§ 31. Ортогональность

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

31.1. Определение и простейшие свойства ортогональных векторов

Из определения угла между векторами вытекает, в частности, что в евклидовом пространстве $\widehat{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{xy} = 0$ (точный аналог критерия ортогональности векторов в обычном пространстве из § 9). Это делает естественным следующее

Определение

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $\mathbf{xy} = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1. Тот факт, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, будем записывать в виде $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Отметим, что в силу равенства (3) из § 30 справедливо следующее

Замечание 31.1

Нулевой вектор ортогонален любому вектору. □

Замечание 31.2 («теорема Пифагора»)

Если $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *— ортогональные векторы в пространстве со скалярным произведением, то* $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

Доказательство. Используя ортогональность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеем:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{aa}+\mathbf{ab}+\mathbf{ba}+\mathbf{bb} = \mathbf{aa}+\mathbf{bb} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2,$$

что и требовалось доказать. $\square$

В случае плоскости или обычного 3-мерного пространства, доказанное утверждение превращается в «обычную» теорему Пифагора из элементарной геометрии: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (см. рис. 1). Этим и объясняется название этого утверждения.

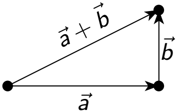

Рис. 1. Прямоугольный треугольник

Укажем одно важное свойство ортогональных наборов векторов.

Теорема 31.1

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ и $t_i \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$. Умножим обе части этого равенства скалярно на $\mathbf{a}_i$. Учитывая, что набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ ортогонален, имеем

$$0 = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_i + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_i + \cdots + t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i + \cdots + t_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_i = t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i.$$

Поскольку $t_i \neq 0$, из равенства $t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i = 0$ вытекает, что $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i = 0$, и потому $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Но это противоречит условию. □

Следствие 31.1

Любой ортонормированный набор векторов линейно независим. □

Определение

Ортогональный [ортонормированный] набор векторов, который является базисом, называется *ортогональным* [соответственно *ортонормированным*] *базисом*.

Примером ортонормированного базиса является стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (если скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ определить как сумму произведений одноименных компонент).

Очевидно, что матрицей Грама ортонормированного базиса является единичная матрица. Из предложения 30.2 немедленно вытекает

Теорема 31.2

Пусть V — пространство со скалярным произведением, а P — ортонормированный базис в V. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_P^{\top} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} \qquad (1)$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. □

Перепишем равенство (1) на языке координат векторов. Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют в ортонормированном базисе координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответственно, то, в силу, (1), имеем

$$\mathbf{xy} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$

В евклидовом пространстве эта формула принимает совсем простой вид:

$$\mathbf{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Из определений длины вектора, угла между векторами и расстояния между векторами немедленно вытекает, что в евклидовом пространстве справедливы также формулы

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}};$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Отметим, что четыре последние формулы являются точными аналогами соответствующих формул из векторной алгебры, присутствующих в § 9 и 11.

31.2. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Дополнение до ортогонального базиса

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Ответ на него содержится в следующем утверждении. В доказательстве этого утверждения указан способ нахождения ортонормированного базиса, который называется *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Теорема 31.3

Любое ненулевое пространство со скалярным произведением V имеет ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V. Построим ортогональный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ пространства V. Векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ будем находить последовательно — сначала $\mathbf{b}_1$, затем $\mathbf{b}_2$ и т. д.

Положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Пусть $2 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что мы уже построили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_{i-1}$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{i-1}$. Положим

$$\mathbf{b}_i = -\frac{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1}\cdot\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2}\cdot\mathbf{b}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_{i-1}}{\mathbf{b}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}}\cdot\mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{a}_i. \qquad (2)$$

Умножая скалярно обе части равенства (2) на $\mathbf{b}_1$ справа и учитывая, что вектор $\mathbf{b}_1$ ортогонален к векторам $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$, получаем, что

$$\mathbf{b}_i\mathbf{b}_1 = -\frac{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} \cdot \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_1 = -\mathbf{a}_i\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_1 = 0.$$

Аналогично, умножая скалярно обе части равенства (2) на $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$ справа и учитывая, что вектора $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$ попарно ортогональны, можно проверить, что $\mathbf{b}_i\mathbf{b}_2 = \cdots = \mathbf{b}_i\mathbf{b}_{i-1} = 0$. Следовательно, набор векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_i$ ортогонален. Напомним, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_{i-1}$. Отсюда вытекает, что равенство (2) можно записать в виде

$$\mathbf{b}_i = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}$ — некоторые числа. Иными словами, вектор $\mathbf{b}_i$ равен некоторой нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$. Поскольку эти векторы входят в базис пространства V, они линейно независимы. Следовательно, $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$. Итак, мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_i$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$.

