Тема III: Комплексные числа

3. Показательная форма
Извлечение корней

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Как определить степень с комплексным показателем?

Определение степени с комплексным показателем дал в 1740 г. Леонард Эйлер (1707–1783) Эйлер исходил из известных к тому времени представлений функций e^x, $\cos x$ и $\sin x$ в виде *степенных рядов*.

Для любого действительного числа x выполнены равенства:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots ,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

Как определить степень с комплексным показателем? (2)

Если подставить ix вместо x в равенство

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

и учесть, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, и т.д., получим

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

Как определить степень с комплексным показателем? (3)

Придем к тому же выражению для e^{ix}, используя только замечательные пределы и формулу Муавра.
Для любого действительного числа x

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Подставим ix вместо x в это равенство:

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n.$$

Чтобы подсчитать предел в правой части, запишем число $1+\frac{ix}{n}$ в тригонометрической форме:

$$1+i\frac{x}{n} = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n),$$

где $r_n = \sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}$ – модуль этого числа, а φ_n – его аргумент.
По формуле Муавра

$$(r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n))^n = r_n^n(\cos n\varphi_n + i\sin n\varphi_n).$$

Как определить степень с комплексным показателем? (4)

Подсчитаем предел $\lim_{n\to\infty} r_n^n$.

$$r_n^n = \left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2}}\right]^{\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\frac{n}{2}} = \left[\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{2n}}.$$

При $n\to\infty$ выражение $\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2}}$ стремится к e. Поэтому $\lim_{n\to\infty} r_n^n = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{x^2}{2n}} = 1$ при каждом x.

Подсчитаем предел $\lim_{n\to\infty} n\varphi_n$. Мы знаем, что $\cos\varphi_n = \dfrac{1}{r_n}$ стремится к 1 при $n\to\infty$, поэтому выбирая то значение аргумента, которое лежит в первой четверти, можем считать, что φ_n стремится к 0 при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} n\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\sin\varphi_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{r_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n} = x.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} r_n^n(\cos n\varphi_n + i\sin n\varphi_n) = \cos x + i\sin x.$$

Формула Эйлера

Есть и другие аргументы, обосновывающие данное Эйлером определение, которое обычно называют *формулой Эйлера*.

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

> *Формула Эйлера повсеместно используется в математике, физике, химии и инженерии. Ричард Фейнман назвал это уравнение «жемчужиной» и «самой замечательной формулой в математике».*

Полагая $x = \pi$, получаем равенство, связывающие все пять главных математических констант:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Для произвольного комплексного показателя имеем

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Определение

Если r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа, то запись $re^{i\varphi}$ называется *показательной формой* этого числа.

Показательная форма – более компактная (и потому более удобная) запись тригонометрической формы.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в показательной форме, выполняется совсем просто: если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, а $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Формула Муавра тоже превращается в обычное правило возведения в степень:

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Натуральный логарифм комплексного числа

В силу равенства $z = re^{i\varphi}$ естественно определить натуральный логарифм комплексного числа z формулой

$$\ln z := \ln r + i\varphi.$$

Отметим, что натуральный логарифм комплексного числа – *многозначная* функция (в силу многозначности аргумента). Попытка выбрать какое-то одно «правильное» значение логарифма разрушит самое полезное свойство этой функции, а именно, $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$.

Пример: $\ln(-1) = \pi i + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$, а $\ln 1 = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.
$(-1)(-1) = 1$, но если бы мы договорились, что $\ln 1 = 0$, и взяли бы какое-то одно конкретное значение для $\ln(-1)$ (скажем, πi), то равенство $\ln(-1) + \ln(-1) = \ln 1$ не было бы верным.

Степень любого ненулевого комплексного числа α с любым комплексным показателем β естественно определить так:

$$\alpha^\beta := e^{\beta \ln \alpha}.$$

Отметим, что и это – *многозначная* функция.

Упражнение: Подсчитать i^i. (Ответ может удивить.)

Перейдем к вопросу об извлечении корней из комплексных чисел.

Определение

Пусть n – натуральное число. *Корнем степени n из комплексного числа z* называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Из определения не вытекает, что корень n-й степени из z существует. Тем более не ясно, сколько значений может он принимать, если существует. Вспомним, как обстоит дело в поле $\mathbb{R}$. Корень n-й степени из $x \in \mathbb{R}$:

- существует и определен однозначно, если либо n нечетно, либо $x = 0$ (в последнем случае корень равен 0 независимо от n);
- существует и имеет ровно два (противоположных по знаку) значения, если n четно и $x > 0$;
- не существует, если n четно и $x < 0$.

