Тема IV: Векторные пространства

2. Базис векторного пространства

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Определение

Система векторов Σ векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из V линейно выражается через какие-то вектора из системы Σ.

Лемма о прополке

Если Σ – система образующих векторного пространства V и вектор $\mathbf{a} \in \Sigma$ линейно выражается через другие вектора системы Σ, то и система $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$ является системой образующих пространства V.

Доказательство. Нужно показать, что любой вектор $\mathbf{x} \in V$ линейно выражается через какие-то вектора из $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$. По условию леммы

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k \qquad (\star)$$

для некоторых $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \Sigma$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k \in F$. Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ нет $\mathbf{a}$, доказывать нечего. Если же $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}$ для некоторого i, подставим в $(\star)$ вместо $\mathbf{a}$ его выражение через другие вектора системы Σ и получим выражение для $\mathbf{x}$ через вектора из $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$. $\square$

Определение

Базисом векторного пространства называется линейно независимая система образующих.

В случаях плоскости и обычного трёхмерного пространства введённое сейчас понятие базиса совпадает с теми понятиями базиса, которые были введены в этих случаях ранее.

Замечание о базисе плоскости и трёхмерного пространства

а) *Базисом плоскости является произвольная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости.*

б) *Базисом обычного трёхмерного пространства является произвольная тройка некомпланарных векторов этого пространства.*

Доказательство. а) Пара неколлинеарных векторов плоскости линейно независима в силу замечания о линейной зависимости на плоскости (см. предыдущую лекцию) и является системой образующих плоскости в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости.

б) Это утверждение доказывается вполне аналогично предыдущему. $\square$

Пример базиса в пространстве F^n

Приведем пример базиса в пространстве строк F^n. Мы вводили вектора

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

3-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства F^n.

Доказательство. В силу 1-го и 2-го замечаний о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ эти вектора линейно независимы и являются системой образующих пространства F^n. □

Определение

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называется *стандартным базисом* пространства F^n.

Как обсуждалось, в пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы. Естественно назвать *бесконечную* последовательность векторов линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Тогда система $\{x^n\}_{n\geq 0}$ линейно независима.
По определению многочлена $\{x^n\}_{n\geq 0}$ является системой образующих для пространства $F[x]$. Итак, $\{x^n\}_{n\geq 0}$ – базис пространства $F[x]$.

В пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ тоже есть бесконечные линейно независимые системы, например, $\{\sin nx, \cos nx\}_{n>0}$. На самом деле, в этом пространстве есть бесконечный базис, но явно выписать его трудно.

В пространстве $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k \times n$ базис образуют всевозможные матричные единицы E_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant k$ и $1 \leqslant j \leqslant n$.

В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, базис составляют числа 1 и i.

У нулевого пространства базиса нет, поскольку в этом пространстве нет линейно независимых систем.

Существование конечного базиса

Что можно сказать о существовании базиса в общем случае? В этом курсе мы ограничимся следующим результатом.

Теорема о существовании конечного базиса

Если в ненулевом векторном пространстве V есть конечная система образующих, то в V есть и конечный базис.

Доказательство. Пусть Σ – конечная система образующих пространства V. Поскольку V – ненулевое пространство, в Σ есть ненулевые вектора. Выкинем из Σ нулевой вектор, если он там был; получившаяся система ненулевых векторов $\Sigma_1 := \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$ тоже будет системой образующих. Если система Σ_1 линейно независима, то она является базисом и всё доказано. Если система Σ_1 линейно зависима, то по лемме о правом крайнем в ней найдется вектор $\mathbf{a}_1$, который линейно выражается через какие-то вектора из $\Sigma_2 := \Sigma_1 \setminus \{\mathbf{a}_1\}$. По лемме о прополке Σ_2 – система образующих. Понятно, что тот же самый аргумент применим к Σ_2: если Σ_2 линейно независима, то всё доказано, а если линейно зависима, то из Σ_2 можно удалить вектор так, чтобы осталась система образующих.
Этот процесс остановится, лишь достигнув линейно независимой системы образующих, т.е. базиса. Число векторов в текущей системе уменьшается на каждом шаге процесса, а потому остановка неизбежна. $\square$

Комментарии

1. Очевидно, что верно и обратное к теореме утверждение.