Повторив указанные выше построения нужное число раз, мы в конце концов получим ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, принадлежащих V. По теореме 31.1 этот набор векторов линейно независим. Поскольку число векторов в нем совпадает с размерностью V, он является базисом V. В силу замечания 30.1 для того, чтобы получить ортонормированный базис подпространства V, достаточно разделить каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ на его длину. $\square$

Теорема 31.4

Любую ортогональную систему ненулевых векторов пространства со скалярным произведением V можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — ортогональный набор ненулевых векторов пространства V. Обозначим размерность пространства V через n. Нам достаточно найти ортогональный набор из n ненулевых векторов пространства V, содержащий векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. В самом деле, в силу теоремы 31.1 такой набор векторов будет линейно независимым, а поскольку число векторов в нем равно размерности пространства V, он будет базисом этого пространства.

Если $k = n$, то, в силу сказанного выше, уже сам набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ является ортогональным базисом пространства V. Поэтому далее можно считать, что $k < n$. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — ортонормированный базис пространства V, существующий в силу теоремы 31.3. Пусть вектор $\mathbf{a}_i$ имеет в этом базисе координаты $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$).

Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kn}x_n & = & 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Поскольку $k < n$, эта система имеет по крайней мере одно ненулевое решение (см. замечание 5.4). Обозначим его через $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и положим $\mathbf{a}_{k+1} = \overline{c_1}\,\mathbf{b}_1 + \overline{c_2}\,\mathbf{b}_2 + \cdots + \overline{c_n}\,\mathbf{b}_n$. Учитывая теорему 31.2, имеем:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{k+1} = a_{i1}\,\overline{\overline{c_1}} + a_{i2}\,\overline{\overline{c_2}} + \cdots + a_{in}\,\overline{\overline{c_n}} = a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = 0$$

для всякого $i = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Если $k + 1 = n$, то он является ортогональным базисом пространства V. В противном случае, рассуждая так же, как выше, при построении вектора $\mathbf{a}_{k+1}$, мы дополним набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+1}$ еще одним вектором $\mathbf{a}_{k+2}$ так, что набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+2}$ будет ортогональным набором ненулевых векторов. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов построим ортогональный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ пространства V, являющийся расширением исходного набора векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. $\square$

Из теоремы 31.4 вытекает

Следствие 31.2

Любую ортонормированную систему векторов пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.

Доказательство. Все векторы ортонормированной системы — ненулевые (поскольку их длины равны 1). В силу теоремы 31.4 нашу ортонормированную систему можно дополнить до ортогонального базиса. Разделим каждый из найденных при этом новых векторов на его длину. В силу замечания 30.1 мы получим ортонормированный базис. □

31.3. Ортогональное дополнение

Определение

Пусть S — подпространство в V. Множество всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S, называется *ортогональным дополнением* подпространства S. Ортогональное дополнение подпространства S обозначается через $S^{\perp}$.

Предложение 31.1

Пусть S — подпространство пространства со скалярным произведением V, а $S^{\perp}$ — ортогональное дополнение S. Тогда:

1) *$S^{\perp}$ — подпространство пространства V;*
2) *если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис S, то $\mathbf{x} \in S^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{xa}_1 = \mathbf{xa}_2 = \dots = \mathbf{xa}_k = 0$.*

Ортогональное дополнение (2)

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{\perp}$, $\mathbf{a} \in S$, а $t \in F$ — произвольное число, то $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{a} = \mathbf{xa} + \mathbf{ya} = 0 + 0 = 0$ и $(t\mathbf{x})\mathbf{a} = t(\mathbf{xa}) = t \cdot 0 = 0$.

2) *Необходимость.* Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис S, а $\mathbf{x} \in S^{\perp}$, то вектор $\mathbf{x}$ ортогонален к векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, поскольку он ортогонален ко всем векторам из S.

