Тема V: Линейные операторы

3. Ранг матрицы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная матрица.

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

План доказательства

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь – по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы докажем, что элементарные преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам. Затем мы покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к такой матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам будет очевидным.

Напомним список элементарных преобразований:

I: Перестановка двух столбцов (строк).

II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).

III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

Мы доказывали, что элементарные преобразования обратимы. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Элементарные преобразования сохраняют ранги

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A. Тогда последовательность преобразований, которая приводит A' обратно к A, строго увеличивает ранг, противоречие!

Лемма 1

Элементарные преобразования над столбцами матрицы не увеличивают ранг матрицы по столбцам.

Доказательство. Ранг матрицы A по столбцам – это размерность $\dim S$ подпространства S, порождённого столбцами матрицы A. Элементарные преобразования над столбцами матрицы A приводят к матрице A', столбцы которой лежат в S, поэтому подпространство S', порождённое столбцами матрицы A', содержится в S. Отсюда $\dim S' \leqslant \dim S$. □

Элементарные преобразования сохраняют ранги (2)

Применяя лемму 1 к матрице A^T, получаем симметричный результат:

Лемма 2

Элементарные преобразования над строками матрицы не увеличивают ранг матрицы по строкам.

Лемма 3

Элементарные преобразования над столбцами матрицы сохраняют линейные зависимости между ее строками.

Доказательство. Пусть в матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы в пространстве строк. Докажем, что и в матрице A', полученной из A применением какой-то последовательности элементарных преобразований над столбцами, строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ остаются линейно зависимыми, причем с теми же коэффициентами!

Итак, пусть строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 j} & \dots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \dots & a_{i_s j} & \dots & a_{i_s n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы. Найдутся такие скаляры $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, не все равные нулю, что выполнена система равенств

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \dots + \gamma_s a_{i_s j} = 0 \text{ для каждого } j = 1, 2, \dots, n. \qquad (\star)$$

Если выполнить элементарное преобразование I-го рода (поменять местами j_1-й и j_2-й столбцы матрицы A), то в системе $(\star)$ просто поменяются местами j_1-е и j_2-е равенства, т.е. система не изменится. Поэтому в преобразованной матрице строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ остаются линейно зависимыми.

Если выполнить элементарное преобразование II-го рода (прибавить к j_1-му столбцу матрицы A ее j_2-й столбец), то все равенства системы

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j} = 0, \qquad (\star)$$

кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1 (a_{i_1 j_1} + a_{i_1 j_2}) + \cdots + \gamma_s (a_{i_s j_1} + a_{i_s j_2}) =$$
$$= (\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_1}) + (\gamma_1 a_{i_1 j_2} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_2}) = 0 + 0 = 0.$$

Аналогично, если выполнить элементарное преобразование III-го рода (умножить j_1-й столбец матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$), то все равенства системы $(\star)$, кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1 (\lambda a_{i_1 j_1}) + \cdots + \gamma_s (\lambda a_{i_s j_1}) = \lambda (\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_1}) = \lambda \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s. Тогда в A' есть s линейно независимых строк, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_s$. По лемме 3 строки матрицы A с теми же номерами $i_1, \dots, i_s$ обязаны быть линейно независимыми, откуда ранг матрицы A по строкам не меньше s. Тот же аргумент выводит симметричный результат из леммы 4. □

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Если все элементы матрицы A равны 0, то понятно, что ранги A и по столбцам, и по строкам равны 0. Если в A есть ненулевой элемент, то с помощью преобразований I-го рода переставим этот элемент на место 1,1, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов «обнулим» все остальные элементы первой строки и первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Завершение доказательства теоремы о ранге (2)

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что ранги такой матрицы и по столбцам, и по строкам равны 1. Если $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i, j \geq 2$, то преобразованиями I-го рода переставим элемент b_{ij} на место 2,2, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов «обнулим» все остальные элементы второй строки и второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. У матрицы такого вида ранги и по столбцам, и по строкам очевидно равны r: первые r столбцов линейно независимы, а остальные нулевые, и то же верно для строк. Теорема о ранге доказана. □

Сформулируем еще раз результат, который мы доказали:

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Ранг линейного оператора и ранг его матрицы

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор конечномерного векторного пространства V в векторное пространство W. Напомним, что *рангом* $\mathcal{A}$ мы называли размерность подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Если и пространство W конечномерно, с оператором $\mathcal{A}$ связывается его матрица $[\mathcal{A}]$, столбцы которой – это координаты образов элементов базиса пространства V в базисе пространства W. Образы элементов базиса пространства V порождают $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, поэтому размерность образа равна размерности подпространства, порождённого набором столбцов матрицы $[\mathcal{A}]$, т.е. рангу матрицы $[\mathcal{A}]$.

Итак, ранг линейного оператора равен рангу его матрицы!

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равен 2.

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, поэтому их число равно рангу матрицы.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-0&0\end{pmatrix}$$

Уже отсюда видно, что ранг равен 2.

Теорема Кронекера–Капелли

Покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений. Рассмотрим произвольную систему k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{k1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \qquad (\star)$$

Систему $(\star)$ можно компактно записать в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, если ввести обозначения: $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ – *основная матрица* системы,

$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ – столбцы неизвестных и свободных членов.

Матрица размера $k \times (n+1)$, получаемая приписыванием к основной матрице системы столбца свободных членов называется *расширенной матрицей* системы $(\star)$.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы $(\star)$ через B. Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порождённое векторами-столбцами матрицы A, условимся обозначать через V_A, а пространство, порождённое векторами-столбцами матрицы B, – через V_B.
Заметим, что система $(\star)$ может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Следовательно, система $(\star)$ совместна в том и только в том случае, когда вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A, т.е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Пусть система $(\star)$ совместна. Тогда вектор $\mathbf{b}$ принадлежит пространству V_A. Это значит, что вектора-столбцы матрицы B принадлежат V_A, и поэтому $V_B \subseteq V_A$. Но столбцы матрицы A являются столбцами матрицы B. Отсюда следует, что $V_A \subseteq V_B$. Следовательно, $V_A = V_B$. Но тогда и $\dim V_A = \dim V_B$, т.е. ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B. В силу теоремы о ранге матрицы ранги матриц A и B равны.

Теорема Кронекера–Капелли (3)

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A, т.е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B. Размерность пространства V_B равна r. Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B. Вектор **b** принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, а значит, и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A. Следовательно, система $(\star)$ совместна. $\square$

Теорема Кронекера–Капелли называется:

- теоремой Кронекера–Капелли в Австрии, Германии, Польше и России;
- теоремой Руше–Капелли в Италии и англоязычных странах;
- теоремой Руше–Фонтене во Франции;
- теоремой Руше–Фробениуса в Испании и странах Латинской Америки;
- теоремой Фробениуса в Чехии и Словакии.

Она была впервые опубликована в 1867 г. английским математиком Чарльзом Доджсоном, более известным под псевдонимом Льюис Кэрролл как автор «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье».

Метод Гаусса

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \qquad (L_1)\\ -3x - y + 2z &= -11 \qquad (L_2)\\ -2x + y + 2z &= -3 \qquad (L_3) \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3 + L_1 \to L_3$. Продолжаем:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Здесь $(**)$ – это $L_3 - 4L_2 \to L_3$.

Видим, что ранги основной и расширенной матриц совпадают, значит, система совместна. Далее, видно, что $z = -1$. Зная z, находим $y = 3$. Наконец, зная z и y, находим $x = 2$.