

Тема IV: Векторные пространства

1. Линейная зависимость и независимость векторов

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Определения

Пусть F — произвольное поле. **Векторным** (или **линейным**) **пространством** над полем F называется произвольное непустое множество V , на котором заданы бинарная операция сложения и для каждого элемента $t \in F$ унарная операция умножения на t , удовлетворяющие следующим **аксиомами векторного пространства**:

- 1) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$ (сложение **коммутативно**);
- 2) $\forall x, y, z \in V \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (сложение **ассоциативно**);
- 3) $\exists 0 \in V \quad \forall x \in V \quad x + 0 = x$ (существование **нуля**);
- 4) $\forall x \in V \quad \exists y \in V \quad x + y = 0$ (существование **противоположного**);
- 5) $\forall x, y \in V \quad \forall t \in F \quad t(x + y) = tx + ty$;
- 6) $\forall x \in V \quad \forall t, s \in F \quad (t + s)x = tx + sx$;
- 7) $\forall x \in V \quad \forall t, s \in F \quad t(sx) = (ts)x$;
- 8) $\forall x \in V \quad 1 \cdot x = x$.

Элементы множества V называются **векторами**. Поле F называют **основным** полем, а его элементы иногда называют **скалярами**.

Как показывают аксиомы 1)–4), относительно сложения любое векторное пространство — абелева группа. Нейтральный элемент этой группы (вектор $\mathbf{0}$) называется *нулевым вектором*. Он единствен: если вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ удовлетворяют аксиоме 3), то

$$\mathbf{0}_1 \stackrel{3)}{=} \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 \stackrel{1)}{=} \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 \stackrel{3)}{=} \mathbf{0}_2.$$

Вектор, противоположный к вектору x , также единствен. Если вектора y и z удовлетворяют $x + y = \mathbf{0} = x + z$, то

$$y \stackrel{3)}{=} y + \mathbf{0} = y + (x + z) \stackrel{2)}{=} (y + x) + z \stackrel{1)}{=} z + (x + y) = z + \mathbf{0} \stackrel{3)}{=} z.$$

Вектор, противоположный к вектору x , обозначается через $-x$.

Вычитание векторов определяется так: $y - x := y + (-x)$.

Пример 1. Пусть V — множество всех обычных («геометрических») векторов трехмерного физического пространства с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на (действительное) число. Все аксиомы векторного пространства в этом случае выполнены; в частности, роль нулевого вектора $\mathbf{0}$ играет вектор $\vec{0}$. Поэтому V является векторным пространством над полем \mathbb{R} . Векторным пространством над \mathbb{R} будет также множество всех векторов (в обычном смысле этого слова), коллинеарных некоторой плоскости или некоторой прямой.

- Таким образом, свойства векторов в векторном пространстве являются обобщением свойств обычных, «геометрических» векторов. Именно этим и объясняется и термин «векторное пространство», и использование термина «вектор» применительно к элементам произвольного векторного пространства.

Пример 2. Пусть F — произвольное поле, а n — произвольное натуральное число. Обозначим через F^n множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. На множестве F^n введем операции сложения и умножения на скаляр. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F^n$, а $t \in F$. Положим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{и} \quad t\mathbf{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Легко проверяется, что множество F^n с такими операциями является векторным пространством (роль нулевого вектора играет $\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0)$). Это пространство называют *пространством строк длины n над полем F* или просто *пространством строк*. Мы вскоре увидим, что оно играет особую роль в теории векторных пространств.

- Пространство F_1 , т. е. множество всех последовательностей вида (x_1) , где $x_1 \in F$, естественно отождествить с полем F . Итак, любое поле можно рассматривать как векторное пространство над самим собой. Нулевым вектором этого пространства является нуль поля.

При $n = 1, 2, 3$ пространство \mathbb{R}^n имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольному вектору \vec{x} из этого пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел (x_1, x_2, x_3) — координат вектора \vec{x} в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Эта тройка чисел является элементом пространства \mathbb{R}^3 . Отображение f из обычного трехмерного пространства в пространство \mathbb{R}^3 , заданное правилом $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$, является **изоморфизмом**, т.е. оно взаимно однозначно и сохраняет операции сложения и умножения на действительное число:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \text{и} \quad f(t\vec{x}) = tf(\vec{x})$$

для всех векторов \vec{x}, \vec{y} и всех скаляров $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом,

!! пространство \mathbb{R}^3 изоморфно обычному («физическому») трехмерному пространству.

Аналогично, пространство \mathbb{R}^2 изоморфно плоскости, а пространство \mathbb{R}^1 — прямой в обычном трехмерном пространстве.