Достаточность. Предположим теперь, что $\mathbf{x}$ ортогонален к векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{a} \in S$. Тогда $\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k \in F$, и потому

$$\mathbf{ax} = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{x} = t_1(\mathbf{a}_1\mathbf{x}) + t_2(\mathbf{a}_2\mathbf{x}) + \cdots + t_k(\mathbf{a}_k\mathbf{x}) =$$
$$= t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 0 + \cdots + t_k \cdot 0 = 0,$$

и потому $\mathbf{x} \in S^{\perp}$. $\square$

Теорема 31.5

Если V — пространство со скалярным произведением, а S — подпространство в V, то $V = S \oplus S^{\perp}$.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \in S \cap S^{\perp}$, то $\mathbf{xx} = 0$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Осталось проверить, что $V = S + S^{\perp}$. Для этого достаточно установить, что $\dim S + \dim S^{\perp} = \dim V$.

Положим $\dim V = n$ и $\dim S = k$. Зафиксируем ортонормированный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ пространства V и произвольный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства S. Пусть вектор $\mathbf{a}_1$ имеет в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ координаты $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, вектор $\mathbf{a}_2$ — координаты $(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, ..., вектор $\mathbf{a}_k$ — координаты $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x} \in S^{\perp}$. Тогда $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}_2\mathbf{x} = \cdots = \mathbf{a}_k\mathbf{x} = 0$. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, то, в силу теоремы 31.2, имеем:

$$\begin{cases} a_{11}\overline{x_1} + a_{12}\overline{x_2} + \cdots + a_{1n}\overline{x_n} = 0, \\ a_{21}\overline{x_1} + a_{22}\overline{x_2} + \cdots + a_{2n}\overline{x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\overline{x_1} + a_{k2}\overline{x_2} + \cdots + a_{kn}\overline{x_n} = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Этот набор равенств можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений с неизвестными $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$. Пространство $S^{\perp}$ совпадает с пространством решений системы (4). Размерность этого пространства равна $n - r$, где r — ранг матрицы системы (4) (см. теорему 25.1). Строки этой матрицы — координаты базисных векторов пространства S. Следовательно, $r = k$. Итак, $\dim S^{\perp} = n - k$, и потому

$$\dim S + \dim S^{\perp} = k + (n - k) = n = \dim V.$$

Теорема доказана. $\square$

Равенство $V = S \oplus S^{\perp}$ называется *ортогональным разложением* пространства V относительно подпространства S.

Алгоритм нахождения базиса ортогонального дополнения

Из доказательства теоремы 31.5 и того факта, что $\overline{\overline{x}} = x$ для любого числа $x \in \mathbb{C}$, вытекает следующий алгоритм.

Алгоритм 31.1

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис подпространства S пространства V. Составим однородную систему линейных уравнений, матрица которой — это матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ в некотором ортонормированном базисе пространства V. Пользуясь алгоритмом, указанным в § 25, найдем фундаментальный набор решений этой однородной системы. В каждом из векторов этого набора заменим каждую компоненту на комплексно сопряженное к ней число. Полученные векторы и будут базисом пространства $S^{\perp}$. Если пространство V евклидово, то фундаментальный набор решений указанной однородной системы сам является базисом пространства $S^{\perp}$.

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V — пространство со скалярным произведением, а S, S_1 и S_2 — его подпространства. Тогда:

1) $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, а $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$;
2) $(S^\perp)^\perp = S$;
3) *если* $S_1 \subseteq S_2$, *то* $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;
4) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$, *а* $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$;
5) *если* $V = S_1 \oplus S_2$, *то* $V = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$.

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x} \in V^\perp$, то $\mathbf{xy} = 0$ для любого вектора $\mathbf{y} \in V$. В частности, $\mathbf{xx} = 0$. В силу аксиомы 4) имеем $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно, $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$. А равенство $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$ вытекает из замечания 31.1.

2) Из определения ортогонального дополнения вытекает, что если $\mathbf{x} \in S$, то $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из $S^\perp$. Следовательно, $S \subseteq (S^\perp)^\perp$. Пусть $\dim S = k$ и $\dim V = n$. В силу теоремы 31.5 $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - k) = k = \dim S$. Итак, S — подпространство в $(S^\perp)^\perp$ и $\dim S = \dim(S^\perp)^\perp$. Следовательно, $S = (S^\perp)^\perp$.