2. Доказательство довольно поучительно, и мы будем использовать похожие механизмы и в некоторых других доказательствах.

3. Альтернативное оформление доказательства может быть таким: возьмём в качестве Σ систему образующих пространства V с наименьшим возможным числом векторов. Тогда в Σ нет нулевого вектора и нет вектора, линейно выражающегося через другие вектора системы Σ (иначе его можно было бы выкинуть по лемме о прополке и придти к противоречию с минимальностью Σ). По лемме о правом крайнем система Σ линейно независима, т.е. является базисом.

4. В общем случае можно доказать, что в *любом* ненулевом векторном пространстве есть базис, но доказательство использует один нетривиальный факт из теории множеств (лемма Цорна).

Теорема о равномощности базисов

Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно n векторов.

Доказательство. Пусть $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ – базис пространства, а $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$ – другой его базис. Чтобы доказать, что $n = k$, в силу симметрии достаточно проверить, что $k \leq n$. Пусть $k > n$. Рассмотрим систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n. \tag{1}$$

Это линейно зависимая система ненулевых векторов, так как вектор $\mathbf{b}_1$ выражается через систему образующих A. По лемме о правом крайнем в (1) есть вектор, который линейно выражается через предыдущие. Это не может быть вектор $\mathbf{b}_1$ – у него нет предыдущих. Значит, это какой-то вектор $\mathbf{a}_i$. Выкинув его из (1), получим систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n, \tag{2}$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке.

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \tag{3}$$

Это линейно зависимая система ненулевых векторов, так как вектор $\mathbf{b}_2$ выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни $\mathbf{b}_2$, ни $\mathbf{b}_1$ (у $\mathbf{b}_2$ нет предыдущих, а $\mathbf{b}_1$ не выражается через $\mathbf{b}_2$, так как система B линейно независима). Значит, это какой-то вектор $\mathbf{a}_j$ при $j \neq i$. Выкинув его из (3), получим систему

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \tag{4}$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке. Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \tag{5}$$

и т.д. Продолжая добавлять вектора из B и удалять вектора из A, будем получать системы из n образующих, в которых всё больше векторов из B и всё меньше – из A. Поскольку $k > n$, через n шагов придем к системе образующих $\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1$. Но тогда вектор $\mathbf{b}_{n+1}$ выражается через эту систему образующих, что противоречит линейной независимости B. $\square$

Комментарии

Анализ показывает, что доказано *больше*, чем утверждает теорема. Хотя в начале доказательства было сказано, что A и B – базисы, в ключевом рассуждении использовалось только то, что A – система ненулевых образующих, а B – линейно независимая система. Именно исходя из этого доказывалось, что число векторов в A не может быть меньше числа векторов в B. Поэтому справедливы такие:

Следствия доказательства теоремы о равномощности

1. *Если у векторного пространства V есть система из n образующих, то любая линейно независимая система в V содержит не больше n векторов.*
2. *Если в V есть линейно независимая система из n векторов, то любая система образующих пространства V содержит не менее n векторов.*

Теорема о продолжении

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ – базис векторного пространства V, а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ – линейно независимая система векторов из V. Как только что отмечено, $k \leq n$. Если «прополоть» систему образующих

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n,$$

последовательно удаляя вектора, выражающиеся через предыдущие, до тех пор, пока это возможно, то ни один из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ не будет удалён – ведь ни один из них не выражается через предыдущие. При этом система останется системой образующих и станет линейно независимой, т.е. базисом в точности после k удалений по теореме о равномощности базисов. В результате получим базис, содержащий вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$.

