению 6.11 имеем:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 = -2 \neq 0.$$

Таким образом, замена (6) невырожденна. Применив ее, получим форму, в которой коэффициент при  $y_1^2$  равен  $2a_{12}$ , и, в частности, отличен от 0. Это сводит ситуацию к случаю 1.

Итак, мы можем невырожденной линейной заменой переменных привести форму  $f$  к виду (4), т.е. избавиться от слагаемых, содержащих произведения  $x_1$  на другие переменные. После этого аналогичными действиями можно избавиться от слагаемых, содержащих произведения  $x_2$  на другие переменные, затем произведения  $x_3$  на другие переменные и т.д.

Через конечное число шагов слагаемых, содержащих произведения различных переменных не останется, и форма примет канонический вид. Теорема доказана (первым способом).  $\square$

*Метод приведения к главным осям.* Пусть  $f$  — квадратичная форма от  $n$  переменных над полем  $\mathbb{R}$ . Будем рассматривать матрицу  $A$  формы  $f$  как матрицу в стандартном базисе некоторого линейного оператора  $\mathcal{A}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Матрица  $A$  симметрична. В силу следствия 32.4 оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен. По следствию 32.5 существуют ортогональная матрица  $T$  и диагональная матрица  $D$  такие, что  $D = T^T A T$ . Применим к форме  $f = X^T A X$  невырожденную линейную замену переменных  $X = T Y$ . В силу замечания 33.1 мы получим форму, матрицей которой является матрица  $T^T A T = D$ . Таким образом, в результате этой замены матрица формы станет диагональной, т. е. форма будет приведена к каноническому виду. Теорема доказана (вторым способом).  $\square$

Более подробно алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям изложен на следующем слайде.

## Алгоритм 33.1 (алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям)

Дана квадратичная форма  $X^T A X$  от  $n$  переменных над полем  $\mathbb{R}$ . Матрица  $A$  симметрична. Линейный оператор в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , имеющий в стандартном базисе этого пространства матрицу  $A$ , самосопряжен (см. следствие 32.4). Находим сначала все собственные значения, а затем все линейно независимые собственные векторы матрицы  $A$ . Они образуют базис в  $\mathbb{R}^n$  (см. доказательство теоремы 32.2). Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны (см. лемму 32.2). Применяя при необходимости процесс ортогонализации к линейно независимым собственным векторам, соответствующим одному и тому же собственному значению, находим ортогональный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Нормируем векторы этого базиса и получаем ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы  $A$ . Записываем векторы этого базиса в матрицу по столбцам, обозначаем эту матрицу через  $T$ . Замена переменных  $X = TY$  приводит исходную форму к каноническому виду. Матрица полученной формы — это диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения матрицы  $A$ , причем каждое собственное значение стоит столько раз, сколько существует относящихся к нему линейно независимых собственных векторов.

## 33.2. Закон инерции

Из одной и той же квадратичной формы с помощью различных невырожденных линейных замен переменных можно получить бесконечно много форм канонического вида. Но, как показывает следующее утверждение, некоторые важные характеристики всех этих форм должны совпадать.

### Теорема 33.2 (закон инерции квадратичных форм)

*Если квадратичная форма над полем  $\mathbb{R}$  двумя различными невырожденными линейными заменами переменных приведена к двум различным формам, имеющим канонический вид, то полученные формы имеют одинаковое число положительных коэффициентов при квадратах переменных и одинаковое число отрицательных коэффициентов при квадратах переменных.*

**Доказательство.** Предположим, что мы привели квадратичную форму  $f = X^T A X$  к каноническому виду  $g = Y^T D Y$ . По определению канонического вида формы, матрица  $D$  диагональна.



а невырожденной линейной заменой переменных

[illegible]

— к каноническому виду

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \dots + s_p z_p^2 - s_{p+1} z_{p+1}^2 - s_{p+2} z_{p+2}^2 - \dots - s_{p+q} z_{p+q}^2, \quad (10)$$

где  $s_1, s_2, \dots, s_{p+q} > 0$ . В силу сказанного выше,  $k + \ell = p + q$ . Требуется доказать, что  $k = p$  и  $\ell = q$ . Ясно, что одно из этих равенств следует из другого, и потому достаточно доказать какое-нибудь одно из них. Докажем, что  $k = p$ . Предположим противное: пусть  $k \neq p$ . Для определенности будем считать, что  $k < p$ .

