

Вопросы ко 2-му экзамену по курсу «Алгебра и геометрия»

1. Векторное пространство. Линейно зависимые и линейно независимые наборы векторов и их свойства.
2. Базис векторного пространства. Базис и система образующих. Координаты вектора в базисе. Равномощность базисов. Размерность векторного пространства. Дополнение линейно независимого набора векторов до базиса. Теорема об изоморфизме векторных пространств.
3. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.
4. Прямая сумма подпространств.
5. Ослабленный закон сокращения для матриц. Присоединенная матрица. Значение многочлена от квадратной матрицы. Характеристический многочлен матрицы. Теорема Гамильтона-Кэли.
6. Обратная матрица: определение, критерий обратимости, формула для вычисления, свойства, применение к решению систем линейных уравнений и матричных уравнений, нахождение с помощью элементарных преобразований.
7. Ранг матрицы по строкам, по столбцам и по минорам. Теорема о ранге матрицы.
8. Ранг произведения матриц. Теорема Кронекера-Капелли.
9. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Векторная запись общего решения произвольной системы линейных уравнений.
10. Линейное отображение и линейный оператор. Теорема существования и единственности линейного отображения. Матрица линейного отображения в базисах и матрица линейного оператора в базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора и матрицы оператора при замене базиса.
11. Образ и ядро линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте. Алгоритмы нахождения базисов образа и ядра.
12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Теоремы о собственных векторах, относящихся к одному и тому же собственному значению и к разным собственным значениям. Собственные значения и корни характеристического уравнения оператора. Линейные операторы, приводимые к диагональному виду.
13. Нильпотентные операторы. Жорданова нормальная форма матрицы. Основная теорема о нильпотентных операторах.
14. Цепочки ядер и образов степеней линейного оператора. Разложение Фитинга.
15. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении.
16. Скалярное произведение в векторном пространстве. Ослабленный закон сокращения в пространствах со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами. Неравенство Минковского. Расстояние между векторами.
17. Матрица Грама и ее применения (вычисление скалярного произведения, критерий линейной независимости системы векторов).
18. Ортогональность. Линейная независимость ортогонального набора ненулевых векторов. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
19. Дополнение ортогональной системы ненулевых векторов до ортогонального базиса. Ортогональное дополнение к подпространству и его свойства. Ортогональное разложение векторного пространства.
20. Псевдорешения системы линейных уравнений (определение и способ нахождения).
21. Отображение, сопряженное к данному. Теорема о существовании, единственности и линейности сопряженного отображения.
22. Самосопряженный оператор. Эрмитовость матрицы самосопряженного оператора. Свойства корней характеристического уравнения и собственных векторов самосопряженного оператора

23. Свойства корневых подпространств относительно самосопряженного оператора. Основная теорема о самосопряженном операторе. Свойства матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому.
24. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, приведение к главным осям).
25. Закон инерции квадратичных форм.
26. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности формы в терминах ее канонического вида. Критерий Сильвестра. Критерий отрицательной определенности формы.
27. Эллипс: определение, фокусы, эксцентриситет, директрисы, расположение на плоскости, фокальное и директориальное свойства.
28. Гипербола: определение, асимптоты, фокусы, эксцентриситет, директрисы, расположение на плоскости, фокальное и директориальное свойства. «Школьное» уравнение гиперболы.
29. Парабола: определение, фокус, директриса, расположение на плоскости, директориальное свойство параболы. Единая формулировка директориального свойства для эллипса, гиперболы и параболы. «Школьное» уравнение параболы.
30. Классификация квадрик на плоскости.
31. Классификация квадрик в пространстве.
32. Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида: число прямолинейных образующих, проходящих через одну точку, взаимное расположение, параметрические и общие уравнения прямолинейных образующих.
33. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида: число прямолинейных образующих, проходящих через одну точку, взаимное расположение, параметрические и общие уравнения прямолинейных образующих..