Итак, установлена

Теорема о продолжении

В пространстве с конечным базисом каждая линейно независимая система может быть дополнена до базиса.

В действительности, теорема о продолжении верна для любых векторных пространств, но доказательство этого опирается на средства, выходящие за рамки данного курса (лемму Цорна).

Теорема о равномощности базисов делает корректным следующее

Определение

Если у векторного пространства есть конечный базис, то число векторов в базисе называется *размерностью* этого пространства.
Размерность пространства V обозначается через $\dim V$.

Размерность нулевого пространства по определению есть 0.
Если $\dim V = n$, пространство V называют n-*мерным*.
Конечномерным называют пространство, которое n-мерно для какого-то $n \geq 0$; *бесконечномерным* – пространство, в котором есть бесконечные линейно независимые системы.

В нашем курсе рассматриваются *конечномерные пространства* (за исключением отдельных примеров). По умолчанию слово «пространство» далее означает «конечномерное пространство».

Примеры

Обычное трёхмерное пространство аналитической геометрии трёхмерно и в нашем смысле. Плоскость двумерна, а прямая одномерна.

Поскольку стандартный базис пространства строк F^n состоит из n векторов, $\dim F^n = n$. В частности, пространство F^4 четырёхмерно.

Пространство многочленов $F[x]$ и пространство функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ бесконечномерны. Пространство $F_n[x]$ всех многочленов степени не выше n имеет размерность $n+1$ (базис $F_n[x]$ состоит из многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$).

Поскольку kn матричных единиц E_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant k$ и $1 \leqslant j \leqslant n$, образуют базис пространства $F^{k\times n}$ всех $k\times n$-матриц, $\dim F^{k\times n} = kn$. В частности, пространство всех 2×2-матриц четырёхмерно.

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, двумерно.

Разложение вектора по базису

Теорема о разложении вектора по базису

Пусть V *– ненулевое векторное пространство,* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *– базис этого пространства. Тогда для любого вектора* $\mathbf{x} \in V$ *существуют, и притом единственные, скаляры* $t_1, t_2, \dots, t_n$ *такие, что*

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n. \tag{$*$}$$

Доказательство. Существование $t_1, t_2, \dots, t_n$ ясно, поскольку базис – это система образующих. Предположим, что наравне с равенством $(*)$ выполнено равенство $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n$ для некоторых скаляров $s_1, s_2, \dots, s_n$. Вычтем последнее равенство из $(*)$. Получим

$$(t_1 - s_1)\mathbf{a}_1 + (t_2 - s_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (t_n - s_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Поскольку вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, получаем $t_i - s_i = 0$, т. е. $t_i = s_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Определение

Равенство $(*)$ называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Скаляры $t_1, t_2, \dots, t_n$ называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тот факт, что вектор $\mathbf{x}$ имеет в некотором базисе координаты $t_1, t_2, \dots, t_n$ записывается так: $\mathbf{x} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Следующее утверждение является аналогом замечания о координатах векторов $\vec{x}+\vec{y}$ и $t\vec{x}$ из первой темы курса.

Координаты суммы векторов и произведения вектора на скаляр

Пусть V *– векторное пространство,* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$*, а* t *– произвольный скаляр. Если в некотором базисе* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *вектор* $\mathbf{x}$ *имеет координаты* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, а вектор* $\mathbf{y}$ *– координаты* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$*, то вектор* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *имеет в том же базисе координаты* $(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$*, а вектор* $t\mathbf{x}$ *– координаты* $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$.

Доказательство. По определению координат имеем

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{y}_2 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Складывая эти два равенства, получаем, что

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2+y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_n+y_n)\mathbf{a}_n,$$

а умножая первое из них на скаляр t – что

$$t\mathbf{x} = t(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) = tx_1\mathbf{a}_1 + tx_2\mathbf{a}_2 + \cdots + tx_n\mathbf{a}_n. \qquad \square$$

Определение

Векторные пространства V_1 и V_2 над одним и тем же полем F *изоморфны*, если существует биекция f из V_1 на V_2 (называемая *изоморфизмом*) такая, что f *сохраняет операции*, т.е.

