

# Тема V. Линейные операторы

## 2. Ядро и образ линейного оператора

М.В.Волков

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

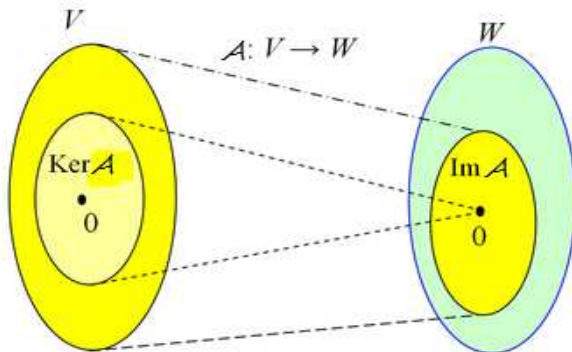
2024/2025 учебный год

## Определение

Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над одним и тем же полем  $F$ ,  
 $A: V \rightarrow W$  – линейный оператор.

**Образ**  $A$  – это множество  $\text{Im } A$  всех векторов  $y \in W$  таких, что  $A(x) = y$   
для некоторого  $x \in V$ .

**Ядро**  $A$  – это множество  $\text{Ker } A$  всех векторов  $x \in V$  таких, что  $A(x) = 0$ .



## Замечание об образе и ядре

Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над одним и тем же полем  $F$ ,  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$  – линейный оператор. Тогда  $\text{Im } \mathcal{A}$  – подпространство в  $W$ , а  $\text{Ker } \mathcal{A}$  – подпространство в  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $y_1, y_2 \in \text{Im } \mathcal{A}$ , а  $t \in F$ . Тогда существуют вектора  $x_1, x_2 \in V$  такие, что  $\mathcal{A}(x_1) = y_1$  и  $\mathcal{A}(x_2) = y_2$ . Следовательно,

$$y_1 + y_2 = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) = \mathcal{A}(x_1 + x_2) \quad \text{и} \quad ty_1 = t\mathcal{A}(x_1) = \mathcal{A}(tx_1).$$

Это означает, что  $y_1 + y_2, ty_1 \in \text{Im } \mathcal{A}$ , и потому  $\text{Im } \mathcal{A}$  – подпространство.

Пусть  $x_1, x_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$ , а  $t \in F$ . Тогда

$$\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(tx_1) = t\mathcal{A}(x_1) = t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Отсюда  $x_1 + x_2, tx_1 \in \text{Ker } \mathcal{A}$ , и потому  $\text{Ker } \mathcal{A}$  – подпространство.  $\square$

## Замечание об образе конечномерного пространства

Если  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$  – линейный оператор, причем  $V$  – конечномерное пространство, то и подпространство  $\text{Im } \mathcal{A}$  конечномерно.

*Доказательство.* Если  $\dim V = 0$ , доказывать нечего. Пусть  $\dim V = n > 0$  и  $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  – какой-то базис пространства  $V$ . Покажем, что подпространство  $\text{Im } \mathcal{A}$  порождается векторами  $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1), \mathcal{A}(\mathbf{p}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$ . Возьмем любой вектор  $\mathbf{y} \in \text{Im } \mathcal{A}$ . По определению существует  $\mathbf{x} \in V$  такой, что  $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Если  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – координаты  $\mathbf{x}$  в базисе  $P$ , то  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \dots + x_n\mathbf{p}_n$ , откуда

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \dots + x_n\mathbf{p}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \dots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{p}_n).$$

Итак, подпространство  $\text{Im } \mathcal{A}$  имеет конечную систему образующих, а значит, оно конечномерно. □

## Определение

Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$  – линейный оператор, причем  $V$  конечномерно. Размерность образа линейного оператора  $\mathcal{A}$  называется *рангом*  $\mathcal{A}$  и обозначается через  $r(\mathcal{A})$ , а размерность ядра оператора  $\mathcal{A}$  называется *дефектом*  $\mathcal{A}$  и обозначается через  $d(\mathcal{A})$ .