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $\mathbf{x} \in S_2^{\perp}$. Тогда $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из S_2, а значит, в частности, и к любому вектору из S_1. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^{\perp}$, и потому $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

4) Пусть $\mathbf{x} \in S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$ и $\mathbf{y} \in S_1 + S_2$. Тогда $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ для некоторых векторов $\mathbf{y}_1 \in S_1$ и $\mathbf{y}_2 \in S_2$. В силу выбора $\mathbf{x}$ имеем $\mathbf{x}\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}\mathbf{y}_2 = 0$, откуда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}\mathbf{y}_2 = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^{\perp}$, и потому $S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp} \subseteq (S_1 + S_2)^{\perp}$. Докажем обратное включение. Пусть $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^{\perp}$. Поскольку $S_1 \subseteq S_1 + S_2$ и $S_2 \subseteq S_1 + S_2$, из свойства 3) вытекает, что $\mathbf{x} \in S_1^{\perp}$ и $\mathbf{x} \in S_2^{\perp}$. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$, и потому $(S_1 + S_2)^{\perp} \subseteq S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$. Следовательно, $(S_1 + S_2)^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$. Используя свойство 2), имеем

$$S_1^{\perp} + S_2^{\perp} = \left((S_1^{\perp} + S_2^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp} = \left((S_1^{\perp})^{\perp} \cap (S_2^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp} = (S_1 \cap S_2)^{\perp}.$$

5) По условию $S_1 + S_2 = V$ и $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. Используя свойства 1) и 4), имеем:

$$S_1^{\perp} + S_2^{\perp} = (S_1 \cap S_2)^{\perp} = \{\mathbf{0}\}^{\perp} = V,$$
$$S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp} = (S_1 + S_2)^{\perp} = V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}.$$

Следовательно, $V = S_1^{\perp} \oplus S_2^{\perp}$.

Нахождение базиса пересечения подпространств с помощью ортогонального дополнения

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств. В самом деле, если S_1 и S_2 — подпространства пространства со скалярным произведением, то

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^{\perp})^{\perp} \cap (S_2^{\perp})^{\perp} = (S_1^{\perp} + S_2^{\perp})^{\perp}.$$

Поскольку мы знаем, как находить базисы суммы подпространств и ортогонального дополнения к подпространству, это позволяет легко найти базис пересечения подпространств.

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — определения

Определения

Пусть V — пространство со скалярным произведением, S — его подпространство и $\mathbf{x} \in V$. В силу теоремы 31.5 существуют, и притом единственные, векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ такие, что $\mathbf{y} \in S$, $\mathbf{z} \in S^{\perp}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Вектор $\mathbf{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на подпространство S и обозначается через $\mathbf{x}_{\perp}$, а вектор $\mathbf{z}$ называется *ортогональной составляющей* $\mathbf{x}$ относительно S и обозначается через $\mathbf{x}^{\perp}$. Длина ортогональной составляющей вектора $\mathbf{x}$ относительно S называется *расстоянием от* $\mathbf{x}$ *до* S. Предположим теперь, что V — евклидово пространство. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то *углом между* $\mathbf{x}$ *и* S называется угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S по определению считается равным $\frac{\pi}{2}$ (это естественно, так как в данном случае $\mathbf{x} = \mathbf{z} \in S^{\perp}$). Наконец, если $S = \{\mathbf{0}\}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S не определен. Расстояние от $\mathbf{x}$ до S обозначается через $\rho(\mathbf{x}, S)$, а угол между $\mathbf{x}$ и S — через $(\widehat{\mathbf{x}, S})$.

- В унитарном пространстве угол между вектором и подпространством не определен, поскольку в нем не определен угол между векторами.

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — иллюстрация

Все введенные только что понятия полностью аналогичны одноименным понятиям в обычном пространстве с обычным скалярным произведением. В самом деле, возьмем в этом пространстве в качестве подпространства S плоскость Oxy. Ясно, что ортогональным дополнением $S^{\perp}$ будет ось Oz. Отложим вектор $\vec{x}$ от начала координат. Тогда ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на S — это его проекция на плоскость Oxy в обычном смысле, расстояние от $\vec{x}$ до S — обычное расстояние от конца вектора $\vec{x}$ до плоскости Oxy, угол между $\vec{x}$ и S — обычный угол между этим вектором и Oxy (см. рис. 2).