В поле $\mathbb{C}$ все намного проще. Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального n корень n-й степени из z в поле $\mathbb{C}$ существует и определен однозначно (а именно, равен 0). Если же $z \neq 0$, то, как мы сейчас докажем, для любого натурального n корень n-й степени из z в $\mathbb{C}$ существует и имеет ровно n различных значений.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$.Тогда

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k – некоторое целое число. Поскольку q и r – положительные действительные числа, это означает, что $q = \sqrt[n]{r}$. Для аргумента числа w справедливо равенство $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$. В частности, мы видим, что корень n-й степени из числа z всегда существует.

Выясним теперь, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Все корни n-й степени из числа z задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (1)$$

где k – целое число. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi+2\pi\ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом m. Последнее равенство равносильно равенству $\frac{k-\ell}{n} = m$. Иными словами, числа w_k и w_ℓ совпадают тогда и только тогда, когда k и ℓ имеют одинаковые остатки при делении на n. Поэтому все различные значения корня получаются по формуле (1) при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Извлечение корней из комплексных чисел (3)

Таким образом,

- *если* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *– произвольное комплексное число, отличное от* 0, *а* n *– произвольное натуральное число, то корень* n*-й степени из* z *имеет ровно* n *различных значений, которые могут быть вычислены по формуле*

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (2)$$

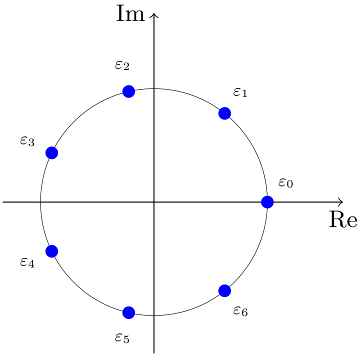
Отдельно выделим случай *корней из единицы*. Если $z = 1$, то $|z| = 1$, а $\arg z = 0$. Подставляя эти данные в (2), получаем следующий факт:

- *корень* n*-й степени из* 1 *имеет ровно* n *различных значений* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, *которые могут быть вычислены по формуле*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Корни из единицы

Корни n-й степени из 1 располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в *единичную окружность* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.



Корни 7-й степени из 1

Свойства корней из 1

Корни n-й степени из 1:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. Произведение и частное двух корней n-й степени из 1 – снова корень n-й степени из 1. (Корни n-й степени из 1 образуют *группу*.)
2. Все корни n-й степени из 1 суть степени корня $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.
3. Сумма всех корней n-й степени из 1 равна 0.

Свойства 1 и 2 понятны; докажем свойство 3.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_1^k = \frac{\varepsilon_1^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{1-1}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$$

Формула Кардано, revisited

Вспомним проблему, приведшую к необходимости рассмотрения комплексных чисел. Решая уравнение $x^3 - x = 0$ (корни которого, очевидно, суть $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$) по формуле Кардано

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

мы пришли к выражению

$$\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Теперь мы можем разобраться со смыслом этого выражения. Имеем

$$\sqrt{-\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}i = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Извлечем из числа $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$ кубический корень.

Формула Кардано, revisited (2)

Три значения кубического корня из
$\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{9\pi}{2}+i\sin\frac{9\pi}{2})$:

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})=-i\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично, три значения кубического корня из $-\sqrt{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}i=$
$=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{7\pi}{2}+i\sin\frac{7\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{11\pi}{2}+i\sin\frac{11\pi}{2})$:

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6})=i\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Итак, имеем три значения для u и три значения для v:

$$u_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad v_1 = i\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$u_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad v_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$u_3 = -i\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad v_3 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Какие из них нужно скомбинировать, чтобы получить решение исходного уравнения $x^3 - x = 0$? Вспомним: при выводе формулы Кардано на u и v налагалось условие $3uv + p = 0$. В нашем случае $p = -1$, т.е. $3uv = 1$. Исходя из этого равенства, u_1 соответствует v_3, u_2 соответствует v_2, а u_3 соответствует v_1. Поэтому получаем три решения уравнения $x^3 - x = 0$:

$$x_1 = u_1 + v_3 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}} = 1,$$
$$x_2 = u_2 + v_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}} = -1,$$
$$x_3 = u_3 + v_1 = -i\frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Заключительные замечания

Вспомним, наши запросы к $\mathbb{C}$ были довольно скромными: мы хотели извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Внезапно обнаружилось, что в $\mathbb{C}$ существуют корни *любой степени* из *любого комплексного числа* и логарифмы *любых ненулевых чисел*!
Но поле комплексных чисел обладает гораздо более сильным свойством: в $\mathbb{C}$ есть корни у *алгебраического уравнения любой степени с произвольными комплексными коэффициентами*.
Это – *основная теорема алгебры комплексных чисел*, впервые доказанная «королем математиков» Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) в 1799 г.