## Теорема о сумме ранга и дефекта

Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$  – линейный оператор, причем  $V$  конечномерно. Сумма ранга и дефекта оператора  $\mathcal{A}$  равна размерности пространства  $V$ .

*Доказательство.* Пусть дефект оператора  $\mathcal{A}$  равен  $d$ , а его ранг равен  $r$ . Выберем базис ядра  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d$  и базис образа  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ . Для каждого  $\mathbf{c}_i$  найдётся вектор  $\mathbf{b}_i \in V$  такой, что  $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$ . Докажем, что  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$  (\*) – базис пространства  $V$ . Сначала проверим, что (\*) – система образующих. Для произвольного вектора  $\mathbf{x} \in V$ , его образ  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  выражается через базис образа:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t_1 \mathbf{c}_1 + t_2 \mathbf{c}_2 + \dots + t_r \mathbf{c}_r.$$

Положим  $\mathbf{x}' := t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + \dots + t_r \mathbf{b}_r$ . Тогда  $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}')$ , и потому  $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{0}$ . Значит,  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \text{Ker } \mathcal{A}$  выражается через базис ядра:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + \dots + s_d \mathbf{a}_d.$$

Поэтому

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{x}' = s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + \dots + s_d \mathbf{a}_d + t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + \dots + t_r \mathbf{b}_r.$$

## Теорема о сумме ранга и дефекта (2)

Теперь докажем линейную независимость системы (\*). Пусть

$$s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + s_d \mathbf{a}_d + t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + t_r \mathbf{b}_r = \mathbf{0}. \quad (\Delta)$$

Применим оператор  $\mathcal{A}$  к обеим частям равенства  $(\Delta)$ . Поскольку  $\mathcal{A}(\mathbf{a}_j) = \mathbf{0}$ , а  $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$ , получаем:

$$\mathcal{A}(s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + s_d \mathbf{a}_d + t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + t_r \mathbf{b}_r) = t_1 \mathbf{c}_1 + t_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + t_r \mathbf{c}_r = \mathbf{0}.$$

Вектора  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$  линейно независимы, поэтому  $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$ .  
От равенства  $(\Delta)$  остается

$$s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + s_d \mathbf{a}_d = \mathbf{0},$$

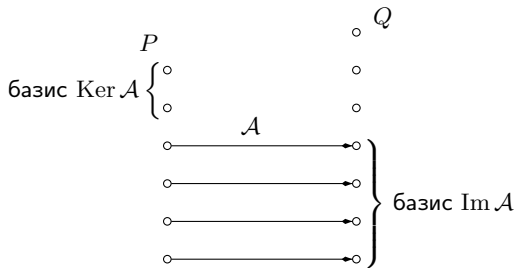
но  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d$  линейно независимы, поэтому  $s_1 = s_2 = \cdots = s_d = 0$ .

Итак, система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$  – базис пространства  $V$ , откуда  $\dim V = r + d$ . □

## Простейший вид матрицы оператора

Мы упоминали то, что матрица линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$ , где  $V$  и  $W$  конечномерны, зависит от выбора базисов в пространствах  $V$  и  $W$ . Доказательство теоремы о сумме ранга и дефекта показывает, что базисы в  $V$  и  $W$  можно выбрать так, чтобы матрица  $\mathcal{A}$  стала очень простой.

Действительно, пусть  $\dim V = n$ ,  $\dim W = k$ ,  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = d$ ,  $\dim \text{Im } \mathcal{A} = r$ . Возьмем какой-нибудь базис  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$  в  $\text{Im } \mathcal{A}$  и дополним его какими-то векторами  $\mathbf{c}_{r+1}, \dots, \mathbf{c}_k$  до базиса  $Q$  пространства  $W$ .



Теперь, следуя доказательству теоремы о сумме ранга и дефекта, для каждого из векторов  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$  возьмём вектор  $\mathbf{b}_i \in V$  такой, что  $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$ , и добавим к системе  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$  какие-то  $d$  векторов, составляющих базис  $\text{Ker } \mathcal{A}$ . Получим базис  $P$  пространства  $V$ .