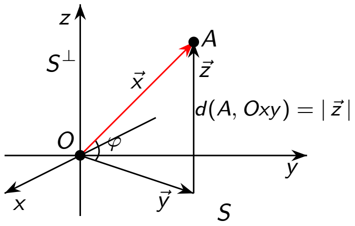

Рис. 2. Расстояние от вектора до подпространства и угол между ними

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — первый способ нахождения

Алгоритм 31.2

Даны подпространство S пространства со скалярным произведением V и вектор $\mathbf{x} \in V$. Требуется найти ортогональную проекцию $\mathbf{x}_\perp$ вектора $\mathbf{x}$ на S, ортогональную составляющую $\mathbf{x}^\perp$ вектора $\mathbf{x}$ относительно S, расстояние $\rho(\mathbf{x}, S)$ от $\mathbf{x}$ до S, а если V евклидово, то еще и угол $\varphi(\mathbf{x}, S)$ между $\mathbf{x}$ и S. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис подпространства S. Используя алгоритм 31.1, найдем базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ пространства $S^\perp$. В силу теоремы 31.5 и замечания 21.6 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ — базис V. Разложим вектор $\mathbf{x}$ по этому базису: пусть

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k + s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_m\mathbf{b}_m.$$

Тогда $\mathbf{x}_\perp = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$, $\mathbf{x}^\perp = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_m\mathbf{b}_m$, $\rho(\mathbf{x}, S) = |\mathbf{x}^\perp|$, а если V евклидово, то $\cos\varphi(\mathbf{x}, S) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_\perp}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{x}_\perp|}$. □

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — второй способ нахождения (1)

Укажем другой способ нахождения векторов $\mathbf{x}_{\perp}$ и $\mathbf{x}^{\perp}$, расстояния $\rho(\mathbf{x}, S)$ и угла $\cos\varphi(\mathbf{x}, S)$. С учетом формул $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp}$, $\rho(\mathbf{x}, S) = |\mathbf{x}^{\perp}|$ и $\cos\varphi(\mathbf{x}, S) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_{\perp}}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{x}_{\perp}|}$, достаточно найти вектор $\mathbf{x}_{\perp}$. Как и ранее, предполагаем, что известен базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ подпространства S. Поскольку $\mathbf{x}_{\perp} \in S$, можно разложить $\mathbf{x}_{\perp}$ по этому базису:

$$\mathbf{x}_{\perp} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k. \tag{5}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ неизвестны, их надо найти. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1\mathbf{x} &= \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp}) = \mathbf{a}_1\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{a}_1\mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{a}_1\mathbf{x}_{\perp} + 0 = \mathbf{a}_1\mathbf{x}_{\perp} = \\ &= \mathbf{a}_1(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k) = \overline{\alpha_1}\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \overline{\alpha_2}\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \cdots + \overline{\alpha_k}\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k.\end{aligned}$$

Поскольку скалярные произведения $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_1\mathbf{x}$ известны, равенство

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1)\,\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)\,\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k)\,\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_1\mathbf{x}$$

является линейным уравнением с неизвестными $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_k}$.

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — второй способ нахождения (2)

Рассуждая аналогичным образом, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1)\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k)\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_1\mathbf{x}, \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_k)\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_2\mathbf{x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_1)\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_2)\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k)\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_k\mathbf{x}. \end{cases}$$

Это крамеровская система линейных уравнений, а ее основной матрицей является матрица Грама системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$. Эта система векторов является базисом S. В частности, она линейно независима. В силу предложения 30.3 основная матрица нашей системы невырожденна. По теореме Крамера эта система имеет единственное решение. Обозначим это решение через $(\overline{\alpha_1^0}, \overline{\alpha_2^0}, \dots, \overline{\alpha_k^0})$. Тогда $\mathbf{x}_\perp = \alpha_1^0\mathbf{a}_1 + \alpha_2^0\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k^0\mathbf{a}_k$.

Из сказанного вытекает алгоритм, сформулированный на следующем слайде.