Так как замены переменных (7) и (9) невырожденные, существуют обратные к ним замены переменных. Пусть замена переменных

[illegible]

обратна к (7), а замена переменных

[illegible]

обратна к (9). Замены (11) и (12) также невырождены.

Проверим, что существует ненулевой набор значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при подстановке которых в правые части равенств (11) и (12) возникают равенства

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \cdots = z_n = 0.$$

Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n = 0, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ d_{k1}x_1 + d_{k2}x_2 + \cdots + d_{kn}x_n = 0, \\ f_{p+1\ 1}x_1 + f_{p+1\ 2}x_2 + \cdots + f_{p+1\ n}x_n = 0, \\ f_{p+2\ 1}x_1 + f_{p+2\ 2}x_2 + \cdots + f_{p+2\ n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \cdots + f_{nn}x_n = 0. \end{array} \right. \quad (13)$$

Это однородная система линейных уравнений, число уравнений в которой равно  $k + n - p$ . Поскольку  $k < p$ , получаем, что  $k + n - p < n$ . В силу замечания 5.4 система (13) имеет ненулевое решение  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ .

## Закон инерции (6)

Подставив эти значения вместо переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в правые части равенств (11) и (12), получим значения левых частей этих равенств:

$$y_1 = y'_1, y_2 = y'_2, \dots, y_n = y'_n, z_1 = z'_1, z_2 = z'_2, \dots, z_n = z'_n.$$

Из того, что  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  — решение системы (13), вытекает, что

$$y'_1 = y'_2 = \dots = y'_k = z'_{p+1} = z'_{p+2} = \dots = z'_n = 0. \quad (14)$$

Равенство (8) означает, что если в его левой части произвести замену переменных (7), то мы получим правую часть этого равенства. Отсюда и из того, что  $y'_1 = y'_2 = \dots = y'_k = 0$ , следует, что

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) &= t_1(y'_1)^2 + t_2(y'_2)^2 + \dots + t_k(y'_k)^2 - \\ &- t_{k+1}(y'_{k+1})^2 - t_{k+2}(y'_{k+2})^2 - \dots - t_{k+\ell}(y'_{k+\ell})^2 = \\ &= -t_{k+1}(y'_{k+1})^2 - t_{k+2}(y'_{k+2})^2 - \dots - t_{k+\ell}(y'_{k+\ell})^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогично из равенства (10) и того, что  $z'_{p+1} = z'_{p+2} = \dots = z'_n = 0$ , следует, что

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) &= s_1(z'_1)^2 + s_2(z'_2)^2 + \dots + s_p(z'_p)^2 - \\ &- s_{p+1}(z'_{p+1})^2 - s_{p+2}(z'_{p+2})^2 - \dots - s_{p+q}(z'_{p+q})^2 = \\ &= s_1(z'_1)^2 + s_2(z'_2)^2 + \dots + s_p(z'_p)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

## Закон инерции (7)

Итак,  $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \leq 0$  и  $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \geq 0$ . Следовательно,  $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 0$ . Но тогда  $s_1(z'_1)^2 + s_2(z'_2)^2 + \dots + s_p(z'_p)^2 = 0$ . Поскольку  $s_1, s_2, \dots, s_p > 0$ , это означает, что  $z'_1 = z'_2 = \dots = z'_p = 0$ . Учитывая равенства (14), имеем

$$z'_1 = z'_2 = \dots = z'_n = 0. \quad (15)$$

Пусть  $F = (f_{ij})$  — матрица замены (12). Обозначим векторы-столбцы этой матрицы через  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ . Равенства (12) можно переписать в виде векторного равенства  $x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \dots + x_n\mathbf{f}_n = \mathbf{z}$ , где  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Положим  $\mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$ . В силу (15),  $x'_1\mathbf{f}_1 + x'_2\mathbf{f}_2 + \dots + x'_n\mathbf{f}_n = \mathbf{z}' = \mathbf{0}$ . Поскольку среди чисел  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  есть ненулевые, получаем, что векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  линейно зависимы. Следовательно, ранг матрицы  $F$  по столбцам меньше  $n$ . В силу теоремы о ранге матрицы, ее ранг по минорам также меньше  $n$ . Это означает, что  $|F| = 0$ . Но это не так, поскольку замена (12) невырожденна. Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что  $k \neq p$ , ложно. Следовательно,  $k = p$ . □

## 33.3. Эквивалентность квадратичных форм

### Определение

Квадратичные формы  $f$  и  $g$  над полем  $\mathbb{R}$  называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью невырожденной линейной замены переменных.

