Тема V: Линейные операторы

§3. Умножение операторов и матриц

М.В.Волков

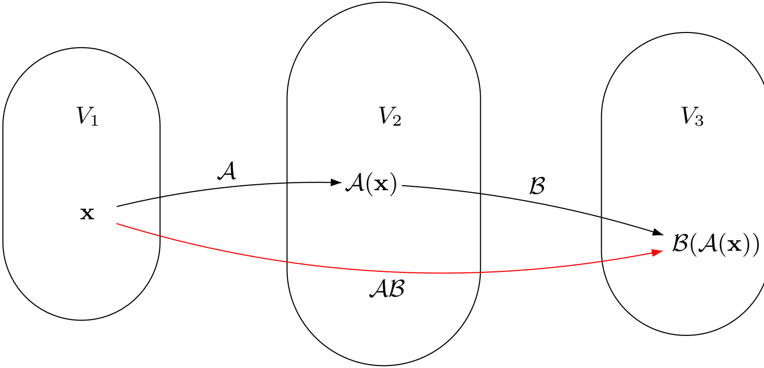
Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \ \text{ для всех } \ \mathbf{x} \in V_1.$$

Мы называем $\mathcal{AB}$ *произведением* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.



Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

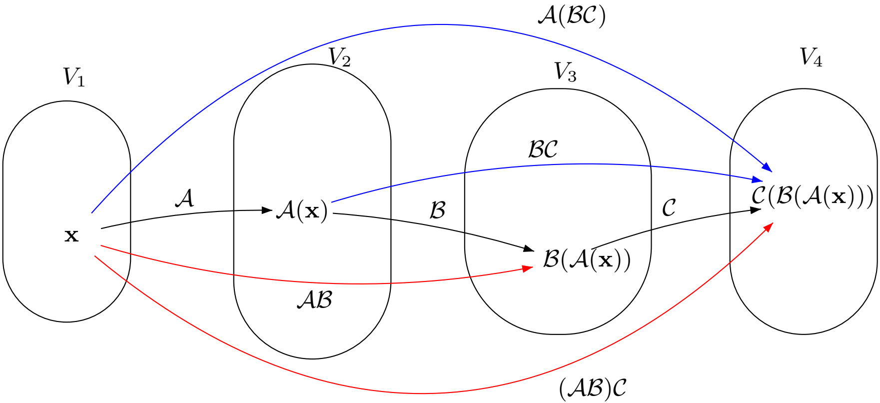
Доказательство. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{AB}(\mathbf{x})+\mathcal{AB}(\mathbf{y}).$$

Так же проверяется, что $\mathcal{AB}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{AB}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $t \in F$. $\square$

Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$



Ассоциативность – свойство композиции произвольных отображений.

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) + \mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

$$= \mathcal{A}\mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C})(\mathbf{x}).$$

Аналогично проверяется дистрибутивность справа. $\square$

Дистрибутивность уже использует специфику линейных операторов; скажем, при композиции произвольных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ее нет. (*Докажите!*)

Следствие

Множество $\mathrm{Hom}(V, V)$ *всех линейных операторов пространства* V *является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения линейных операторов.*

Упражнения. 1. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим оператор дифференцирования: $\mathcal{D}(p) := p'$, где p' – производная многочлена p. Как действует квадрат оператора $\mathcal{D}$?

2. Пусть $\mathcal{R}_\alpha$ – оператор поворота плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на угол α. Как действует произведение $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta$?

3. Приведите пример двух линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, таких, что $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m\times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m\times n}$ произведения $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Из выражения для образа вектора через матрицу оператора имеем:

$$C[\mathbf{x}]_P = \big[\mathcal{AB}(\mathbf{x})\big]_R = \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\big]_R = B\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q = B(A[\mathbf{x}]_P).$$

Матрица произведения операторов (2)

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому $A[\mathbf{p}_1]_P)$ – это первый столбец матрицы A, а $C[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы C. Итак, первый столбец матрицы C есть произведение матрицы B на первый столбец матрицы A.

Полагая в том же равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{p}_2$ и т.д., получим, что каждый столбец матрицы C есть произведение B на столбец матрицы A с тем же номером. Другими словами, элемент матрицы C, стоящий на месте i, j есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы B на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A (правило «строка на столбец»).

Матрица произведения операторов (3)

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Итак, произведение матриц G и H определено тогда и только тогда, когда число столбцов G равно числу строк H. Если $G = (g_{ij})_{p\times\ell}$, а $H = (h_{ij})_{\ell\times q}$, то *произведением* матриц G и H называется матрица $GH = (f_{ij})_{p\times q}$, где f_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы G на соответствующие элементы j-го столбца матрицы H:

$$f_{ij} := g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j} + \cdots + g_{i\ell}h_{\ell j} \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, p \text{ и } j = 1, 2, \ldots, q.$$

Возвращаясь к произведениям линейных операторов, заключаем, что при соответствии, которое сопоставляет линейному оператору его матрицу, выполнено равенство

$$[\mathcal{AB}]_{P,R} = [\mathcal{B}]_{Q,R}[\mathcal{A}]_{P,Q}.$$

⚠ Матрицы операторов перемножаются в порядке, обратном тому, в котором записаны операторы.

