§ 32. Самосопряженные операторы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

32.1. Линейные функционалы в пространстве со скалярным произведением

Пусть V — пространство со скалярным произведением над полем F, а **a** — фиксированный вектор из V. Из аксиом скалярного произведения вытекает, что отображение $\mathcal{A}$ из V в F, задаваемое правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$, является линейным функционалом. Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением всякий линейный функционал устроен именно так. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 32.1

Пусть V — конечномерное векторное пространство со скалярным произведением над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный функционал из V в F. Тогда существует, и притом только один, вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$.

Строение линейного функционала (2)

Доказательство. *Существование.* Поле F, рассматриваемое как векторное пространство над самим собой, порождается любым своим ненулевым элементом. Следовательно, $\dim F = 1$, и потому размерность любого подпространства пространства F равна либо 0, либо 1. В частности, это верно для подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Если $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = 0$, то $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{0\}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 0 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{0}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Поэтому в качестве искомого вектора $\mathbf{a}$ можно взять нулевой вектор.

Пусть теперь $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = 1$. По теореме о ранге и дефекте $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = n - 1$, где $n = \dim V$. В силу теоремы 31.5 $\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{\perp} = n - (n-1) = 1$. Зафиксируем ненулевой вектор $\mathbf{y} \in (\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{\perp}$ и положим $\alpha = \mathcal{A}(\mathbf{y})$. Проверим, что вектор

$$\mathbf{a} = \frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2}\cdot\mathbf{y}$$

является искомым, т. е. что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Из того, что $\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{\perp} = 1$ вытекает, что пространство $(\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{\perp}$ порождается вектором $\mathbf{y}$. Пусть $\mathbf{x} \in V$. Учитывая, что, в силу теоремы 31.5, $V = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \oplus (\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{\perp}$, получаем, что $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \beta\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и некоторого $\beta \in F$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{z} + \beta\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{z}) + \mathcal{A}(\beta\mathbf{y}) = 0 + \beta\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \beta\alpha.$$

Строение линейного функционала (3)

С другой стороны, учитывая, что $\mathbf{zy} = 0$, а $\overline{\mathbf{y}^2} = \mathbf{y}^2$ (поскольку $\mathbf{y}^2 \in \mathbb{R}$), имеем:

$$\mathbf{xa} = (\mathbf{z} + \beta\mathbf{y})\Big(\frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}\Big) = \mathbf{z}\Big(\frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}\Big) + (\beta\mathbf{y})\Big(\frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}\Big) =$$
$$= \frac{\overline{\overline{\alpha}}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{zy} + \frac{\beta\,\overline{\overline{\alpha}}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}^2 = 0 + \beta\alpha = \beta\alpha.$$

Таким образом, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \beta\alpha = \mathbf{xa}$.

Единственность. Если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ в силу ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением. $\square$

32.2. Отображение, сопряженное к данному

Определения

Пусть V и W — пространства со скалярным произведением над одним и тем же полем, а $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W. Отображение $\mathcal{B}$ из W в V называется *сопряженным к отображению* $\mathcal{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{y} \in W$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{y})$. Отображение, сопряженное к $\mathcal{A}$, обозначается через $\mathcal{A}^*$. Ясно, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, то сопряженное к нему отображение (если оно существует) также является оператором в V. Этот оператор называется *оператором, сопряженным к* $\mathcal{A}$.

Из определения не вытекает ни существование отображения, сопряженного к $\mathcal{A}$, ни его линейность.

Предложение 32.1

Пусть V и W — пространства со скалярным произведением над полем F. Для произвольного линейного отображения $\mathcal{A}$ из V в W существует сопряженное к нему отображение. Это отображение определено однозначно и линейно.

Доказательство. *Существование.* Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{y} \in W$ и рассмотрим отображение $\mathcal{F}_\mathbf{y}$ из V в F, заданное правилом $\mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Это отображение является линейным функционалом, поскольку если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ и $t \in F$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)\big) \cdot \mathbf{y} = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{y} + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_2),\\ \text{и} \quad \mathcal{F}_\mathbf{y}(t\mathbf{x}_1) &= \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{y} = \big(t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)\big) \cdot \mathbf{y} = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{y}\big) = t\mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_1).\end{aligned}$$

По теореме 32.1 существует однозначно определенный вектор $\mathbf{y}' \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}'$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Определим отображение $\mathcal{B}$ из W в V правилом: $\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'$ для всякого $\mathbf{y} \in W$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}' = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{y})$ для всякого $\mathbf{x} \in V$ и всякого $\mathbf{y} \in W$. Следовательно, отображение $\mathcal{B}$ сопряжено к $\mathcal{A}$.

