Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

2. Ортогональность

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Ортогональные и ортонормированные наборы векторов

Определение

Вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $\mathbf{xy} = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1. Отношение ортогональности обозначим символом $\perp$, т.е. тот факт, что вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, будем записывать в виде $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Замечания

1. *Нулевой вектор ортогонален любому вектору.*
2. *В евклидовом пространстве два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда угол между этими векторами прямой.*

Теорема Пифагора

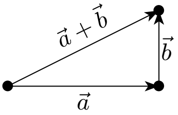
Если $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *– ортогональные вектора в пространстве со скалярным произведением, то* $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

Доказательство. Используя ортогональность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеем:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{aa}+\mathbf{ab}+\mathbf{ba}+\mathbf{bb} = \mathbf{aa}+\mathbf{bb} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2,$$

что и требовалось доказать. $\square$

В случае плоскости или обычного трехмерного пространства доказанное утверждение превращается в «обычную» теорему Пифагора из элементарной геометрии: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (см. рисунок).



Вопрос: верно ли обратное утверждение, т.е. верно ли, что если $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$, то вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны?

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_i, $1 \leq i \leq k$. Для каждого i умножим обе части этого равенства скалярно на $\mathbf{a}_i$. Имеем

$$0 = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_i + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_i + \cdots + t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i + \cdots + t_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_i = t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i$$

в силу ортогональности набора A. Поскольку $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, имеем $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i \neq 0$, а значит, из равенства $t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i = 0$ вытекает, что $t_i = 0$. $\square$

Следствие об ортонормированности и линейной независимости

Любой ортонормированный набор векторов линейно независим.

Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе

Определение

Ортогональный [ортонормированный] набор векторов, который является базисом, называется *ортогональным* [*ортонормированным*] *базисом*.

Примером ортонормированного базиса является стандартный базис

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

пространства $\mathbb{R}^n$ (если скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ определить как сумму произведений одноименных компонент).

Теорема о скалярном произведении в ортонормированном базисе

Пусть P – ортонормированный базис пространства V со скалярным произведением. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_P^T \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P}.$$

Доказательство. Обозначим координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе P через $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ соответственно. Пусть базис P состоит из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$
$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Перемножая, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{xy} &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n)(y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(x_i\mathbf{a}_i)(y_j\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\mathbf{a}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = \\ &= [\mathbf{x}]_P^T \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P}. \quad \square\end{aligned}$$

В евклидовом пространстве формула для вычисления скалярного произведения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по их координатам в ортонормированном базисе принимает совсем простой вид:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Из определений длины вектора, угла между векторами и расстояния между векторами немедленно вытекает, что в евклидовом пространстве справедливы также формулы

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}};$$

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Четыре последние формулы являются точными аналогами соответствующих формул из элементарной векторной алгебры.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Мы докажем, что ответ на него положителен для *конечномерных* пространств.

Ответ будет конструктивным. Он опирается на алгоритм, именуемый *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта)

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – линейно независимая система векторов пространства со скалярным произведением V. Тогда в V существует ортогональная система ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Доказательство. Индукция по n. Для $n = 1$ положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.

Пусть $1 \leqslant i < n$ и уже найден ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_i$, линейная оболочка которого совпадает с линейной оболочкой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$. Ищем вектор $\mathbf{b}_{i+1}$ в виде

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \qquad (\star)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ – некоторые скаляры, которые нужно найти.

