

# Глава I. Матрицы и определители

## § 3. Определители $n$ -го порядка

М.В.Волков

Уральский федеральный университет,  
Институт естественных наук и математики,  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

## Соглашение и обозначение

Напомним, что до особого указания слово «матрица» означает *квадратную* матрицу. Множество всех  $n \times n$ -матриц обозначается  $M_n$ .

Нам будет удобно мыслить матрицу  $A \in M_n$  как строку столбцов, т.е. если  $A_i$  –  $i$ -й столбец матрицы  $A$ , записываем её как  $A = (A_1 A_2 \dots A_n)$ .

## Определение

*Определитель  $n$ -го порядка* – это правило, сопоставляющее каждой матрице из  $M_n$  некоторое число так, что выполнены три аксиомы:

$\Delta I$ : если  $A_i = A_{i+1}$ , то  $\det (A_1 \dots A_i A_{i+1} \dots A_n) = 0$   
(*кососимметричность*);

$\Delta II$ : если  $A_i = A'_i + A''_i$ , то  
 $\det (A_1 \dots A_i \dots A_n) = \det (A_1 \dots A'_i \dots A_n) + \det (A_1 \dots A''_i \dots A_n)$ ,  
если  $A_i = \alpha A'_i$ , то  $\det (A_1 \dots A_i \dots A_n) = \alpha \det (A_1 \dots A'_i \dots A_n)$   
(*полилинейность*);

$\Delta III$ :  $\det E = 1$  (*нормировка*).

Мы записали аксиомы  $\Delta I$ – $\Delta III$  формулами; дадим ещё и словесные формулировки.

### $\Delta I$

Если два соседних столбца матрицы равны, то ее определитель равен 0.

### $\Delta II$

1. Если  $i$ -й столбец матрицы есть сумма двух столбцов, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, у первой из которых  $i$ -й столбец заменен на первое слагаемое, а у второй – на второе.
2. Если  $i$ -й столбец матрицы умножить на  $\alpha$ , то ее определитель умножится на  $\alpha$ .

### $\Delta III$

Определитель единичной матрицы равен 1.

Итак, определитель – это кососимметричное полилинейное нормированное отображение из множества  $M_n$  в множество действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

Возникает три естественных и неочевидных вопроса:

1. Существуют ли такие отображения для каждого натурального  $n$ ?

*Упражнение:* Проверьте, что для правил, которыми вводились определители 2-го и 3-го порядков, аксиомы определителя выполняются.

2. Если существуют, то сколько таких отображений может быть при каждом  $n$ ?

3. Зачем нужны такие отображения?

Мы ответим сначала на второй вопрос, а потом на первый.

Что касается третьего, постепенно станет видно, что определители – полезный и удобный математический аппарат, без которого во многих случаях просто невозможно обойтись.

Отметим ещё, что важность определителей была осознана очень давно (на рубеже XVII и XVIII веков). Парадоксально, но понятие определителя матрицы появилось намного раньше, чем понятие матрицы!

## D1

Если какой-то столбец матрицы  $A$  состоит из нулей, то  $\det A = 0$ .

*Доказательство.* Следует из  $\Delta\Pi$ : выносим общий множитель 0 из столбца, состоящего из нулей.  $\square$

## D2

Если переставить соседние столбцы матрицы, определитель сменит знак.

*Доказательство.* Пусть  $A = (A_1 \dots A_i A_{i+1} \dots A_n)$ . Хотим доказать, что  $\det(A_1 \dots A_i A_{i+1} \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_{i+1} A_i \dots A_n)$ . Имеем

$$0 \stackrel{\Delta I}{=} \det(A_1 \dots A_i + A_{i+1} \quad A_i + A_{i+1} \dots A_n) =$$

$$\stackrel{\Delta\Pi}{=} \det(A_1 \dots A_i \quad A_i \quad A_{i+1} \dots A_n) + \det(A_1 \dots A_i \quad A_{i+1} \quad A_i \dots A_n) +$$

$$+ \det(A_1 \dots A_{i+1} \quad A_i \quad A_i \dots A_n) + \det(A_1 \dots A_{i+1} \quad A_{i+1} \quad A_i \dots A_n).$$

В равной нулю сумме

$$\begin{aligned} & \det(A_1 \dots A_i \quad A_i \quad \dots A_n) + \det(A_1 \dots A_i \quad A_{i+1} \quad \dots A_n) + \\ & + \det(A_1 \dots A_{i+1} \quad A_i \quad \dots A_n) + \det(A_1 \dots A_{i+1} \quad A_{i+1} \quad \dots A_n) \end{aligned}$$

первое и последнее слагаемые равны 0 в силу аксиомы  $\Delta I$ .  
 Значит, сумма второго и третьего слагаемых есть 0, откуда  
 $\det(A_1 \dots A_i \quad A_{i+1} \quad \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_{i+1} \quad A_i \quad \dots A_n)$ . □

## D3

Если переставить два столбца матрицы, определитель сменит знак.