Единственность. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — отображения, сопряженные к $\mathcal{A}$, $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{y} \in W$. Тогда $\mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_1(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_2(\mathbf{y})$. Таким образом, для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполнено равенство $\mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_2(\mathbf{y})$. Из ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением вытекает, что $\mathcal{B}_1(\mathbf{y}) = \mathcal{B}_2(\mathbf{y})$. Поскольку это равенство выполнено для любого вектора $\mathbf{y} \in W$, получаем, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Отображение, сопряженное к данному (4)

Линейность. Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W$. Для любого $\mathbf{x} \in V$, с одной стороны, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$, а с другой,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}_1 + \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}_2 = \\ = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \cdot \big(\mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2)\big).$$

Таким образом, $\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \cdot \big(\mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2)\big)$. В силу ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением получаем, что $\mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2)$.
Пусть теперь $t \in F$ и $\mathbf{y} \in W$. Для любого $\mathbf{x} \in V$, с одной стороны, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (t\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(t\mathbf{y})$, а с другой,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (t\mathbf{y}) = \overline{t}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}\big) = \overline{t}\big(\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x} \cdot \big(\overline{\overline{t}}\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x} \cdot \big(t\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big).$$

Таким образом, $\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(t\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \big(t\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big)$. Вновь ссылаясь на ослабленный закон сокращения в пространстве со скалярным произведением, получаем, что $\mathcal{A}^*(t\mathbf{y}) = t\mathcal{A}^*(\mathbf{y})$. Мы доказали, что отображение $\mathcal{A}^*$ линейно. $\square$

Следующее утверждение показывает, как связаны между собой матрицы отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

Предложение 32.2

Пусть V и W — пространства со скалярным произведением над одним и тем же полем, Q — базис пространства V, R — базис пространства W, $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W, A — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах Q и R, а B — матрица отображения $\mathcal{A}^*$ в базисах R и Q. Тогда:

а) $B = \overline{G_Q^{-1} A^\top G_R}$;

б) *если пространства V и W евклидовы, то* $B = G_Q^{-1} A^\top G_R$.

Доказательство. а) Пусть $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{y} \in W$. В силу формулы (1) из § 26 $[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_R = A \cdot [\mathbf{x}]_Q$. С учетом предложения 30.2, имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_R^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R} = (A \cdot [\mathbf{x}]_Q)^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot A^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R}.$$

С другой стороны, формула (1) из § 26 влечет, что $[\mathcal{A}^*(\mathbf{y})]_Q = B \cdot [\mathbf{y}]_R$, и потому

$$\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{[\mathcal{A}^*(\mathbf{y})]_Q} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{B \cdot [\mathbf{y}]_R} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{B} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R}.$$

Матрица сопряженного отображения (2)

Поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y})$, получаем, что

$$[\mathbf{x}]_Q^\top \cdot A^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{B} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R}.$$

Поскольку $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы из V и W соответственно, из последнего равенства и ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением вытекает, что $A^\top G_R = G_Q \overline{B}$, откуда $\overline{B} = G_Q^{-1} A^\top G_R$. Следовательно, $B = \overline{\overline{B}} = \overline{G_Q^{-1} A^\top G_R Q}$.

б) непосредственно вытекает из а). $\square$

Из предложения 32.2 непосредственно вытекает

Следствие 32.1

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве со скалярным произведением V, Q — базис пространства V, а A и B — матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в базисе Q соответственно. Тогда:

а) $B = \overline{G_Q^{-1} A^\top G_Q}$;

б) *если пространство V евклидово, то* $B = G_Q^{-1} A^\top G_Q$. $\square$

Матрица сопряженного отображения в ортонормированных базисах

Поскольку матрица Грама ортонормированного базиса является единичной матрицей, из предложения 32.2 непосредственно вытекает

Следствие 32.2

Пусть V и W — пространства со скалярным произведением над одним и тем же полем, Q — ортонормированный базис пространства V, R — ортонормированный базис пространства W, а $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W. Если отображение $\mathcal{A}$ имеет в базисах Q и R матрицу A, то:

а) *отображение $\mathcal{A}^*$ имеет в базисах R и Q матрицу A^*;*

б) *если пространства V и W евклидовы, то отображение $\mathcal{A}^*$ имеет в базисах R и Q матрицу $A^\top$.* □

Следующий факт непосредственно вытекает из следствия 32.1 и является специализацией следствия 32.2 для линейных операторов.

Следствие 32.3

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве со скалярным произведением V, а Q — ортонормированный базис пространства V. Если оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе Q матрицу A, то:

а) *оператор $\mathcal{A}^*$ имеет в базисе Q матрицу A^*;*

б) *если пространство V евклидово, то оператор $\mathcal{A}^*$ имеет в базисе Q матрицу $A^\top$.* □

32.3. Самосопряженный оператор

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V называется *самосопряженным*, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, т. е. если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y})$.

