

Тема IV: Векторные пространства

3. Подпространства

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Определение

Непустое подмножество M векторного пространства V над полем F называется *подпространством* пространства V , если выполняются следующие условия:

- 1) если $x, y \in M$, то $x + y \in M$ (*замкнутость подпространства относительно сложения векторов*);
- 2) если $x \in M$, а $t \in F$, то $tx \in M$ (*замкнутость подпространства относительно умножения вектора на скаляр*).

Пример 1. Пусть V – любое векторное пространство. Очевидно, что все пространство V и множество $\{0\}$ являются подпространствами в V .

Множество всех подпространств векторного пространства с отношением включения является частично упорядоченным множеством (чумом). Подпространство V является наибольшим элементом этого чума, а подпространство $\{0\}$ – наименьшим. Первое из этих двух утверждений очевидно, а второе вытекает из следующего замечания.

Замечание о нулевом векторе и подпространствах

Нулевой вектор содержится в любом подпространстве M пространства V .

Доказательство. Если x – произвольный вектор из M , то, по условию 2) из определения подпространства, $0 = 0 \cdot x \in M$. \square

Пример 2. Пусть V – обычное трёхмерное пространство, а M – множество векторов из V , коллинеарных некоторой плоскости π . Ясно, что сумма двух векторов, коллинеарных π , и произведение вектора, коллинеарного π , на любое число коллинеарны π . Значит, M – подпространство в V . Аналогично доказывается, что подпространством в V является множество векторов, коллинеарных некоторой прямой.

Пусть V – произвольное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Обозначим через M множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, т.е.

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k \text{ и } \mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$$

для некоторых скаляров s_1, s_2, \dots, s_k и t_1, t_2, \dots, t_k . Пусть, далее, t – произвольный скаляр. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k) + (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k) = \\ &= (s_1 + t_1)\mathbf{a}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (s_k + t_k)\mathbf{a}_k \quad \text{и} \\ t\mathbf{x} &= t(s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k) = (ts_1)\mathbf{a}_1 + (ts_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (ts_k)\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

Мы видим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} \in M$, т.е. M – подпространство пространства V . Оно называется *подпространством, порождённым векторами* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, или *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, и обозначается через $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$.

Замечание о подпространстве, порождённом набором векторов

Пусть V – векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Тогда $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ – наименьшее подпространство пространства V , содержащее вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. Пусть M – подпространство пространства V , содержащее вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. По определению подпространства любая линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ лежит в M . Следовательно, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle \subseteq M$. □

Подпространство векторного пространства само является векторным пространством. Это позволяет говорить о размерности и базисе подпространства.

Предложение о размерности подпространства

Пусть M – подпространство векторного пространства V . Тогда $\dim M \leq \dim V$, причем $\dim M = \dim V$ тогда и только тогда, когда $M = V$.

Доказательство. Если M или V – нулевое пространство, то оба утверждения предложения выполняются тривиальным образом. Будем поэтому считать, что M и V – ненулевые пространства. Пусть $\dim M = k$, $\dim V = n$. Неравенство $k \leq n$ следует из того, что базис M – это линейно независимая система в V , а любую линейно независимую систему векторов из V можно дополнить до базиса V по теореме о продолжении. При этом для дополнения нужно $n - k$ векторов. Поэтому если $n = k$, то базис M уже является базисом V , т.е. $M = V$. Обратное утверждение очевидно. □

Алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порождённого данным набором векторов

Укажем способ нахождения базиса и размерности подпространства, порождённого данным набором векторов.

Алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порождённого данным набором векторов

Запишем координаты данных векторов в некотором фиксированном базисе пространства в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности.

Обоснование этого алгоритма будет дано в следующем разделе.

К подпространствам векторного пространства можно применять все теоретико-множественные операции. Но важной для линейной алгебры является только одна из них – операция пересечения подпространств. Как и пересечение любых множеств, пересечение подпространств обозначается символом \cap . Введем еще одну важную операцию над подпространствами.

Определение

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. *Сумма подпространств* M_1 и M_2 – это множество $M_1 + M_2$ всех сумм векторов из M_1 с векторами из M_2 :

$$M_1 + M_2 := \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_1 \in M_1, \mathbf{x}_2 \in M_2\}.$$

Замечание о сумме и пересечении подпространств

Если M_1 и M_2 – подпространства пространства V , то $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ также являются подпространствами в V .

Доказательство. В силу замечания о нулевом векторе и подпространствах, каждое из подпространств M_1 и M_2 содержит нулевой вектор. Следовательно, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in M_1 + M_2$ и $\mathbf{0} \in M_1 \cap M_2$. В частности, множества $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ – непустые.