**Доказательство.** Пусть  $A = (A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n)$ . Хотим доказать, что  $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$ . Проведем индукцию по  $j - i$ . База индукции  $j - i = 1$  обеспечивается свойством D2.

Шаг индукции. Пусть  $j - i > 1$ . Имеем

$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_{j-1} A_j \dots A_n)$$

$$= -\det(A_1 \dots A_{j-1} \dots A_i A_j \dots A_n) \quad \text{по предположению индукции}$$

$$= \det(A_1 \dots A_{j-1} \dots A_j A_i \dots A_n) \quad \text{по свойству } D2$$

$$= -\det(A_1 \dots A_j \dots A_{j-1} A_i \dots A_n) \quad \text{по предположению индукции. } \square$$

## *D4*

Если два столбца матрицы равны, то ее определитель равен 0.

*Доказательство.* Переставим столбцы так, что равные столбцы стали соседними. По аксиоме  $\Delta I$  определитель полученной матрицы равен 0, а по  $D3$  он противоположен определителю исходной матрицы.  $\square$

## D5

Если два столбца матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.

*Доказательство.* Если два столбца пропорциональны, один из них получается из другого умножением на некоторый множитель  $\alpha$ . Вынесем  $\alpha$  за знак определителя по аксиоме  $\Delta II$ . Под знаком определителя получится матрица с двумя равными столбцами, определитель которой равен 0 по свойству D4. □

## D6

Если к элементам одного столбца матрицы прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на какое-то число, то ее определитель не изменится.

*Доказательство.* Пусть  $A = (A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n)$ . Хотим доказать, что  $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = \det(A_1 \dots A_i + \lambda A_j \dots A_j \dots A_n)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \det(A_1 \dots A_i + \lambda A_j \dots A_j \dots A_n) &\stackrel{\Delta II}{=} \det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) + \\ &+ \det(A_1 \dots \lambda A_j \dots A_j \dots A_n) = \\ &\stackrel{D5}{=} \det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n). \quad \square \end{aligned}$$



## Замечание 1

Доказательства свойств  $D1$ – $D6$  использовали только аксиомы  $\Delta I$  и  $\Delta II$ . Поэтому эти свойства выполняются для *любого* кососимметричного полилинейного отображения из  $M_n$  в  $\mathbb{R}$ .

## Замечание 2

Свойства  $D3$  и  $D6$  показывают, как ведет себя определитель (и более общо, любое кососимметричное полилинейное отображение из  $M_n$  в  $\mathbb{R}$ ) при *элементарных преобразованиях I-го и II-го родов над столбцами*.

А именно, при каждом преобразовании I-го рода определитель меняет знак, а преобразования II-го рода не изменяют определитель.

Поэтому, если матрица  $B$  получается из матрицы  $A$  применением некоторой последовательности элементарных преобразований I-го и II-го родов над столбцами, то для любого кососимметричного полилинейного отображения  $D: M_n \rightarrow \mathbb{R}$  (в частности, для определителя)

$D(A) = \pm D(B)$ , причем знак зависит только от четности числа проделанных преобразований I-го рода.

Введем в рассмотрение несколько типов матриц, которые часто будут возникать в дальнейшем по самым разным поводам.

### Определения

Квадратная матрица называется:

- *верхнетреугольной* [*нижнетреугольной*], если все ее элементы, расположенные ниже [выше] главной диагонали, равны 0;
- *треугольной*, если она либо верхнетреугольная, либо нижнетреугольная;
- *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны 0.

Ниже слева изображена типичная верхнетреугольная  $n \times n$ -матрица, а справа — типичная диагональная  $n \times n$ -матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

## Предложение

Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

*Доказательство.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ .

Хотим доказать, что  $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$  (\*).

Если  $a_{11} = 0$ , то  $\det A = 0$  по свойству D1. Но и  $a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} = 0$ , т.е. равенство (\*) в этом случае выполняется.

Если  $a_{11} \neq 0$ , то прибавим ко 2-му столбцу 1-й, умноженный на  $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ , к 3-му столбцу – 1-й, умноженный на  $-\frac{a_{13}}{a_{11}}$ , ..., к  $n$ -му столбцу – 1-й, умноженный на  $-\frac{a_{1n}}{a_{11}}$ . По D6 определитель от этого не изменится.

## Определитель верхнетреугольной матрицы (2)

Итак,  $\det A = \det A'$ , где  $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ .

