Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

1. Пространства со скалярным произведением

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Скалярное произведение

В этой теме мы работаем с векторными пространствами над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел или над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.
Для $\alpha \in \mathbb{C}$ через $\overline{\alpha}$ обозначается число, комплексно сопряженное к α.

Определения

Пусть F – одно из полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а V – векторное пространство над F. Отображение $V \times V \to F$, результат применения которого к паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ обозначается $\mathbf{xy}$ (или $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, или $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle$) называется *скалярным произведением* в V, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{xy} = \overline{\mathbf{yx}}$;
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \; \forall \alpha \in F \quad (\alpha \mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{xy})$;
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
4) $\forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{xx} \geqslant 0$, причем $\mathbf{xx} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*; пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$ называется *унитарным*.

Комментарии к определению скалярного произведения

- Мы обычно используем обозначение $\mathbf{xy}$. Обозначение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ уместно тогда, когда в рассматриваемом пространстве (как, например, в $\mathbb{R}[x]$) есть «свое» умножение. Обозначение Дирака $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle$ используется в квантовой механике.
- Как и рассматривавшееся в теме I скалярное произведение векторов трехмерного пространства, скалярное произведение в абстрактном векторном пространстве не является алгебраической операцией (в смысле определения операции из курса «Введение в математику»), поскольку его результатом является число, а не вектор.
- Если $F = \mathbb{R}$, то аксиома 1) означает, что $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$. Иными словами, *скалярное произведение в евклидовом пространстве коммутативно*.
- Хотя для комплексного числа α соотношение $\alpha \geqslant 0$, вообще говоря, не имеет смысла (поскольку на множестве всех комплексных чисел нет совместимого с умножением и сложением отношения порядка), аксиома 4) осмысленна не только в евклидовом, но и в унитарном пространстве. В самом деле, из аксиомы 1) вытекает, что $\mathbf{xx} = \overline{\mathbf{xx}}$, а потому $\mathbf{xx} \in \mathbb{R}$ для любого $\mathbf{x} \in V$ и в случае, когда рассматриваются вектора над $\mathbb{C}$.

Примеры пространств со скалярным произведением

Пример 1. Трехмерное пространство аналитической геометрии с обычным скалярным произведением векторов $\vec{a}\vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ евклидово, ибо аксиомы 1)–4) – это известные нам свойства такого произведения.

Пример 2. Зафиксируем базис плоскости $\mathbb{R}^2$ и рассмотрим следующее отображение $\bullet$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: для векторов $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2)$ положим

$$\vec{x} \bullet \vec{y} := x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Можно проверить, что аксиомы 1)–4) выполнены, и потому множество векторов плоскости с произведением $\bullet$ является евклидовым пространством.

Заметим, что для векторов плоскости определено и обычное скалярное произведение из примера 1. Поэтому в одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно вводить разными способами.

Пример 3. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$. Для произвольных многочленов $f, g \in \mathbb{R}[x]$ положим $(f, g) := \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$. Нетрудно убедиться, что эта операция удовлетворяет аксиомам 1)–4). Это означает, что $\mathbb{R}[x]$ – евклидово пространство.

Следующий пример показывает, как ввести скалярное произведение в *любом* конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пример 4. Пусть V – произвольное ненулевое конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ – его базис. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Обозначим координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ через $(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ соответственно. Положим

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n}. \qquad (*)$$

Простая проверка показывает, что аксиомы 1)–4) в этом случае также выполняются. Следовательно, пространство V с введенной операцией является пространством со скалярным произведением.
Если V – пространство над $\mathbb{R}$, определение $(*)$ упрощается до:

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

Если обозначить через $[\mathbf{x}]$ координатный *столбец* вектора $\mathbf{x}$, то формулу $(*)$ можно компактно записать как

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := [\mathbf{x}]^T\overline{[\mathbf{y}]}.$$