Чтобы найти α_1, умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_i\mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \qquad (\star)$$

на $\mathbf{b}_1$ справа. Раз вектор $\mathbf{b}_1$ ортогонален векторам $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i$, получаем

$$\mathbf{b}_{i+1}\mathbf{b}_1 = \alpha_1\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1}\mathbf{b}_1.$$

Поскольку вектора $\mathbf{b}_{i+1}$ и $\mathbf{b}_1$ должны быть ортогональны, левая часть равна 0, и из равенства $0 = \alpha_1\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1}\mathbf{b}_1$ заключаем, что $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1}\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1}$. Аналогично, умножая скалярно обе части равенства $(\star)$ на $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_i$ справа и учитывая, что вектора $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_i$ попарно ортогональны, можно найти $\alpha_2 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1}\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2}$, $\ldots$, $\alpha_i = -\frac{\mathbf{a}_{i+1}\mathbf{b}_i}{\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i}$. При таких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ вектор $\mathbf{b}_{i+1}$, определяемый равенством $(\star)$, ортогонален всем векторам $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_i$, откуда система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{b}_{i+1}$ ортогональна. Напомним, что вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i$. Поэтому равенство $(\star)$ дает равенство вида $\mathbf{b}_{i+1} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_i\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}$, где $t_1, t_2, \ldots, t_i$ – некоторые скаляры. Иными словами, вектор $\mathbf{b}_{i+1}$ равен некоторой нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_{i+1}$. Поскольку эти вектора линейно независимы, никакая их нетривиальная линейная комбинация не может быть нулевым вектором. Отсюда $\mathbf{b}_{i+1} \neq \mathbf{0}$.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта (3)

Мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i+1}$, который лежит в линейной оболочке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i+1}$. С другой стороны, по предположению индукции вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i$ принадлежат линейной оболочке векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i$, а вектор $\mathbf{a}_{i+1}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i+1}$ в силу равенства $(\star)$. Поэтому линейные оболочки систем $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i+1}$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i+1}$ совпадают. $\square$

Следствие об ортонормированном базисе

В любом конечномерном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть V – рассматриваемое пространство и $\dim V = n$. Возьмем произвольный базис в V и применим к нему процесс Грама–Шмидта. Получим ортогональную систему из n векторов, порождающую V, а следовательно, – ортогональный базис в V. В силу замечания об орте вектора, разделив каждый вектор этого базиса на его длину, получим ортонормированный базис пространства V. $\square$

Следствие о дополнении до ортогонального базиса

Любую ортогональную систему ненулевых векторов конечномерного пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть V – рассматриваемое пространство, $\dim V = n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – ортогональный набор ненулевых векторов из V. Тогда вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, и их можно дополнить какими-то векторами $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ до базиса V. Применив к базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ процесс Грама–Шмидта, получим ортогональный базис в V. Легко убедиться, что на первых k шагах процесс будет возвращать именно вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. $\square$

Отсюда сразу получается и такой факт:

Следствие о дополнении до ортонормированного базиса

Любую ортонормированную систему векторов конечномерного пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.

Процесс Грама–Шмидта можно применять и к *бесконечным системам* линейно независимых векторов. Например, если рассматривать кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как евклидово пространство относительно скалярного произведения $(f, g) := \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$, то применив процесс Грама–Шмидта к линейно независимой системе $1, x, \dots, x^n, \dots$, получим ортогональную систему так называемых *сдвинутых многочленов Лежандра* $\{\widetilde{P}_n(x)\}$. Вот несколько первых многочленов этой системы:

n	$\widetilde{P}_n(x)$
0	1
1	$2x - 1$
2	$6x^2 - 6x + 1$
3	$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$
4	$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1$
5	$252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1$

Многочлены $\{\widetilde{P}_n(x)\}$ имеют многочисленные приложения в математике; в последнее время они используются при построении нейронных сетей.

Ортогональное дополнение

Определение

Пусть S – подпространство в V. Множество всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S, называется *ортогональным дополнением* подпространства S. Ортогональное дополнение подпространства S обозначается через $S^{\perp}$.