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1 \ \forall t \in F \quad f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \quad \& \quad f(t\mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x}).$$

Теорема об изоморфизме векторных пространств

Любое n-мерное векторное пространство V над полем F изоморфно пространству F^n.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – базис пространства V, $\mathbf{b} \in V$, а $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – координаты вектора $\mathbf{b}$ в этом базисе. Определим отображение $f\colon V \to F^n$ правилом: $f(\mathbf{b}) := (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Поскольку координаты определяют вектор однозначно, отображение f инъективно. Сюръективность этого отображения очевидна: если $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in F^n$, то $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n$. Наконец, сохранение операций вытекает из замечания о координатах суммы векторов и произведения вектора на скаляр. Таким образом, f – изоморфизм из V на F^n. □

Теорема об изоморфизме векторных пространств показывает, насколько важной характеристикой векторного пространства является его размерность. С точки зрения действия алгебраических операций размерность конечномерного векторного пространства однозначно определяет это пространство: для всякого n существует (с точностью до изоморфизма) лишь одно n-мерное векторное пространство над данным полем F – пространство F^n. Этим и объясняется особая роль пространства F^n в линейной алгебре.

Пример: Пространство Фибоначчи

Последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, $\dots$, в которой первые два числа равны соответственно 0 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих, известна как *последовательность чисел Фибоначчи*.

Рассмотрим множество Φ всех последовательностей действительных чисел, в которых каждый член начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих:

$$\Phi := \{(a_n)_{n=0,1,2,\dots} \mid a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{ для всех } n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Φ является векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно операций почленного сложения последовательностей и почленного умножения последовательности на действительное число.

Какова размерность этого *пространства Фибоначчи*?
Легко видеть, что сопоставляя каждой последовательности $(u_n)_{n=0,1,2,\dots} \in \Phi$ пару (u_1, u_2), мы получим изоморфизм между пространством Φ и пространством пар $\mathbb{R}^2$. Значит, $\dim \Phi = 2$.

Базис пространства Фибоначчи

Попробуем найти базис в Φ, состоящий из геометрических прогрессий.

Геометрическая прогрессия $1, x, x^2, x^3, \dots$ лежит в Φ тогда и только тогда, когда $x^2 = x + 1$. Корни квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ суть $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Соответствующие прогрессии из Φ суть $\mathbf{u} = (1, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^n, \dots)$ и $\mathbf{v} = (1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^n, \dots)$; они линейно независимы, ибо линейно независимы соответствующие им пары из $\mathbb{R}^2$.

Раз $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ образуют базис пространства Фибоначчи, любая последовательность $\mathbf{w} \in \Phi$ однозначно выражается в виде

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{$\dagger$}$$

Это верно и для последовательности Фибоначчи, n-й член которой принято обозначать через F_n. Какие α и β надо взять, чтобы получить выражение $(\dagger)$ для последовательности Фибоначчи? При $n = 0$ и $n = 1$

$$F_0 = 0 = \alpha + \beta,$$

$$F_1 = 1 = \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда $\alpha = -\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Итак, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Выводы

Формула $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ (*формула Бине*) может показаться не слишком полезной. Но если заметить, что $\left|\frac{\psi^n}{\sqrt{5}}\right| < 1$ для любого n, получаем удобный способ вычисления n-го числа Фибоначчи: F_n – это ближайшее целое к $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Прием, который мы применили для вывода формулы Бине, можно применять и для нахождения явных формул для других *линейных рекуррентных последовательностей*. Аналогичный прием используется при решении *линейных дифференциальных уравнений*.

В основе всех таких приемов – простая, но чрезвычайно продуктивная идея: чтобы решить задачу о каком-то объекте, найди/придумай то векторное пространство, в котором этот объект «живёт», и примени линейную алгебру. *Линейная алгебра работает.*