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Умножение матриц некоммутативно! Даже для квадратных матриц A и B одинакового размера, когда оба произведения AB и BA определены, как правило, $AB \neq BA$.

Упражнение: составьте две 2×2-матрицы из цифр даты своего рождения. Например, для даты 01.02.2003 эти матрицы будут $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Перемножьте эти матрицы в разном порядке и сравните результаты.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C = (g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC) = (h_{ij})_{m\times s}$. Требуется доказать, что $g_{ij} = h_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{r} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\left[\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)\cdot c_{kj}\right] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} =$$
$$= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n}\left[a_{i\ell}\cdot\left(\sum_{k=1}^{r} b_{\ell k}c_{kj}\right)\right] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}f_{\ell j} = h_{ij}. \qquad \square$$

Упражнение: докажите свойство 4): если произведение AB определено, то

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Таким образом, единичная матрица выглядит следующим образом:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Это не что иное как матрица единичного оператора $\mathcal{E}$.
Можно также записать $E_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$, используя *символ Кронекера*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Свойство единичной матрицы

Если произведение AE [соответственно EA] определено, то $AE = A$ [соответственно $EA = A$].

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначный линейный оператор векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Так же проверяется, что $\mathcal{A}^{-1}(t\mathbf{y}) = t\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Вспомним, что взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2 мы называли *изоморфизмом*. У изоморфных пространств одинаковы размерности, поэтому матрица обратимого линейного отображения будет *квадратной*.

Обратимые матрицы

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [\mathcal{A}]$, $B := [\mathcal{A}^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}. В соответствии с этим, матрица B такая, что $AB = BA = E$ для данной матрицы A называется *обратной* к матрице A и обозначается через A^{-1}.

Возникает два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Обратимые матрицы (2)

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Доказательство. С каждой $n \times n$-матрицей A связан линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства столбцов высоты n, определенный правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца $\mathbf{x}$. При этом матрица A будет матрицей оператора $\mathcal{A}$ (в стандартном базисе пространства столбцов. Матрица $A = [\mathcal{A}]$ обратима тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ обратим, его образ совпадает со всем пространством столбцов, а значит, ранг $\mathcal{A}$ равен n. Так как ранг линейного оператора совпадает с рангом его матрицы, заключаем, что ранг A равен n.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Тем самым, $\mathcal{A}$ – взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимый оператор. $\square$

Обратимые матрицы (3)

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1}.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Припишем к обратимой $n \times n$-матрице A слева единичную $n \times n$-матрицу и проделаем над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A к единичной матрице. Левая половина получившейся матрицы будет равна матрице A^{-1}.

Замечание: можно приписывать единичную матрицу сверху и проделывать элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$-матрицы $\dfrac{E}{A}$. Тогда A^{-1} возникнет в «числителе», когда «знаменатель» станет равным E.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Обоснование алгоритма

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n, ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент.
С помощью перестановки строк переставим его на место 1,1, а затем, домножив первую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 1,1 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе. В силу линейной независимости столбцов никакой столбец не может выражаться через предыдущие столбцы. Поэтому на шаге, когда обработаны первые j столбцов $(j < n)$, среди «поддиагональных» элементов $(j+1)$-го столбца найдется ненулевой, и процесс можно продолжать, пока не будут обработаны все n столбцов.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1}?

Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы A равносильны умножению A справа (слева) на некоторые матрицы.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Для каждого элементарного преобразования над столбцами (строками) A построим матрицу, умножение на которую справа (слева) дает тот же результат.

Идея построения такова. Элементарному преобразованию не важно, какие именно элементы составляют матрицу; оно манипулирует со столбцами (строками) независимо от их «содержимого».

Лемма о элементарных преобразованиях – построение

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E. Та матрица T, которая при этом получится, и будет искомой, так как $ET = TE = T$.

Перестановка i-го и j-го столбцов (i-й и j-й строк) матрицы A равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице переставить i-й и j-й столбцы (или, что равносильно, переставить i-ю и j-ю строки).

Добавление к i-му столбцу матрицы A ее j-го столбца равносильно умножению A справа на матрицу

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-му столбцу j-й столбец. Аналогично, добавление к i-й строке матрицы A ее j-й строки равносильно умножению A слева на матрицу, которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-й строке j-ю строку.

Умножение i-го столбца (i-й строки) матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$ равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице умножить i-й столбец (или, что равносильно, i-ю строку) на λ. $\square$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \dots, T_s$ – такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X. Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \ \text{ и } \ T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$. Итак, $B = A^{-1}$. $\square$

Замечание: аналогично обосновывается «вертикальный» вариант алгоритма, когда единичную матрицу приписывают сверху и проделывают элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$-матрицы $\dfrac{E}{A}$ до тех пор, пока «знаменатель» не станет равным E.