Аксиома 2) утверждает, что скаляр можно выносить за скобки от первого сомножителя. В действительности, скаляр можно выносить и от второго сомножителя, но при этом его надо сопрягать. А именно,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ \forall \alpha \in F \quad \mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}\mathbf{y}). \qquad (\star)$$

В самом деле, аксиомы 1) и 2) и свойства комплексного сопряжения дают

$$\mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}) \overset{1)}{=} \overline{(\alpha\mathbf{y})\mathbf{x}} \overset{2)}{=} \overline{\alpha(\mathbf{y}\mathbf{x})} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\mathbf{y}\mathbf{x}} \overset{1)}{=} \overline{\alpha}(\mathbf{x}\mathbf{y}).$$

Над $\mathbb{R}$ формула $(\star)$ упрощается до $\mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}\mathbf{y})$.

Аналогичное замечание можно сделать об аксиоме 3): скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения не только по первому, но и по второму аргументу. В самом деле, аксиомы 1) и 3) дают

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \overset{1)}{=} \overline{(\mathbf{y}+\mathbf{z})\mathbf{x}} \overset{3)}{=} \overline{\mathbf{y}\mathbf{x}+\mathbf{z}\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{z}\mathbf{x}} \overset{1)}{=} \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{z}.$$

Далее, для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполнены равенства

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 0,$$

поскольку $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = (0 \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} = 0 \cdot (\mathbf{x}\mathbf{x}) = 0$ и $\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \overline{\mathbf{0} \cdot \mathbf{x}} = \overline{0} = 0$.

Ослабленный закон сокращения

Следующее утверждение как по формулировке, так и по доказательству, вполне аналогично ослабленному закону сокращения для скалярного произведения в обычном трехмерном пространстве.

Ослабленный закон сокращения

Если V – пространство со скалярным произведением, а вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{ax} = \mathbf{bx}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. То же заключение верно, если для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из условия вытекает, что $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{x} = 0$ для любого $\mathbf{x} \in V$. В частности, $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$. В силу аксиомы 4) отсюда вытекает, что $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Определение

Скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{x}$ и обозначается через $\mathbf{x}^2$.

Аксиома 4) позволяет дать следующее

Определение

Длина вектора $\mathbf{x}$ – это неотрицательное действительное число $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{xx}}$.

Это определение согласуется с понятием длины вектора в обычном трехмерном пространстве. На пространства со скалярным произведением переносятся многие свойства длин векторов трехмерного пространства. В частности, для любого $\alpha \in F$

$$|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|.$$

В самом деле, $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$, и потому

$$|\alpha\mathbf{x}| = \sqrt{(\alpha\mathbf{x})(\alpha\mathbf{x})} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(\mathbf{xx})} = \sqrt{|\alpha|^2(\mathbf{xx})} = \sqrt{|\alpha|^2} \cdot \sqrt{\mathbf{xx}} = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|.$$

Как и в обычном трехмерном пространстве, справедливо

Замечание об орте вектора

Если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *то длина вектора* $\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ *равна* 1.

Доказательство. Используя свойство $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|$, имеем

$$\left|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot \mathbf{x}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right| \cdot |\mathbf{x}| = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot |\mathbf{x}| = 1,$$

что и требовалось доказать. □

Определение

Если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то вектор $\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ называется *ортом* вектора $\mathbf{x}$.

Теорема (неравенство Коши–Буняковского)

Пусть V – пространство со скалярным произведением и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда

$$|\mathbf{xy}| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|, \tag{$\dagger$}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы.