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — второй способ нахождения (3)

Алгоритм 31.3

Даны подпространство S пространства со скалярным произведением V и вектор $\mathbf{x} \in V$. Будем считать известным базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, . . . , $\mathbf{a}_k$ подпространства S. Решим систему линейных уравнений вида $GX = B$, где G — матрица Грама системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$, а B — столбец длины k, i-й элемент которого равен $\mathbf{a}_i\mathbf{x}$ (для $i = 1, 2, \dots, k$). Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ — (единственное) решение указанной системы. Тогда $\mathbf{x}_\perp = \overline{\alpha_1}\,\mathbf{a}_1 + \overline{\alpha_2}\,\mathbf{a}_2 + \dots + \overline{\alpha_k}\,\mathbf{a}_k$, $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\perp$, $\rho(\mathbf{x}, S) = |\mathbf{x}^\perp|$, а в случае, когда пространство V евклидово, еще и $\cos\varphi(\mathbf{x}, S) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_\perp}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{x}_\perp|}$. □

Связь ортогональной проекции вектора на подпространство с расстоянием от вектора до подпространства

Пусть V — пространство со скалярным произведением, S — его подпространство, а $\mathbf{a}$ — произвольный вектор из V. Обозначим через $\mathbf{a}_\perp$ ортогональную проекцию $\mathbf{a}$ на S, а через $\mathbf{a}^\perp$ — ортогональную составляющую $\mathbf{a}$ относительно S. Для всякого $\mathbf{x} \in S$ обозначим через $d_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ расстояние между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$. Будем рассматривать $d_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ как функцию от $\mathbf{x}$.

Замечание 31.3

Значение функции $d_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_\perp$. При этом $d_\mathbf{a}(\mathbf{a}_\perp) = \rho(\mathbf{a}, S)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{a}_\perp - \mathbf{x} \in S$, из теоремы Пифагора вытекает, что

$$|\mathbf{a} - \mathbf{x}|^2 = \left|(\mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}^\perp) - \mathbf{x}\right|^2 = \left|(\mathbf{a}_\perp - \mathbf{x}) + \mathbf{a}^\perp\right|^2 = |\mathbf{a}_\perp - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{a}^\perp|^2.$$

Поскольку $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = |\mathbf{a} - \mathbf{x}|$, мы получаем, что значение функции $d_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда минимально значение выражения $|\mathbf{a}_\perp - \mathbf{x}|^2$. В свою очередь, значение последнего выражения минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_\perp - \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т. е. когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_\perp$. Первое утверждение доказано. Из его доказательства и определения расстояния от вектора до подпространства вытекает, что $d_\mathbf{a}(\mathbf{a}_\perp) = |\mathbf{a}^\perp| = \rho(\mathbf{a}, S)$.

31.4. Псевдорешения системы линейных уравнений

Для удобства обозначений мы далее не будем делать различия между векторами, компоненты которых записаны в строку и в столбец. В частности, мы будем записывать систему линейных уравнений в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, записанные в виде столбцов.

Зафиксируем систему линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $\mathbb{R}$.

Определение

Псевдорешением системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с m неизвестными называется произвольный вектор $\mathbf{x}_0$ такой, что расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{b}$ минимально среди всех векторов из $\mathbb{R}^m$.

Замечание 31.4

Если система линейных уравнений совместна, то ее псевдорешениями являются все ее частные решения и только они.

Доказательство. Вектор $\mathbf{x}_0$ является решением системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, т. е. когда расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{b}$ равно нулю. Меньше нуля расстояние между векторами быть не может. $\square$

Пусть $A = (A_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Множество всех векторов вида $A\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ пробегает пространство $\mathbb{R}^n$, образует подпространство в $\mathbb{R}^m$. Из очевидного равенства

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n$$

вытекает, что это подпространство порождено векторами-столбцами матрицы A. Псевдорешение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор из этого подпространства, расстояние между которым и вектором $\mathbf{b}$ минимально.

Всюду далее: $\mathbf{a}_i$ — вектор, компонентами которого являются элементы i-го столбца матрицы A (для всякого $i = 1, 2, \dots, n$), $H = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$, а $\mathbf{b}_\perp$ и $\mathbf{b}^\perp$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{b}$ на подпространство H и ортогональная составляющая $\mathbf{b}$ относительно H соответственно. Из сказанного выше и замечания 31.3 вытекает следующий факт.

Предложение 31.2

Вектор $\mathbf{x}_0$ является псевдорешением системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$. $\square$

Иными словами, множество всех псевдорешений системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совпадает с общим решением системы

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\perp}. \tag{6}$$

Наша цель — показать, как найти псевдорешения системы, не находя ортогональной проекции вектора $\mathbf{b}$ на подпространство H.