Если  $a_{22} = 0$ , то  $\det A' = 0$  по свойству  $D1$ . Но и  $a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} = 0$ , т.е. равенство  $(\star)$  и в этом случае выполняется.

Если  $a_{22} \neq 0$ , то аналогичными преобразованиями обнулим элементы 2-й строки справа от  $a_{22}$ , не изменяя определитель.

Получим  $\det A = \det A''$ , где  $A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ .

# Определитель верхнетреугольной матрицы (3)

Повторяя те же аргументы, заключаем, что либо среди диагональных элементов матрицы  $A$  есть 0, и тогда  $\det A = 0 = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$ , либо все диагональные элементы отличны от 0, и тогда  $\det A =$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{\Delta_{II}}{=} a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\Delta_{III}}{=} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

□

## Замечание

Аксиома  $\Delta_{III}$  использована только на заключительном шаге.

Поэтому для любого кососимметричного полилинейного отображения

$D: M_n(F) \rightarrow F$  и любой верхнетреугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ имеем } D(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}D(E) = \det A \cdot D(E).$$

## Теорема

Для каждого натурального  $n$  существует не более одного отображения  $\det: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющего аксиомам  $\Delta I$ – $\Delta III$ .

*Доказательство.* Пусть отображения  $\det_1: M_n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\det_2: M_n \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяют аксиомам  $\Delta I$ – $\Delta III$ . Докажем, что для любой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{верно равенство } \det_1 A = \det_2 A.$$

Элементарными преобразованиями I-го и II-го родов над столбцами приведем матрицу  $A$  к верхнетреугольной матрице

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{Подсказка: начинаем с правого нижнего угла.}$$

Тогда  $\det_1 A = \pm \det_1 B = \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}$  и  $\det_2 A = \pm \det_2 B = \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}$ , причем знаки совпадают, так как знак зависит только от четности числа проделанных преобразований I-го рода. Отсюда  $\det_1 A = \det_2 A$ .  $\square$

Из доказательства теоремы единственности и замечания о значении кососимметричного полилинейного отображения от верхнетреугольной матрицы получаем важное следствие:

### Следствие

Для любого кососимметричного полилинейного отображения  $D: M_n \rightarrow \mathbb{R}$  и любой матрицы  $A$  верно равенство  $D(A) = \det A \cdot D(E)$ .

*Доказательство.* Приведя матрицу  $A$  к верхнетреугольной матрице  $B$ , получим  $D(A) = \pm D(B) = \pm \det B \cdot D(E) = \det A \cdot D(E)$ .  $\square$

Отметим еще, что доказательство теоремы единственности указывает практический путь к вычислений определителей (*метод Гаусса*).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 22 & 1 \\ 0 & 20 & 1 \\ 2 & -20 & -1 \\ 0 & 00 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 20 & 1 \\ 0 & 20 & 1 \\ 0 & -22 & -1 \\ 0 & 00 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 220 & 1 \\ 020 & 1 \\ 002 & -1 \\ 000 & 1 \end{vmatrix} = -8$$



Все предшествующие результаты были условными – строго говоря, их следовало бы формулировать как импликации «Если определитель существует, то ...». Докажем, что определитель существует.

## Теорема

Для каждого натурального  $n$  существует отображение  $D_n: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее аксиомам  $\Delta I$ – $\Delta III$ .

*Доказательство.* Индукция по  $n$ .

База индукции. При  $n = 1$  положим  $D_1(a) := a$ . Справедливость аксиом  $\Delta II$  и  $\Delta III$  очевидна, а аксиома  $\Delta I$  тривиализируется.

Шаг индукции. Пусть  $n > 1$  и пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – произвольная } n \times n\text{-матрица.}$$

## Теорема существования (2)

Зафиксируем какое-то число  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и для каждого  $j = 1, 2, \dots, n$  рассмотрим  $(n-1) \times (n-1)$ -матрицу, которая получается если вычеркнуть  $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец из матрицы  $A$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции отображение  $D_{n-1}: M_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее аксиомам  $\Delta I$ – $\Delta III$ , существует.

В частности, у каждой из  $n$  получившихся  $(n-1) \times (n-1)$ -матриц есть определитель. Положим

$$M_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и назовем  $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$  *алгебраическим дополнением* элемента  $a_{ij}$ .

Теперь положим  $D_n(A) := a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in}$ , т.е.  $D_n(A)$  есть сумма произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на их алгебраические дополнения. Проверим, что так определенное отображение удовлетворяет аксиомам  $\Delta I$ – $\Delta III$ .