Пусть $x, y \in M_1 + M_2$ и t – скаляр. Тогда $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$ для некоторых $x_1, y_1 \in M_1$ и $x_2, y_2 \in M_2$. Учитывая, что M_1 и M_2 – подпространства, получаем, что

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in M_1 + M_2, \\tx &= t(x_1 + x_2) = tx_1 + tx_2 \in M_1 + M_2.\end{aligned}$$

Итак, $M_1 + M_2$ – подпространство в V . Далее, пусть $x, y \in M_1 \cap M_2$ и t – скаляр. Тогда $x, y \in M_1$ и $x, y \in M_2$. Раз M_1 и M_2 – подпространства, имеем $x + y \in M_1$, $x + y \in M_2$, $tx \in M_1$ и $tx \in M_2$. Следовательно, $x + y \in M_1 \cap M_2$ и $tx \in M_1 \cap M_2$, т.е. $M_1 \cap M_2$ – подпространство в V . \square

Замечание о сумме подпространств

Если M_1 и M_2 – подпространства пространства V , то $M_1 + M_2$ – наименьшее подпространство в V , содержащее M_1 и M_2 .

Доказательство. Если $x \in M_1$, то $x \in M_1 + M_2$, поскольку $x = x + \mathbf{0}$ и $\mathbf{0} \in M_2$. Следовательно, $M_1 \subseteq M_1 + M_2$. Аналогично, $M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Пусть теперь подпространство M содержит и M_1 , и M_2 , и $x \in M_1 + M_2$. Тогда $x = x_1 + x_2$ для некоторых $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$. Следовательно, $x_1 \in M$ и $x_2 \in M$, откуда $x = x_1 + x_2 \in M$. Итак, $M_1 + M_2 \subseteq M$. \square

Операцию пересечения множеств можно применять к любому (в том числе бесконечному) числу множеств. Поэтому можно говорить о пересечении любого (в том числе бесконечного) набора подпространств данного векторного пространства. Операцию суммы подпространств также можно применять к любому набору подпространств. Если M_1, M_2, \dots, M_k – подпространства векторного пространства V и $k > 2$, то по индукции положим

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k := (M_1 + M_2 + \dots + M_{k-1}) + M_k.$$

При этом скобки в левой части равенства можно не ставить, поскольку операция сложения двух подпространств, очевидно, ассоциативна.

Придумайте, как определить сумму бесконечного набора подпространств.

Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. Тогда размерность суммы подпространств M_1 и M_2 равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.

Доказательство. Из предложения о размерности подпространства $\dim(M_1 \cap M_2) \leq \dim M_1$ и $\dim(M_1 \cap M_2) \leq \dim M_2$. Положим

$$\dim(M_1 \cap M_2) = k, \quad \dim M_1 = k + \ell \quad \text{и} \quad \dim M_2 = k + m.$$

Если $M_1 = \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\dim M_1 = \dim(M_1 \cap M_2) = 0$, $M_1 + M_2 = M_2$ и потому

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_2 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Аналогично разбирается случай, когда $M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Итак, далее можно считать, что пространства M_1 и M_2 – ненулевые, и, в частности, каждое из них имеет базис. Будем также считать, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ (в противном случае следует во всех дальнейших рассуждениях заменить базис пространства $M_1 \cap M_2$ на пустой набор векторов; рассуждения при этом только упростятся). Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – базис пространства $M_1 \cap M_2$.

По теореме о продолжении $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ можно дополнить как до базиса M_1 , так и до базиса M_2 . Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ – базис M_1 , а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ – базис M_2 . Докажем, что набор векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m \quad (1)$$

является базисом пространства $M_1 + M_2$. Этого достаточно для доказательства теоремы, так как число векторов в этом наборе равно

$$k + \ell + m = (k + \ell) + (k + m) - k = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Ясно, что \mathbf{x}_1 – линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$, а \mathbf{x}_2 – линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$. Отсюда вектор $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ есть линейная комбинация векторов (1). Таким образом, (1) – система образующих пространства $M_1 + M_2$. Остается доказать, что эта система векторов линейно независима. Предположим, что

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k + s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell \mathbf{b}_\ell + r_1 \mathbf{c}_1 + r_2 \mathbf{c}_2 + \dots + r_m \mathbf{c}_m = \mathbf{0} \quad (2)$$

для некоторых скаляров $t_1, t_2, \dots, t_k, s_1, s_2, \dots, s_\ell, r_1, r_2, \dots, r_m$. Требуется доказать, что все эти скаляры равны 0.