Как устроена матрица  $A_{P,Q}$ ? Напомним: столбцы матрицы  $A_{P,Q}$  – это координаты образов векторов из  $P$  в базисе  $Q$ .

По построению,  $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$  для  $i = 1, 2, \dots, r$ , т.е. образ вектора  $\mathbf{b}_i$  имеет координаты  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где 1 стоит на  $i$ -м месте. Остальные вектора из базиса  $P$  лежат в  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и их образы имеют нулевые координаты. Поэтому матрица  $A_{P,Q}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$k \times n$

где на местах  $1,1; 2,2; \dots; r,r$  стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Заметим еще, что число единиц зависит только от самого оператора  $\mathcal{A}$  (оно равно рангу оператора) и не зависит от выбора базиса в  $\text{Im } \mathcal{A}$  и способа его достроения до базиса  $W$ . Аналогично, не важно, каким именно базисом  $\text{Ker } \mathcal{A}$  прообраз базиса  $\text{Im } \mathcal{A}$  достраивается до базиса  $V$ .



Наша следующая цель – алгоритм, который позволяет одновременно найти базисы образа и ядра линейного оператора. Этот алгоритм важен и сам по себе, и как «подпрограмма» более сложных алгоритмов. Как и большинство алгоритмов линейной алгебры, он основан на *элементарных преобразованиях* над строками и столбцами матрицы.

Вот список преобразований, которые мы будем называть элементарными:

- I: Перестановка двух столбцов (строк).
- II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).
- III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

На практике элементарные преобразования II-го и III-го родов обычно комбинируют, чтобы прибавить к столбцу (строке) произведение другого столбца (другой строки) на ненулевой скаляр:

$$\begin{aligned} & (\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) \xrightarrow{\text{III: } \lambda \times j} (\dots \mathbf{a}_i \dots \lambda \mathbf{a}_j \dots) \xrightarrow{\text{II: } i+j} \\ & (\dots \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_j \dots \lambda \mathbf{a}_j \dots) \xrightarrow{\text{III: } \lambda^{-1} \times j} (\dots \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_j \dots) \end{aligned}$$

## Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы  $A$  выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице  $A$ .

*Доказательство.* Понятно, что достаточно доказать, что каждое отдельное элементарное преобразование обратимо. Каждое преобразование I-го рода обратно само себе: если поменять местами  $i$ -й и  $j$ -й столбцы ( $i$ -ю и  $j$ -ю строки) матрицы  $A$ , а в получившейся матрице снова поменять местами  $i$ -й и  $j$ -й столбцы ( $i$ -ю и  $j$ -ю строки), то вернемся к исходной матрице  $A$ .

Обратным к преобразованию II-го рода, которое прибавляет к  $i$ -му столбцу  $j$ -й столбец (к  $i$ -й строке  $j$ -ю строку), будет преобразование, которое вычитает из  $i$ -го столбца  $j$ -й столбец (из  $i$ -й строки  $j$ -ю строку). Выше показано, как скомбинировать такое вычитание из преобразований II-го и III-го родов.

Наконец, обратным к преобразованию III-го рода, которое умножает  $i$ -й столбец ( $i$ -ю строку) на скаляр  $\lambda \neq 0$ , будет преобразование, которое умножает  $i$ -й столбец ( $i$ -ю строку) на скаляр  $\lambda^{-1}$ . □

## Замечание

Если строки матрицы  $A$  линейно независимы, то и строки матрицы  $A'$ , полученной из матрицы  $A$  произвольной последовательностью элементарных преобразований над строками, линейно независимы.