Приведем пример самосопряженного оператора. Пусть S — подпространство пространства со скалярным произведением V. В силу теоремы 31.5 $V = S \oplus S^{\perp}$. Оператор проектирования на S параллельно $S^{\perp}$ (см. пример 5 в § 26) называется *оператором ортогонального проектирования на подпространство* S и обозначается через $\mathcal{P}_S$. Иными словами, оператор $\mathcal{P}_S$ ставит в соответствие каждому вектору из V его ортогональную проекцию на S. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда, с одной стороны,

$$\mathcal{P}_S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_{\perp}(\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{y}^{\perp}) = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}^{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + 0 = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp},$$

а с другой, —

$$\mathbf{x} \cdot \mathcal{P}_S(\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp})\mathbf{y}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp}\mathbf{y}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + 0 = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{P}_S(\mathbf{y})$, т. е. $\mathcal{P}_S$ — самосопряженный оператор.

Определение

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ называется *эрмитовой*, если $A = A^*$.

Предложение 32.3

Для произвольного линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор;*

б) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе пространства V эрмитова;*

в) *существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ эрмитова.*

Доказательство. Импликация а) $\Longrightarrow$ б) вытекает из следствия 32.3, а импликация б) $\Longrightarrow$ в) очевидна. Осталось доказать импликацию в) $\Longrightarrow$ а).

Матрица самосопряженного оператора (2)

в) $\Longrightarrow$ а) Пусть P — тот ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ эрмитова. Обозначим эту матрицу через A. Тогда $A = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top$, и потому $A^\top = (\overline{A}^\top)^\top = \overline{A}$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_P^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} && \text{по теореме 31.2} \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot A^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} && \text{по формуле (2) из § 26} \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{A} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} && \text{так как } A^\top = \overline{A} \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{A \cdot [\mathbf{y}]_P} && \text{так как } \overline{B} \cdot \overline{C} = \overline{BC} \text{ для любых матриц } B \text{ и } C \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{[\mathcal{A}(\mathbf{y})]_P} && \text{по формуле (1) из § 26} \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) && \text{по теореме 31.2.}
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y})$, и потому оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. $\square$

Определение

Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A = A^{\top}$.

Очевидно, что квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$ эрмитова тогда и только тогда, когда она является симметрической матрицей. Поэтому из предложения 32.3 немедленно вытекает

Следствие 32.4

Для произвольного линейного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор;*

б) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе пространства V симметрична;*

в) *существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ симметрична.* $\square$

Основная теорема о самосопряженном операторе: формулировка и доказательство достаточности

Теорема 32.2

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве V со скалярным произведением является самосопряженным тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна, причем все числа на ее главной диагонали являются действительными.

Доказательство. *Достаточность.* Очевидно, что диагональная матрица, в которой все числа на главной диагонали действительны, эрмитова. Поэтому достаточность непосредственно вытекает из предложения 32.3.

Основная теорема о самосопряженном операторе: схема доказательства необходимости (1)

Необходимость вытекает из следующих трех лемм.

Лемма 32.1

Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ являются действительными числами.

Лемма 32.2

Собственные векторы самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, соответствующие его различным собственным значениям, ортогональны.

Лемма 32.3

Если N — корневое подпространство пространства V относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то всякий ненулевой вектор из N является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$.

Основная теорема о самосопряженном операторе: схема доказательства необходимости (2)

Покажем, как необходимость вытекает из этих трех лемм. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор в пространстве V. Основным полем пространства V является одно из полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. В силу леммы 32.1 все корни уравнения $\chi_{\mathcal{A}}(x) = 0$ лежат в основном поле. Это означает, что многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ разложим над этим полем на линейные множители. Пусть $N_1, N_2, \ldots, N_m$ — всевозможные корневые подпространства пространства V относительно оператора $\mathcal{A}$. По теореме 29.3 $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} N_i$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ обозначим через P_i ортонормированный базис пространства N_i и положим $P = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$. В силу замечания 21.6 P — базис в V. В силу леммы 32.2 этот базис ортонормирован. Согласно лемме 32.3, P состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе P диагональна, а на ее главной диагонали стоят собственные значения оператора $\mathcal{A}$, которые, в силу леммы 32.1, являются действительными числами.