Предложение об ортогональном дополнении

Пусть S – подпространство пространства со скалярным произведением V, а $S^{\perp}$ – ортогональное дополнение S. Тогда:

1) *$S^{\perp}$ – подпространство пространства V;*
2) *если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис S, то $\mathbf{x} \in S^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}\mathbf{a}_2 = \cdots = \mathbf{x}\mathbf{a}_k = 0$.*

Ортогональное дополнение (2)

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^\perp$, $\mathbf{a} \in S$, а $t \in F$ – произвольное число, то $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{a} = \mathbf{xa}+\mathbf{ya} = 0+0 = 0$ и $(t\mathbf{x})\mathbf{a} = t(\mathbf{xa}) = t \cdot 0 = 0$.

2) Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис S, а $\mathbf{x} \in S^\perp$, то вектор $\mathbf{x}$ ортогонален векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, поскольку он ортогонален всем векторам из S. Предположим теперь, что $\mathbf{x}$ ортогонален векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{a} \in S$. Тогда $\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k \in F$. Тогда

$$\mathbf{ax} = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{x} = t_1(\mathbf{a}_1\mathbf{x}) + t_2(\mathbf{a}_2\mathbf{x}) + \cdots + t_k(\mathbf{a}_k\mathbf{x}) = \\ = t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 0 + \cdots + t_k \cdot 0 = 0,$$

и потому $\mathbf{x} \in S^\perp$. $\square$

Ортогональное разложение

Теорема об ортогональном разложении

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V, то $V = S \oplus S^{\perp}$.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \in S \cap S^{\perp}$, то $\mathbf{xx} = 0$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, откуда сумма $S + S^{\perp}$ прямая.
Осталось проверить, что $S + S^{\perp} = V$. Положим $\dim V = n$ и $\dim S = k$. Возьмем ортонормированный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства S и дополним этот базис до ортонормированного базиса пространства V. Пусть $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ – вектора, использованные для дополнения. Каждый из этих $n - k$ векторов ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, и предложение об ортогональном дополнении дает $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \in S^{\perp}$. Итак, $S + S^{\perp}$ содержит все вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, составляющие базис V, откуда $S + S^{\perp} = V$. $\square$

Равенство $V = S \oplus S^{\perp}$ называется *ортогональным разложением* пространства V относительно подпространства S.

В евклидовом пространстве для построения базиса ортогонального дополнения $S^\perp$ по базису подпространства S используют такой алгоритм.

Алгоритм нахождения базиса ортогонального дополнения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис подпространства S евклидова пространства V. Составим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

в которой $(a_{i1}, \ldots, a_{ij})$ – это координаты вектора $\mathbf{a}_i$ в некотором ортонормированном базисе пространства V. Фундаментальная система решений системы $(*)$ будет базисом подпространства $S^\perp$.

Доказательство. Система $(*)$ выражает тот факт, что вектор $\mathbf{x}$ с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. что по предложению об ортогональном дополнении равносильно тому, что $\mathbf{x} \in S^\perp$. Итак, $S^\perp$ – пространство решений системы $(*)$. □

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S, S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

1) $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, *а* $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$;
2) $(S^\perp)^\perp = S$;
3) *если* $S_1 \subseteq S_2$, *то* $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;
4) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$, *а* $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$;
5) *если* $V = S_1 \oplus S_2$, *то* $V = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$.

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x} \in V^\perp$, то $\mathbf{xy} = 0$ для любого вектора $\mathbf{y} \in V$. В частности, $\mathbf{xx} = 0$. В силу аксиомы 4) имеем $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно, $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$. А равенство $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$ вытекает из замечания о нулевом векторе и ортогональности.

2) Из определения ортогонального дополнения вытекает, что если $\mathbf{x} \in S$, то $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из $S^\perp$. Следовательно, $S \subseteq (S^\perp)^\perp$. Пусть $\dim S = k$ и $\dim V = n$. В силу теоремы об ортогональном разложении $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n-k) = k = \dim S$. Итак, S – подпространство в $(S^\perp)^\perp$ и $\dim S = \dim(S^\perp)^\perp$. Отсюда $S = (S^\perp)^\perp$.