*Доказательство.* Пусть  $S$  – линейная оболочка строк  $s_1, \dots, s_k$  матрицы  $A$ , а  $S'$  – линейная оболочка строк  $s'_1, \dots, s'_k$  матрицы  $A'$ . Сложение и перестановка строк, а также умножение строки на скаляр не выводят за пределы линейной оболочки, поэтому  $S' \subseteq S$ . Поскольку элементарные преобразования обратимы, верно и включение  $S \subseteq S'$ , откуда  $S = S'$ . Строки  $s_1, \dots, s_k$  линейно независимы, поэтому  $s_1, \dots, s_k$  – базис в  $S$ , откуда  $\dim S = k$ . Строки  $s'_1, \dots, s'_k$  – система образующих в  $S' = S$ , а в  $k$ -мерном пространстве любая система из  $k$  образующих – базис. Поэтому строки  $s'_1, \dots, s'_k$  линейно независимы. □

Если поменять ролями строки и столбцы матрицы  $A = (a_{ij})_{k \times n}$ , получится **транспонированная** матрица  $A^T = (a_{ji})_{n \times k}$ . Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

## Алгоритм Ядро-Образ

Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над полем  $F$ , причем  $\dim V = n > 0$ ,  $\dim W = k > 0$ , и  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$  – линейный оператор, заданный матрицей  $A$  в некоторых базисах  $P$  и  $Q$  пространств  $V$  и  $W$ . Припишем к  $n \times k$ -матрице  $A^T$  слева единичную  $n \times n$ -матрицу  $E$  и сделаем над **строками**  $n \times (n+k)$ -матрицы  $E|A^T$  последовательность элементарных преобразований, которая приведет  $A^T$  к ступенчатой матрице  $C$ . Пусть  $B$  – матрица, получившаяся на месте матрицы  $E$ . Тогда:

- (i) ненулевые строки матрицы  $C$  – координаты базисных векторов пространства  $\text{Im } \mathcal{A}$  в базисе  $Q$ ;
- (ii) строки матрицы  $B$  с нулевыми продолжениями в матрице  $C$  – координаты базисных векторов пространства  $\text{Ker } \mathcal{A}$  в базисе  $P$ .

*Пример.* Найдем базисы образа и ядра оператора  $\mathcal{A}$ , имеющего

в некоторых базисах матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Итак, строки  $(1, 2, 3)$  и  $(0, 1, 2)$  – координаты базисных векторов образа оператора  $\mathcal{A}$ , а строки  $(1, -2, 1, 0)$  и  $(2, -3, 0, 1)$  – координаты базисных векторов ядра этого оператора.

Строки матрицы  $A^T$  – это столбцы матрицы  $A$ , т.е. координаты (в базисе  $Q$  пространства  $W$ ) образов векторов  $\mathbf{p}_i$  из базиса  $P$  пространства  $V$ .

Строки единичной матрицы – координаты **самих векторов**  $\mathbf{p}_i$  в базисе  $P$ .

Итак, в  $n \times (n + k)$ -матрице  $E|A^T$  часть каждой строки после черты – это результат применения оператора  $\mathcal{A}$  к части той же строки до черты.

Линейный оператор сохраняет сложение и умножение на скаляры.

Поэтому элементарные преобразования сохраняют указанное свойство, и в матрице  $B|C$ , к которой приводит алгоритм, часть каждой строки после черты остается образом части той же строки до черты:

**(координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $P$  | координаты вектора  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  в базисе  $Q$ )**

В частности, ненулевые строки ступенчатой матрицы  $C$  – это линейно независимые вектора из  $\text{Im } \mathcal{A}$ . Если  $r'$  – число таких строк, то  $r' \leq r(\mathcal{A})$ .

Строки матрицы  $B$  линейно независимы, так как получены элементарными преобразованиями из строк единичной матрицы  $E$ .

Строки  $B$  с нулевыми продолжениями в матрице  $C$  – это линейно независимые вектора из  $\text{Ker } \mathcal{A}$ . Если  $d'$  – число таких строк, то  $d' \leq d(\mathcal{A})$ .

Имеем

$$n = r' + d' \leq r(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}) = n \quad (\text{по теореме о сумме ранга и дефекта}).$$

Поэтому  $r' = r(\mathcal{A})$  и  $d' = d(\mathcal{A})$ .