Доказательство. Если $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то $|\mathbf{xy}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| = 0$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, и в силу аксиомы 4) $\mathbf{yy} > 0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}$, где α – скаляр. По аксиоме 4) $(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y})(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}) \geqslant 0$. Раскрывая скобки и вынося скаляры вперед, получаем неравенство

$$\mathbf{xx} - \alpha\mathbf{yx} - \overline{\alpha}\mathbf{xy} + \alpha\overline{\alpha}\mathbf{yy} \geqslant 0.$$

Подставим в него вместо α число $\dfrac{\mathbf{xy}}{\mathbf{yy}}$. Получим

$$0 \leqslant \mathbf{xx} - \frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{yy}} \cdot \mathbf{yx} - \frac{\overline{\mathbf{xy}}}{\mathbf{yy}} \cdot \mathbf{xy} + \frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{yy}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{xy}}}{\mathbf{yy}} \cdot \mathbf{yy} =$$

$$= \mathbf{xx} - \frac{\mathbf{xy} \cdot \overline{\mathbf{xy}}}{\mathbf{yy}} = \mathbf{xx} - \frac{|\mathbf{xy}|^2}{\mathbf{yy}}.$$

Неравенство Коши–Буняковского (2)

Итак, $\dfrac{|\mathbf{xy}|^2}{\mathbf{yy}} \leqslant \mathbf{xx}$. Домножая обе части на положительное число $\mathbf{yy}$, имеем $|\mathbf{xy}|^2 \leqslant \mathbf{xx} \cdot \mathbf{yy}$. Заменяя в последнем неравенстве $\mathbf{xx}$ на $|\mathbf{x}|^2$ и $\mathbf{yy}$ на $|\mathbf{y}|^2$ и извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем $(\dagger)$.

Теперь займемся вторым утверждением теоремы (что равенство в $(\dagger)$ достигается тогда и только тогда, когда вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы).

Если вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы, то $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ для всякого α и верно строгое неравенство $(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y})(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}) > 0$. Тогда во всех выкладках выше можно заменить нестрогое неравенство на строгое и вместо $(\dagger)$ получить неравенство $|\mathbf{xy}| < |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$. Таким образом, если в $(\dagger)$ имеет место равенство, то $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы. Раз $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, имеем $\mathbf{x} = \gamma\mathbf{y}$ для некоторого скаляра γ. Отсюда

$$|\mathbf{xy}| = \big|(\gamma\mathbf{y})\mathbf{y}\big| = \big|\gamma(\mathbf{yy})\big| = |\gamma| \cdot |\mathbf{yy}| = |\gamma| \cdot |\mathbf{y}| \cdot |\mathbf{y}| = |\gamma\mathbf{y}| \cdot |\mathbf{y}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|.$$

Теорема доказана. $\square$

Неравенство Коши–Буняковского – обсуждение

Неравенство Коши–Буняковского выглядит просто и доказывается несложно. Однако при внешней простоте – это глубокий и важный факт.

Его специализация для n-мерного пространства над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением, введенным формулой $\mathbf{x}\mathbf{y} := [\mathbf{x}]^T[\mathbf{y}]$, дает неочевидное неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

которое, собственно, и доказал Коши (в 1821 г.).

Специализация для пространства непрерывных функций из отрезка $[0,1]$ в $\mathbb{R}$ дает интегральное неравенство

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)} \cdot \sqrt{\left(\int_0^1 g(x)^2\,dx\right)},$$

которое, собственно, и доказал Буняковский (в 1859 г.).

В квантовой механике неравенство Коши–Буняковского приводит к *принципу неопределенности Гейзенберга*.

Угол между векторами

Если пространство V евклидово и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$-1 \leqslant \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leqslant 1.$$

Это делает корректным следующее определение.

Определение

Углом между ненулевыми векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства называется наименьший угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определен.

Отметим, что формула для вычисления косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве полностью аналогична соответствующей формуле для векторов в обычном трехмерном пространстве.

- В унитарном пространстве угол между векторами не определен.