Начнем с  $\Delta_{III}$ . Если  $A$  есть единичная  $n \times n$ -матрица, то  $a_{ij} = 0$  при всех  $i \neq j$  и  $a_{ii} = 1$ . Поэтому сумма  $a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in}$  сводится к одному слагаемому  $A_{ii} = (-1)^{i+i}M_{ii} = M_{ii}$ . По определению  $M_{ii}$  есть определитель  $(n-1) \times (n-1)$ -матрицы, полученной при вычеркивании из единичной  $n \times n$ -матрицы  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца:

$$i \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} i$$

Понятно, что при вычеркивании получится единичная  $(n-1) \times (n-1)$ -матрица, определитель которой равен 1. Итак,  $M_{ii} = 1$ , и мы доказали, что  $D_n(E) = 1$ .

Проверим  $\Delta I$ . Пусть в матрице  $A$  равны  $j$ -й и  $(j+1)$ -й столбцы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{kj} = a_{kj+1} \text{ при всех } k = 1, 2, \dots, n.$$

В сумме  $a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + a_{ij+1}A_{ij+1} + \dots + a_{in}A_{in}$  все слагаемые, кроме  $j$ -го и  $(j+1)$ -го, равны 0, так как  $M_{i\ell}$  при  $\ell \neq j, j+1$  – это определитель  $(n-1) \times (n-1)$ -матрицы с двумя соседними равными столбцами.

Итак,  $D_n(A) = a_{ij}A_{ij} + a_{ij+1}A_{ij+1}$ . По условию  $a_{ij} = a_{ij+1}$ , кроме того,  $M_{ij} = M_{ij+1}$ , так как при вычеркивании  $i$ -й строки и  $j$ -го или  $(j+1)$ -го столбцов получается одна и та же матрица. Поэтому

$$A_{ij+1} = (-1)^{i+j+1}M_{ij+1} = -(-1)^{i+j}M_{ij+1} = -(-1)^{i+j}M_{ij} = -A_{ij}$$

и слагаемые  $a_{ij}A_{ij}$  и  $a_{ij+1}A_{ij+1}$  уничтожаются. Отсюда  $D_n(A) = 0$ , и мы доказали, что аксиома  $\Delta I$  выполняется.

Наконец, проверим  $\Delta\Pi$ . Пусть  $j$ -й столбец матрицы  $A$  представлен в виде

суммы двух столбцов: 
$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a'_{1j} + a''_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{i1} \dots a'_{ij} + a''_{ij} \dots a_{in} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a'_{nj} + a''_{nj} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$
. Рассмотрим матрицы

$A'$  и  $A''$ , у которых элементы  $j$ -го столбца суть  $a'_{kj}$  и соответственно  $a''_{kj}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , а остальные столбцы те же, что у  $A$ .

В сумме  $a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in}$  каждое слагаемое  $a_{i\ell}A_{i\ell}$  при  $\ell \neq j$  можно, применяя к определителю  $M_{i\ell}$  аксиому  $\Delta\Pi$ , представить как  $a_{i\ell}A'_{i\ell} + a_{i\ell}A''_{i\ell}$ . Слагаемое  $a_{ij}A_{ij}$  есть  $(a'_{ij} + a''_{ij})A_{ij} = a'_{ij}A'_{ij} + a''_{ij}A''_{ij}$ , поскольку  $M_{ij} = M'_{ij} = M''_{ij}$  — ведь при вычеркивании  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца из матриц  $A$ ,  $A'$  и  $A''$  получается одна и та же матрица.

Получаем, что

$$\begin{aligned} D_n(A) &= a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} = \\ &= (a_{i1}A'_{i1} + a_{i1}A''_{i1}) + \dots + (a'_{ij}A'_{ij} + a''_{ij}A''_{ij}) + \dots + (a_{in}A'_{in} + a_{in}A''_{in}) = \\ &= (a_{i1}A'_{i1} + \dots + a'_{ij}A'_{ij} + \dots + a_{in}A'_{in}) + (a_{i1}A''_{i1} + \dots + a''_{ij}A''_{ij} + \dots + a_{in}A''_{in}) = \\ &= D_n(A') + D_n(A''). \end{aligned}$$

Мы проверили первую часть  $\Delta II$ . Понятно, что вторая часть проверяется вполне аналогично (и менее громоздко).  $\square$

В конструкции из доказательства теоремы существования использовалась некоторая фиксированная, но произвольная строка.

В силу теоремы единственности не важно, какую строку брать, – все выражения вида  $a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in}$  дадут один и тот же результат при любом  $i$ . (Отметим, что априори это далеко не очевидно).

Итак, *определитель матрицы равен сумме произведений элементов **любой** ее строки на их алгебраические дополнения (**разложение по строке**)*.