Пример 3. Рассмотрим множество $F[x]$ всех многочленов от переменной x над полем F ,

$$F[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 : a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in F\}.$$

Оно будет векторным пространством относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на скаляр. Все аксиомы векторного пространства легко проверяются (роль нулевого вектора при этом играет многочлен 0). Таким образом, множество $F[x]$ является векторным пространством. Оно называется *пространством многочленов*. Для всякого натурального n обозначим через $F_n[x]$ множество всех многочленов степени $\leq n$ над полем F . Ясно, что $F_n[x]$ также будет векторным пространством относительно сложения многочленов и умножения многочлена на скаляры из F .

Пример 4. Рассмотрим множество всех функций от одной переменной из \mathbb{R} в \mathbb{R} . Введем операции сложения функций и умножения функции на число стандартным образом: если f и g — две функции, а $t \in \mathbb{R}$, то $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ и $(tf)(x) := t \cdot f(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства (в качестве нулевого вектора выступает функция, значение которой при любом x равно 0). Это векторное пространство называется *пространством функций*.

Пример 5. Множество \mathbb{C} комплексных чисел является векторным пространством над полем \mathbb{R} действительных чисел относительно операций сложения комплексных чисел и умножения комплексного числа на действительное. Все аксиомы векторного пространства сразу следуют из аксиом поля.

Пусть F — поле, а k и n — натуральные числа. *Матрица размера $k \times n$* над F — это прямоугольная таблица с k строками и n столбцами, заполненная элементами из F :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{k \times n}.$$

Такие матрицы складывают и умножают на элементы из F покомпонентно:

$$(a_{ij})_{k \times n} + (b_{ij})_{k \times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{k \times n}, \quad t(a_{ij})_{k \times n} := (ta_{ij})_{k \times n}.$$

Пример 6. Множество $F^{k \times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над F является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матриц на скаляры из F . Нулевым вектором этого пространства является нулевая матрица размера $k \times n$.

Отметим, что пространство строк F^n из примера 2 является специальным случаем пространства матриц $F^{k \times n}$ при $k = 1$.

Пример 7. Пусть V — произвольное множество, состоящее из одного элемента \mathbf{a} . Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр в таком множестве вводятся просто: $\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $t \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого t . Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполняются. Таким образом, V можно рассматривать как векторное пространство. При этом его единственный элемент \mathbf{a} будет нулевым вектором. Такое пространство называется *нулевым*.

**Mathematics is the art of
giving the same name to
different things.**

Henri Poincare



$\forall 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t , получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. \square

$\forall 2$ $0x = \mathbf{0}$ для любого вектора $x \in V$.

Доказательство. Имеем $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. Добавляя $-0x$ к обеим частям, получаем $0x = \mathbf{0}$. \square

$\forall 3$ Если $tx = \mathbf{0}$, то либо $t = 0$, либо $x = \mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть $tx = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Тогда имеем

$$x = 1 \cdot x = (t^{-1}t)x = t^{-1}(tx) = t^{-1}\mathbf{0} \stackrel{\forall 1}{=} \mathbf{0}. \quad \square$$

$\forall 4$ $(-t)x = -tx$ для всех $t \in F$ и $x \in V$.

Доказательство. Имеем

$$(-t)x + tx = ((-t) + t)x = 0x \stackrel{\forall 2}{=} \mathbf{0}.$$

Добавляя $-tx$ к обеим частям, имеем $(-t)x = -tx$. \square

Следующие понятия будут играть ключевую роль.

Определения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — система векторов из векторного пространства V над полем F , а $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Вектор вида

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k \quad (1)$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$, и *нетривиальной*, если хотя бы один из скаляров t_1, t_2, \dots, t_k отличен от 0. Если вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, говорят, что \mathbf{b} *линейно выражается* через вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы*, если некоторая нетривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, и *линейно независимы* в противном случае, т. е. если никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулевому вектору.

Как отмечалось выше, плоскость можно отождествить с пространством \mathbb{R}^2 , а трехмерное физическое пространство — с пространством \mathbb{R}^3 .

Оказывается, что введенные только что понятия линейной зависимости и независимости векторов в этих двух частных случаях равносильны некоторым хорошо знакомым нам понятиям.

Замечание о линейной зависимости на плоскости и в пространстве

- а) Два вектора на плоскости или в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
- б) Три вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. а) Если вектора \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$ для некоторых скаляров p и q , хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b}$, и вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны по критерию коллинеарности векторов. Предположим теперь, что вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то по критерию коллинеарности $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого t , т. е. $1 \cdot \vec{a} - t\vec{b} = \vec{0}$. В обоих случаях получаем, что вектора \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы.

