

# Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

## 4. Линейные функционалы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Пусть  $V$  — векторное пространство над произвольным полем  $F$ .

*Линейный функционал* на  $V$  — это линейный оператор  $g: V \rightarrow F$ .

**Пример 1:** Пусть  $V = F^n$  — пространство строк длины  $n$  над  $F$ . отображение  $g: V \rightarrow F$ , определенное правилом  $g(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$ , является линейным функционалом.

**Пример 2:** Пусть  $V$  — пространство всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . отображение  $g: V \rightarrow F$ , которое сопоставляет функции  $f(x)$  число  $f(0)$ , является линейным функционалом. (Это — так называемая  *$\delta$ -функция Дирака*.)

**Пример 3:** На пространстве многочленов  $\mathbb{R}[x]$  отображение, сопоставляющее многочлену  $f \in \mathbb{R}[x]$  число  $\int_0^1 f(t) dt$ , — линейный функционал.

**Пример 4:** На любом пространстве  $V$  отображение, сопоставляющее каждому вектору из  $V$  элемент  $0 \in F$ , — линейный функционал.

Пусть  $V$  — пространство со скалярным произведением,  $a$  — фиксированный вектор из  $V$ . В силу свойств скалярного произведения отображение  $x \mapsto xa$  является линейным функционалом на  $V$ . Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

## Теорема (строение линейного функционала)

*Пусть  $V$  — конечномерное пространство со скалярным произведением над полем  $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , а  $\Phi: V \rightarrow F$  — линейный функционал. Тогда существует единственный вектор  $a \in V$  такой, что  $\Phi(x) = xa$  для каждого вектора  $x \in V$ .*

*Доказательство.* **Единственность** вектора, определяющего функционал, сразу следует из **ослабленного закона сокращения** (см. первый раздел темы): если вектора  $a, b \in V$  таковы, что для любого вектора  $x \in V$  выполняется равенство  $xa = xb$ , то  $a = b$ . Докажем **существование**. Если  $\Phi(x) = 0$  для всех  $x \in V$ , то в роли  $a$  со свойством  $\Phi(x) = xa$  годится вектор  $0$ . Поэтому будем считать, что  $\Phi$  принимает не только значение  $0$ .

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта  $\text{Ker}(\Phi)$  — подпространство размерности  $\dim V - 1$ , а его ортогональное дополнение  $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$  — одномерное подпространство в  $V$ . Фиксируем ненулевой вектор  $\mathbf{b} \in (\text{Ker}(\Phi))^\perp$  и пусть  $\beta := \Phi(\mathbf{b})$ . Положим  $\mathbf{a} := \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b}$  и проверим, что  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$  для каждого  $\mathbf{x} \in V$ . Для этого представим  $\mathbf{x}$  в виде  $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$  для некоторого  $\mathbf{c} \in \text{Ker}(\Phi)$  и  $\gamma \in F$ . Такое представление возможно, так как  $V = \text{Ker}(\Phi) \oplus (\text{Ker}(\Phi))^\perp$ , а одномерное подпространство  $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$  порождается вектором  $\mathbf{b}$ . Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) + \Phi(\gamma\mathbf{b}) = \gamma\Phi(\mathbf{b}) = \gamma\beta,$$

поскольку  $\Phi(\mathbf{c}) = 0$ . С другой стороны,

$$\mathbf{x}\mathbf{a} = (\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b} = \mathbf{c} \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b} + \gamma\mathbf{b} \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b} = \gamma\beta,$$

поскольку  $\mathbf{c}\mathbf{b} = 0$ .



В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}[x]$  всех многочленов над полем  $\mathbb{R}$  со скалярным произведением  $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$  функционал,

сопоставляющий многочлену  $f \in \mathbb{R}[x]$  число  $\int_0^1 f(t)dt$ , представим как скалярное произведение многочлена  $f$  с многочленом 1. А вот функционал, сопоставляющий многочлену  $f$  его свободный член, в виде скалярного произведения представить нельзя; другими словами, нет такого многочлена  $g$ , что для любого многочлена  $f$  выполняется равенство  $\int_0^1 f(t)g(t)dt = f(0)$ . Попробуйте обосновать это утверждение!