Из теоремы 31.2 вытекает следующее утверждение.

Замечание 31.5

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ — система векторов из V, а A — квадратная матрица порядка k, в которой по столбцам записаны координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ в некотором ортонормированном базисе пространства V. Тогда $G_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}} = A^{\top}\overline{A}$. В частности, если пространство V евклидово, то $G_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}} = A^{\top}A$. $\square$

Теорема 31.6

Множество всех псевдорешений системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *совпадает с общим решением системы*

$$G_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}}\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}, \tag{7}$$

где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ *— совокупность всех векторов-столбцов матрицы* A.

Доказательство. В силу предложения 31.2 достаточно установить, что общее решение системы (7) совпадает с общим решением системы (6).

Пусть $\mathbf{x}_0$ — решение системы (6), т. е. выполнено равенство $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$. Умножив обе части этого равенства слева на $A^\top$, получим

$$A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top \mathbf{b}_\perp. \tag{8}$$

В силу замечания 31.5 левую часть равенства (8) можно записать в виде $G_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}}\mathbf{x}_0$. Пусть, как и ранее, $H = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$. В матрице $A^\top$ по строкам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Все они лежат в H, и потому ортогональны к вектору $\mathbf{b}^\perp$. Следовательно, $A^\top \mathbf{b}^\perp = \mathbf{0}$, и потому

$$A^\top \mathbf{b} = A^\top(\mathbf{b}_\perp + \mathbf{b}^\perp) = A^\top \mathbf{b}_\perp + A^\top \mathbf{b}^\perp = A^\top \mathbf{b}_\perp + \mathbf{0} = A^\top \mathbf{b}_\perp.$$

С учетом равенства (8), получаем, что $A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$, т.е. $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}}\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$. Мы доказали, что всякое решение системы (6) является решением системы (7).

Докажем обратное. Пусть $\mathbf{x}_0$ — решение системы (7), т. е. выполнено равенство $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}}\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$. С учетом замечания 31.5, его можно переписать в виде $A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$. Таким образом, $A^\top(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Положим $\mathbf{c} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$. В матрице $A^\top$ по строкам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Из равенства $A^\top\mathbf{c} = \mathbf{0}$ вытекает, что вектор $\mathbf{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, и потому лежит в $H^\perp$. С другой стороны, очевидно, что вектор $A\mathbf{x}_0$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, и потому лежит в H. Итак, $\mathbf{b} = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}$, причем $A\mathbf{x}_0 \in H$, а $\mathbf{c} \in H^\perp$. Ясно, что $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$ и $\mathbf{c} = \mathbf{b}^\perp$. Первое из этих равенств означает, что $\mathbf{x}_0$ — решение системы (6). $\square$

31.5. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому

Для всякой квадратной матрицы A над полем $\mathbb{C}$ положим $A^* = \overline{A^\top}$.

Определение

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ называется *унитарной*, если $AA^* = A^*A = E$.

Ясно, что если матрица A унитарна, то она обратима и $A^{-1} = A^*$.

Предложение 31.3

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в унитарном пространстве является унитарной.

Доказательство. Пусть V — унитарное пространство, $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ и $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n\}$ — его ортонормированные базисы и $T = (t_{ij})$ — матрица перехода от C к D. По определению матрицы перехода от одного базиса к другому, произведение i-й строки матрицы $T^\top$ на j-й столбец матрицы $\overline{T}$ равно скалярному произведению векторов $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}_j$. Поскольку базис D ортонормирован, это означает, что $T^\top \cdot \overline{T} = E$. Следовательно, $E = \overline{E} = \overline{T^\top \cdot \overline{T}} = \overline{T^\top} \cdot \overline{\overline{T}} = \overline{T^\top} \cdot T = T^*T$. Аналогично проверяется, что $TT^* = E$.

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому в евклидовом пространстве

Определение

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{R}$ называется *ортогональной*, если $A^\top A = E$.

Ясно, что если матрица A ортогональна, то она обратима и $A^{-1} = A^\top$.

Если A — квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$, то $A^* = A^\top$. Следовательно, всякая унитарная матрица над полем $\mathbb{R}$ ортогональна. Поэтому из предложения 31.3 вытекает

Следствие 31.3

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в евклидовом пространстве является ортогональной. □