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $\mathbf{x} \in S_2^\perp$. Тогда $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из S_2, а значит, в частности, и к любому вектору из S_1. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^\perp$, и потому $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

4) Пусть $\mathbf{x} \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$ и $\mathbf{y} \in S_1 + S_2$. Тогда $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ для некоторых векторов $\mathbf{y}_1 \in S_1$ и $\mathbf{y}_2 \in S_2$. В силу выбора $\mathbf{x}$ имеем $\mathbf{x}\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}\mathbf{y}_2 = 0$, откуда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}\mathbf{y}_2 = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^\perp$, и потому $S_1^\perp \cap S_2^\perp \subseteq (S_1 + S_2)^\perp$. Докажем обратное включение. Пусть $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^\perp$. Поскольку $S_1 \subseteq S_1 + S_2$ и $S_2 \subseteq S_1 + S_2$, из свойства 3) вытекает, что $\mathbf{x} \in S_1^\perp$ и $\mathbf{x} \in S_2^\perp$. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$, и потому $(S_1 + S_2)^\perp \subseteq S_1^\perp \cap S_2^\perp$. Мы проверили, что $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$. Используя свойство 2), имеем

$$S_1^\perp + S_2^\perp = \left((S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp\right)^\perp = \left((S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp\right)^\perp = (S_1 \cap S_2)^\perp.$$

5) По условию $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. Используя свойства 1) и 4), имеем $S_1^\perp + S_2^\perp = (S_1 \cap S_2)^\perp = \{\mathbf{0}\}^\perp = V$. Далее, $S_1 + S_2 = V$, откуда, снова используя 1) и 4), получаем $S_1^\perp \cap S_2^\perp = (S_1 + S_2)^\perp = V^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Итак, $V = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$. $\square$

Нахождение базиса пересечения подпространств

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств. В самом деле, если S_1 и S_2 – подпространства пространства со скалярным произведением, то

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^{\perp})^{\perp} \cap (S_2^{\perp})^{\perp} = (S_1^{\perp} + S_2^{\perp})^{\perp}.$$

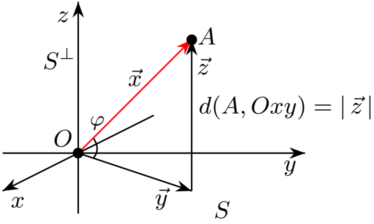
Поскольку мы знаем, как находить базисы суммы подпространств и ортогонального дополнения к подпространству, это позволяет легко найти базис пересечения подпространств.

Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $\mathbf{x} \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, вектора $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ такие, что $\mathbf{y} \in S$, $\mathbf{z} \in S^{\perp}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Вектор $\mathbf{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на подпространство S и обозначается через $\mathbf{x}_S$, а вектор $\mathbf{z}$ называется *ортогональной составляющей* $\mathbf{x}$ относительно S и обозначается через $\mathbf{x}^{\perp}$. Длина ортогональной составляющей вектора $\mathbf{x}$ относительно S называется *расстоянием от* $\mathbf{x}$ *до* S. Предположим теперь, что V – евклидово пространство. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то *углом между* $\mathbf{x}$ *и* S называется угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S по определению считается равным $\frac{\pi}{2}$ (это естественно, так как в данном случае $\mathbf{x} = \mathbf{z} \in S^{\perp}$). Наконец, если $S = \{\mathbf{0}\}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S не определен. Расстояние от $\mathbf{x}$ до S обозначается через $d(\mathbf{x}, S)$, а угол между $\mathbf{x}$ и S – через $(\widehat{\mathbf{x}, S})$.

- В унитарном пространстве угол между вектором и подпространством не определен, поскольку в нем не определен угол между векторами.