Положим $\mathbf{y} = s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell \mathbf{b}_\ell$. Очевидно, что $\mathbf{y} \in M_1$. С другой стороны, из (2) вытекает, что

$$\mathbf{y} = -t_1 \mathbf{a}_1 - t_2 \mathbf{a}_2 - \dots - t_k \mathbf{a}_k - r_1 \mathbf{c}_1 - r_2 \mathbf{c}_2 - \dots - r_m \mathbf{c}_m \in M_2.$$

Следовательно, $\mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$. Тогда \mathbf{y} есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Таким образом, существуют скаляры q_1, q_2, \dots, q_k такие, что $\mathbf{y} = s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell \mathbf{b}_\ell = q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + \dots + q_k \mathbf{a}_k$. Следовательно,

$$q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + \dots + q_k \mathbf{a}_k - s_1 \mathbf{b}_1 - s_2 \mathbf{b}_2 - \dots - s_\ell \mathbf{b}_\ell = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Поскольку вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ образуют базис пространства M_1 , они линейно независимы. Поэтому линейная комбинация в левой части (3) тривиальна. В частности, $s_1 = s_2 = \dots = s_\ell = 0$. Следовательно, равенство (2) принимает вид

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k + r_1 \mathbf{c}_1 + r_2 \mathbf{c}_2 + \dots + r_m \mathbf{c}_m = \mathbf{0}.$$

Учитывая, что вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ образуют базис пространства M_2 (и, в частности, линейно независимы), мы получаем, что $t_1 = t_2 = \dots = t_k = r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0$. Итак, все коэффициенты в левой части равенства (2) равны 0, что и требовалось доказать. \square

Учитывая алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порождённого данным набором векторов, получаем

Алгоритм нахождения базиса и размерности суммы подпространств

Пусть даны базисы подпространств M_1 и M_2 . Запишем в матрицу по строкам координаты векторов, входящих в эти базисы, в некотором фиксированном базисе пространства и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом суммы подпространств M_1 и M_2 , а число этих строк равно ее размерности.

Отметим, что, найдя размерность суммы подпространств M_1 и M_2 , мы сможем найти и размерность их пересечения, так как, в силу теоремы о размерности суммы и пересечения,

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 + M_2).$$

Определение

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. Говорят, что сумма подпространств M_1 и M_2 является их *прямой суммой*, если $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Прямая сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 \oplus M_2$.

Из доказательства теоремы о размерности суммы и пересечения подпространств вытекает

Замечание о базисе прямой суммы подпространств

Если $V = M_1 \oplus M_2$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ – базис M_1 , а $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ – базис M_2 , то $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ – базис пространства V . \square

Теорема о прямой сумме подпространств

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $M_1 + M_2$ является прямой суммой подпространств M_1 и M_2 ;
- 2) $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$;
- 3) любой вектор из $M_1 + M_2$ единственным образом представим в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2 ;
- 4) нулевой вектор пространства V единственным образом представим в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2 .

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно вытекает из теоремы о размерности суммы и пересечения и того факта, что размерность нулевого пространства равна 0. Импликация 3) \implies 4) очевидна. Поэтому достаточно доказать импликации 1) \implies 3) и 4) \implies 1).

1) \implies 3). Пусть $x \in M_1 + M_2$. По определению суммы подпространств $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$. Остается доказать, что такое представление вектора x единственно. Предположим, что $x = y_1 + y_2$, где $y_1 \in M_1$ и $y_2 \in M_2$. Из равенств $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ имеем $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. Ясно, что $x_1 - y_1 \in M_1$, а $y_2 - x_2 \in M_2$. Следовательно, $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in M_1 \cap M_2$. Но $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Поэтому $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$, откуда $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.

4) \implies 1). Предположим, что $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$, т. е. существует ненулевой вектор $x \in M_1 \cap M_2$. Тогда вектор 0 может быть двумя различными способами представлен в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2 : $0 = x + (-x)$ и $0 = 0 + 0$. Мы получили противоречие с условием 4). \square

При решении задач полезно иметь в виду следующее

Замечание о прямой сумме подпространств

$V = M_1 \oplus M_2$ тогда и только тогда, когда

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim V.$$

Необходимость сразу следует из теоремы о прямой сумме подпространств.
Достаточность следует из теоремы о размерности сумм и пересечения. \square

Определение

Пусть V – векторное пространство, $x_0 \in V$, а M – подпространство в V . Множество всех векторов вида $x_0 + u$, где $u \in M$, называется *линейным многообразием* в V и обозначается через $x_0 + M$. Вектор x_0 называется *начальным вектором* многообразия $x_0 + M$, а подпространство M – *направляющим подпространством* этого многообразия. Размерность подпространства M называется размерностью многообразия $x_0 + M$.

Пример 1. Если $x_0 = \mathbf{0}$, то $x_0 + M = M$. Таким образом, всякое подпространство пространства V является линейным многообразием в V .

Пример 2. Если $M = \{\mathbf{0}\}$, то $x_0 + M = \{x_0\}$. Таким образом, всякий вектор из V является линейным многообразием в V (размерности 0).

Пример 3. Обычные прямые и плоскости трехмерного пространства – линейные многообразия.

С помощью понятия линейного многообразия геометрия обычных прямых и плоскостей поднимается в пространства с любым числом измерений.