Чтобы сформулировать критерий эквивалентности квадратичных форм, нам понадобятся некоторые новые понятия.

### Определения

Пусть  $f$  — квадратичная форма над полем  $\mathbb{R}$ , а  $g$  — форма канонического вида, полученная из формы  $f$  с помощью невырожденной линейной замены переменных. Число положительных [отрицательных] коэффициентов при квадратах переменных в форме  $g$  называется *положительным* [отрицательным] *индексом инерции* формы  $f$ .

### Предложение 33.1

*Квадратичные формы  $f$  и  $g$  над полем  $\mathbb{R}$  эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый положительный индекс инерции и одинаковый отрицательный индекс инерции.*

**Доказательство. Необходимость.** Существует невырожденная линейная замена переменных  $X = TY$ , с помощью которой из формы  $f$  получается форма  $g$ . Пусть, далее,  $Y = SZ$  — невырожденная линейная замена переменных, которая приводит форму  $g$  к форме канонического вида  $h$ . Тогда линейная замена переменных  $X = (TS)Z$  невырожденна (поскольку  $|TS| = |T| \cdot |S| \neq 0$ ) и приводит форму  $f$  к форме  $h$ . Поскольку мы привели формы  $f$  и  $g$  к одной и той же форме канонического вида, положительный и отрицательный индексы инерции у этих форм совпадают.

**Достаточность.** Предположим, что формы  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g = g(y_1, y_2, \dots, y_n)$  имеют одинаковый положительный индекс инерции  $k$  и одинаковый отрицательный индекс инерции  $\ell$ . Пусть форма  $f$  невырожденной линейной заменой переменных  $X = TX'$  приводится к форме канонического вида  $h_f$ , а форма  $g$  невырожденной линейной заменой переменных  $Y = SY'$  приводится к форме канонического вида  $h_g$ . Каждая из форм  $h_f$  и  $h_g$  имеет  $k$  положительных и  $\ell$  отрицательных коэффициентов при квадратах переменных. Переименовав при необходимости переменные, можно добиться того, что в каждой из форм  $h_f$  и  $h_g$  коэффициенты при первых  $k$  переменных положительны, а при последних  $\ell$  отрицательны. Пусть

$$\begin{aligned}h_f &= a_1(x'_1)^2 + \dots + a_k(x'_k)^2 - a_{k+1}(x'_{k+1})^2 - \dots - a_{k+\ell}(x'_{k+\ell})^2, \\h_g &= b_1(y'_1)^2 + \dots + b_k(y'_k)^2 - b_{k+1}(y'_{k+1})^2 - \dots - b_{k+\ell}(y'_{k+\ell})^2,\end{aligned}$$

где  $a_1, \dots, a_{k+\ell}, b_1, \dots, b_{k+\ell} > 0$ .

## Эквивалентность квадратичных форм (4)

Рассмотрим следующую линейную замену переменных:

$$\begin{cases} x'_1 = \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} y'_1, \\ x'_2 = \sqrt{\frac{b_2}{a_2}} y'_2, \\ \dots\dots\dots \\ x'_{k+\ell} = \sqrt{\frac{b_{k+\ell}}{a_{k+\ell}}} y'_{k+\ell}. \end{cases}$$

Обозначим матрицу этой замены через  $U$ . Очевидно, что

$|U| = \sqrt{\frac{b_1 b_2 \dots b_{k+\ell}}{a_1 a_2 \dots a_{k+\ell}}} \neq 0$ , и потому линейная замена переменных  $X' = UY'$  невырожденна. Применяя эту замену к форме  $h_f$ , получаем форму  $h_g$ .

Таким образом, применив к форме  $f$  замену  $X = TX'$ , к полученной форме  $h_f$  замену  $X' = UY'$ , а к полученной форме  $h_g$  замену  $Y' = S^{-1}Y$ , мы получим форму  $g$ . Последовательное применение нескольких невырожденных линейных замен переменных является невырожденной линейной заменой переменных (поскольку определитель произведения невырожденных матриц равен произведению их определителей, и потому не равен 0). Таким образом, форма  $g$  может быть получена из формы  $f$  невырожденной линейной заменой переменных. □