Доказательство леммы 32.1. Пусть λ — корень характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$. Зафиксируем некоторый базис P пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда выполнено равенство $|A - \lambda E| = 0$. В силу следствия 7.3 система линейных уравнений $(A - \lambda E)X = O$ имеет ненулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $\mathbf{x}$ вектор с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе P. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{xx} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda} \cdot \mathbf{xx}.$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})$, и потому $\lambda(\mathbf{xx}) = \overline{\lambda}(\mathbf{xx})$, т. е. $(\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \mathbf{xx} = 0$. Но $\mathbf{xx} \neq 0$, поскольку $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $\lambda = \overline{\lambda}$, т. е. $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Доказательство леммы 32.2. Пусть λ_1 и λ_2 — различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы, относящиеся к собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно. Учитывая, что $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$ в силу леммы 32.1, имеем

$$\lambda_1(\mathbf{xy}) = (\lambda_1\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\lambda_2\mathbf{y}) = \overline{\lambda_2}\,(\mathbf{xy}) = \lambda_2(\mathbf{xy}),$$

откуда $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{xy}) = 0$. Учитывая, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем, что $\mathbf{xy} = 0$, т. е. $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны. $\square$

Доказательство леммы 32.3. По определению корневого подпространства, $N = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^s$, где λ — некоторое собственное значение оператора $\mathcal{A}$, а s — минимальное натуральное число с тем свойством, что $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^s = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{s+1}$. Для того, чтобы доказать, что все ненулевые векторы из N являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, достаточно показать, что $s = 1$, т. е. что $N = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. В самом деле, в этом случае для любого вектора $\mathbf{x} \in N$ выполнено равенство $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

Требуется доказать, что $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2$. Включение $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \subseteq \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2$ очевидно, так как $\operatorname{Ker}\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{B}^2$ для любого линейного оператора $\mathcal{B}$. Осталось проверить, что $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \subseteq \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Пусть $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2$. Положим $\mathbf{y} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x})$. Достаточно доказать, что $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, так как в этом случае $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Ясно, что $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. С другой стороны, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{y}) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, и потому $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Таким образом, $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \cap \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Поэтому достаточно установить, что $\operatorname{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \cap \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \{\mathbf{0}\}$. Поскольку $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \cap \big(\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\big)^\perp = \{\mathbf{0}\}$, для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что $\operatorname{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \subseteq \big(\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\big)^\perp$.

Доказательство леммы 32.3 (2)

Пусть $\mathbf{a} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. В силу сказанного выше достаточно убедиться в том, что $\mathbf{ab} = 0$. Из выбора вектора $\mathbf{a}$ вытекает, что $\mathbf{a} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{c}) = \mathcal{A}(\mathbf{c}) - \lambda\mathbf{c}$ для некоторого вектора $\mathbf{c}$. А из выбора вектора $\mathbf{b}$ следует, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathcal{A}(\mathbf{b}) - \lambda\mathbf{b} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathcal{A}(\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{b}$. Используя тот факт, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, а $\lambda = \overline{\lambda}$ (в силу леммы 32.1), имеем

$$\mathbf{ab} = (\mathcal{A}(\mathbf{c}) - \lambda\mathbf{c})\mathbf{b} = \mathcal{A}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\lambda\mathbf{c})\mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{cb}) =$$
$$= \mathbf{c}(\lambda\mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{cb}) = \overline{\lambda}(\mathbf{cb}) - \lambda(\mathbf{cb}) = \lambda(\mathbf{cb}) - \lambda(\mathbf{cb}) = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Тем самым мы завершили доказательство теоремы 32.2. $\square$

Предложение 32.4

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ эрмитова тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица T и диагональная матрица D с действительными числами на главной диагонали такие, что $D = T^*AT$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A — эрмитова матрица, P — ортонормированный базис унитарного пространства V, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, имеющий в базисе P матрицу A. Из предложения 32.3 вытекает, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. В силу теоремы 32.2 в пространстве V существует ортонормированный базис Q, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна с действительными числами на главной диагонали. Обозначим эту матрицу через D и положим $T = T_{PQ}$. Тогда $D = T^{-1}AT$, а из предложения 31.2 вытекает, что $T^{-1} = T^*$. Следовательно, $D = T^*AT$.

Достаточность. Пусть $D = T^*AT$, где матрица T унитарна, а матрица D — диагональная с действительными числами на главной диагонали. По определению унитарной матрицы $T^{-1} = T^* = \overline{T^\top}$. Следовательно, $A = (T^*)^{-1}DT^{-1} = (T^{-1})^{-1}DT^{-1} = TDT^{-1}$. Учитывая, что $\overline{D^\top} = D$, имеем

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{(TDT^{-1})^\top} = \overline{(T^{-1})^\top D^\top T^\top} = \overline{(T^{-1})^\top} \cdot \overline{D^\top} \cdot \overline{T^\top} =$$
$$= \left(\overline{T^{-1}}\right)^\top DT^{-1} = \left(\overline{\overline{T^\top}}\right)^\top DT^{-1} = (T^\top)^\top DT^{-1} = TDT^{-1} = A.$$

Следовательно, матрица A эрмитова. □

Заменив в доказательстве этого утверждения ссылку на предложение 31.2 ссылкой на следствие 31.3, мы получаем

Следствие 32.5

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{R}$ является симметрической тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D такие, что $D = T^\top AT$. □