б) Если вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ для некоторых скаляров p , q и r , хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b} - \frac{r}{p} \cdot \vec{c}$. Это значит, что вектор \vec{a} лежит в той плоскости, которой принадлежат вектора \vec{b} и \vec{c} , и потому вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Предположим теперь, что вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Если $\vec{c} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \parallel \vec{c}$, то по критерию коллинеарности векторов $\vec{b} = t\vec{c}$ для некоторого t , и потому $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} - t\vec{c} = \vec{0}$. Наконец, если $\vec{b} \nparallel \vec{c}$, то вектора \vec{b} и \vec{c} образуют базис той плоскости, в которой лежат вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c}$ для некоторых скаляров s и t , откуда $1 \cdot \vec{a} - s\vec{b} - t\vec{c} = \vec{0}$. Во всех трех случаях получаем, что вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы. \square

Пример линейно независимой системы векторов в F^n

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве F^n , которая будет многократно возникать в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

1-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.

Доказательство. Предположим, что $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. Очевидно, что

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$, т.е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Мы доказали, что если какая-то линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равна нулевому вектору, то эта комбинация тривиальна. \square

В процессе доказательства этого замечания фактически доказано следующее полезное для дальнейшего утверждение.

2-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный вектор пространства F^n , то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$.

В пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют линейно независимую систему. Действительно, из равенства $a_0 \cdot 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$, следует, что $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, ведь нуль в пространстве многочленов — это многочлен, у которого все коэффициенты нулевые.

В пространстве функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} линейно независимы, например, функции $\sin x$ и $\cos x$. Действительно, если $a \sin x + b \cos x = 0$, то положив $x := \frac{\pi}{2}$, получим $a = 0$, а положив $x := 0$, получим $b = 0$.

На самом деле, в пространстве функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} для любого положительного n функции $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ образуют линейно независимую систему, но доказать это элементарными средствами трудно.

В пространстве $F^{k \times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над полем F линейно независимую систему образуют **матричные единицы**, т.е. матрицы, у которых ровно один элемент равен 1, а все прочие элементы равны 0:

$$i \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} := E_{ij}.$$

Действительно, легко понять, что $\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} = (a_{ij})_{k \times n}$, и если $(a_{ij})_{k \times n}$ — нулевая $k \times n$ -матрица, то $a_{ij} = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $j = 1, \dots, n$.

Система матричных единиц, конечно, есть прямое обобщение линейно независимой системы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ в пространстве строк F^n .

В поле комплексных чисел \mathbb{C} , рассматриваемом как векторное пространство над \mathbb{R} , линейно независимы, например, числа 1 и i .
А вот в нулевом пространстве линейно независимых систем нет.
На самом деле, верно более общее наблюдение:

Лемма о системе векторов, содержащей нулевой вектор

Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ имеется нулевой вектор, то эти вектора линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Тогда

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_i + 0 \cdot \mathbf{a}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad \square$$

Лемма о надсистеме линейно зависимой системы векторов

Если к линейно зависимой системе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.

Доказательство. Пусть $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m$ — нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, равная нулевому вектору. Если добавить к этим векторам вектора $\mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k$, то

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. □

Следствие о подсистеме линейно независимой системы векторов

Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Итак, свойство «быть линейно зависимой» наследуется «вверх», т.е. переносится на надсистемы, а свойство «быть линейно независимой» наследуется «вниз», т.е. переносится на подсистемы.

Признак линейной зависимости

Вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы, если один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство. Если вектор \mathbf{a}_i линейно выражается через остальные, т. е. $\mathbf{a}_i = r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \dots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \dots + r_k\mathbf{a}_k$ для некоторых скаляров $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_k$, то

$$r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \dots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - 1 \cdot \mathbf{a}_i + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \dots + r_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

и потому вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. □

Лемма о правом крайнем

Если система ненулевых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима, то в ней найдется вектор, который линейно выражается через предыдущие.

Доказательство. По условию существуют скаляры t_1, t_2, \dots, t_k , по крайней мере один из которых не равен 0, такие, что

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad (*)$$

Пусть j — наибольший индекс, для которого $t_j \neq 0$. Если $j = 1$, то равенство (*) сводится к $t_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, противоречие. Итак, $j > 1$ и равенство (*) дает

$$t_1 \mathbf{a}_1 + \dots + t_{j-1} \mathbf{a}_{j-1} + t_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}.$$

Переносим последнее слагаемое в другую часть и делим на $t_j \neq 0$, получаем

$$\mathbf{a}_j = -\frac{t_1}{t_j} \cdot \mathbf{a}_1 - \dots - \frac{t_{j-1}}{t_j} \cdot \mathbf{a}_{j-1}. \quad \square$$