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает

Следствие о длине суммы векторов

Для произвольных векторов $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *из пространства со скалярным произведением выполнено неравенство*

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \qquad (\triangle)$$

Если вектора $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *линейно независимы, то* $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| < |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y})| = \\
&= |\mathbf{xx}+\mathbf{xy}+\mathbf{yx}+\mathbf{yy}| \leqslant \quad \text{(Использовано неравенство} \\
&\leqslant |\mathbf{xx}|+|\mathbf{xy}|+|\mathbf{yx}|+|\mathbf{yy}| \quad \text{для модуля суммы комплексных чисел)} = \\
&= |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{xy}| + |\mathbf{y}|^2 \quad \text{(Использовано равенство } |\mathbf{yx}| = |\mathbf{xy}|) \leqslant \\
&\leqslant |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \quad \text{(неравенство Коши–Буняковского)} = \\
&= \bigl(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|\bigr)^2.
\end{aligned}$$

Итак, $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 \leqslant \bigl(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|\bigr)^2$. Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратный корень, получаем неравенство $(\triangle)$.

Неравенство для длины суммы векторов (2)

Если вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы, то $|\mathbf{xy}| < |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$. Заменяя использованное в нашей выкладке неравенство $|\mathbf{xy}| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ на это строгое неравенство, получаем, что в этом случае $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| < |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$. $\square$

Неравенство ($\triangle$) обобщает известный факт элементарной геометрии: сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны. Поэтому неравенство ($\triangle$) называют *неравенством треугольника*.

Определение

Расстоянием между векторами $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ в пространстве со скалярным произведением называется длина вектора $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Обозначим расстояние между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Замечание о расстоянии между векторами

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ – произвольные вектора из пространства со скалярным произведением, то:

1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$;
2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
3) *выполнено неравенство*

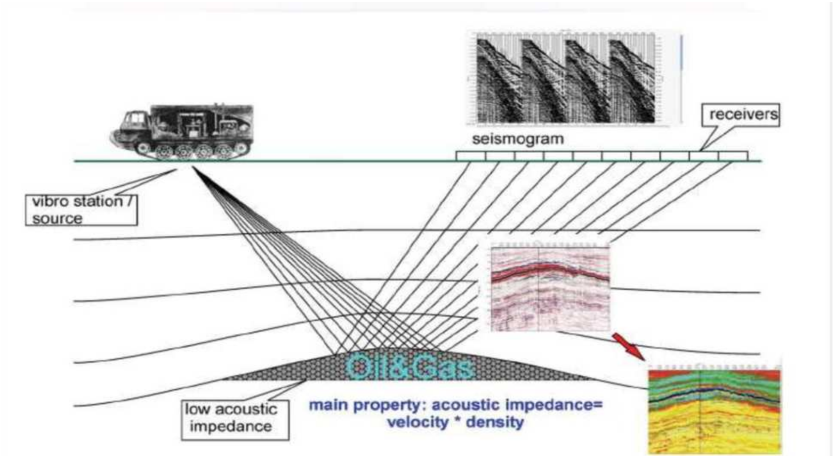
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Доказательство. Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3). Имеем

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = |\mathbf{x} - \mathbf{z}| = \big|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})\big| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Замечание доказано. □

Системы линейных уравнений, взятые из реальных задач, обычно *переопределены* (число уравнений много больше числа неизвестных). Инженеры (геологи, физики, ...) полагают, что чем больше сделано измерений, тем достоверней будет результат.



Однако из-за погрешностей измерения и ошибок округления получающиеся системы линейных уравнений *несовместны*.
Понятно, что ответ «Ваша система не имеет решений» не удовлетворит инженера (геолога, физика, ...) – уравнения описывают некоторый реально существующий объект, т.е. решение *есть*!
Как же найти решение несовместной системы?

Изменим постановку задачи: будем искать не такой вектор $\mathbf{x}$, что $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, а такой вектор $\mathbf{x}$, что *расстояние* между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ *наименьшее*.
Заметим, что если система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совместна, то такие *псевдорешения* будут в точности решениями в обычном смысле. Но псевдорешения существуют и для несовместных систем!

Возникает новый вопрос: как искать псевдорешения несовместных систем? Мы вскоре ответим на него.