Все введенные только что понятия полностью аналогичны одноименным понятиям в обычном пространстве с обычным скалярным произведением. В самом деле, возьмем в этом пространстве в качестве подпространства S плоскость Oxy. Ясно, что ортогональным дополнением $S^{\perp}$ будет ось Oz. Отложим вектор $\vec{x}$ от начала координат. Тогда ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на S – это его проекция на плоскость Oxy в обычном смысле, расстояние от $\vec{x}$ до S – обычное расстояние от конца вектора $\vec{x}$ до плоскости Oxy, угол между $\vec{x}$ и S – обычный угол между этим вектором и Oxy (см. рисунок).



Расстояние от вектора до подпространства
и угол между вектором и подпространством

Связь ортогональной проекции вектора на подпространство с расстоянием от вектора до подпространства

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство, а $\mathbf{a}$ – произвольный вектор из V. Обозначим через $\mathbf{a}_S$ ортогональную проекцию $\mathbf{a}$ на S, а через $\mathbf{a}^{\perp}$ – ортогональную составляющую $\mathbf{a}$ относительно S. Для всякого $\mathbf{x} \in S$ обозначим через $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ расстояние между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$, рассматриваемое как функцию от $\mathbf{x}$.

Замечание об ортогональной проекции

Значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. При этом $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_S) = d(\mathbf{a}, S)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{a}_S - \mathbf{x} \in S$, из теоремы Пифагора вытекает, что $|\mathbf{a} - \mathbf{x}|^2 = \big|(\mathbf{a}_S + \mathbf{a}^{\perp}) - \mathbf{x}\big|^2 = \big|(\mathbf{a}_S - \mathbf{x}) + \mathbf{a}^{\perp}\big|^2 = |\mathbf{a}_S - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{a}^{\perp}|^2$. Поскольку $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = |\mathbf{a} - \mathbf{x}|$, мы получаем, что значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда минимально значение выражения $|\mathbf{a}_S - \mathbf{x}|^2$. В свою очередь, значение последнего выражения минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_S - \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. Первое утверждение доказано.

Из доказанного вытекает, что $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_S) = |\mathbf{a}^{\perp}|$, а $|\mathbf{a}^{\perp}| = d(\mathbf{a}, S)$ по определению расстояния от вектора до подпространства. $\square$

Замечание об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *– линейно независимая система векторов в пространстве со скалярным произведением, а система* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ *получена из нее процессом Грама–Шмидта. Тогда для всякого* $i = 2, 3, \ldots, k$ *вектор* $\mathbf{b}_i$ *является ортогональной составляющей вектора* $\mathbf{a}_i$ *относительно подпространства* S*, порожденного* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Доказательство. Процесс Грама–Шмидта обеспечивает, что:

(i) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}\}$ – ортогональный базис в S,

(ii) вектор $\mathbf{b}_i$ ортогонален векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$,

(iii) $\mathbf{b}_i = \mathbf{x} + \mathbf{a}_i$ для некоторого вектора $\mathbf{x} \in S$.

Из (i) и (ii) вытекает, что $\mathbf{b}_i \in S^\perp$. Из (iii) имеем $\mathbf{a}_i = -\mathbf{x} + \mathbf{b}_i$, причем $-\mathbf{x} \in S$ и $\mathbf{b}_i \in S^\perp$. Следовательно, $\mathbf{b}_i$ – ортогональная составляющая вектора $\mathbf{a}_i$ относительно S. $\square$

Напомним, что *псевдорешение* системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ – это такой вектор $\mathbf{x}_0$, что расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{b}$ наименьшее.

Теперь понятно, как можно искать псевдорешения. Нужно:
(1) найти ортогональную проекцию $\mathbf{b}_S$ вектора $\mathbf{b}$ на образ S линейного отображения $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ (т.е. на подпространство, порожденное столбцами матрицы A), а затем
(2) решить систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$, которая заведома совместна.

Любое решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$ действительно является псевдорешением исходной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, так как наименьшее расстояние от вектора $\mathbf{b}$ до подпространства S есть расстояние от $\mathbf{b}$ до $\mathbf{b}_S$.