Тема III: Комплексные числа

2. Построение поля комплексных чисел

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Постановка задачи

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:
1) содержит поле $\mathbb{R}$ действительных чисел;
2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
3) не содержит ничего лишнего.

Мы сейчас предъявим некоторую конструкцию, а затем проверим, что она дает поле, удовлетворяющее условием 1)–3).

Напомним, что поле – это множество, элементы которого можно складывать и умножать, так что выполняются все «обычные» свойства обычного умножения и обычного сложения действительных чисел.

Итак, нам нужно определить множество и две операции на нем.

Конструкция

Определение

Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел – это декартов квадрат $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Таким образом, *комплексное число* – это упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b.

Число a называется *действительной частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Re} z$), а число b – *мнимой частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Im} z$).

Суммой комплексных чисел $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$ называется число

$$z_1 + z_2 := (a + c, b + d),$$

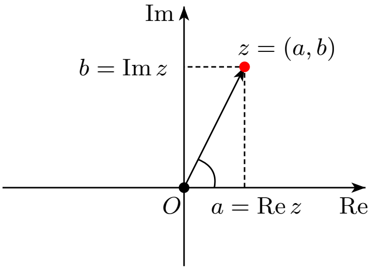
а их *произведением* называется число

$$z_1 z_2 := (ac - bd, ad + bc).$$

Замечание

Мнимая часть комплексного числа – это действительное число!

Комплексные числа – это упорядоченные пары действительных чисел. Но ведь упорядоченные пары действительных чисел – это координаты векторов плоскости в некотором фиксированном базисе.
Поэтому комплексные числа можно (и полезно) изображать с помощью векторов (или точек) плоскости.



Геометрическая интерпретация комплексного числа

При этом используют прямоугольную декартову систему координат; ось абсцисс называют *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*.

Аксиомы поля

Мы должны проверить, что $\mathbb{C}$ – поле. Напомним аксиомы поля.

Множество F с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ называется *полем*, если выполнены следующие 10 аксиом.

1. Коммутативность сложения: $\forall a, b \in F \quad a + b = b + a$.
2. Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Существование нуля: $\exists 0 \in F \ \forall a \in F \quad a + 0 = a$.
4. Существование противоположного элемента: $\forall a \in F \ \exists b \in F \quad a + b = 0$.
5. Коммутативность умножения: $\forall a, b \in F \quad ab = ba$.
6. Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in F \quad (ab)c = a(bc)$.
7. Существование единицы: $\exists 1 \in F \ \forall a \in F \quad a \cdot 1 = a$.
8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $\forall a \in F \setminus \{0\} \ \exists b \in F \quad ab = 1$.
9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a + b)c = ac + bc$.
10. Неодноэлементность: $1 \neq 0$.

Проверка аксиом поля

Первые четыре аксиомы (аксиомы абелевой группы) следуют из свойств сложения векторов и свойств координат. Конечно, эти аксиомы легко проверить и непосредственно. Роль нуля в $\mathbb{C}$ играет пара (0,0).

Непосредственными вычислениями проверяются и аксиомы *5*, *6* и *9* (коммутативность и ассоциативность умножения и дистрибутивность умножения относительно сложения). Например, если $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$, то $z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc)$, а $z_2 z_1 = (ca - db, da + cb)$, откуда $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Роль единицы в $\mathbb{C}$ играет пара (1,0). Действительно, для любой пары $(a, b) \in \mathbb{C}$ имеем $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$. Поскольку $(1, 0) \neq (0, 0)$, выполнена и аксиома *10*.

Остается проверить аксиому *8*. Если $z = (a, b) \neq 0$, то $a^2 + b^2 \neq 0$. Положим $t := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$. Тогда

$$zt = (a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \\ = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0).$$

Что сделано и что осталось сделать

Мы поставили задачу: найти поле, которое:

– сейчас мы находимся здесь –

1) содержит поле $\mathbb{R}$ действительных чисел;

2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;

3) не содержит ничего лишнего.

Мы будем отождествлять комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a и считать множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ подмножеством множества всех комплексных чисел: $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Комплексное число $i := (0, 1)$ называется *мнимой единицей*.

При геометрической интерпретации $1 = (1, 0)$ – орт действительной оси, а $i = (0, 1)$ – орт мнимой оси.

По определению умножения комплексных чисел

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0).$$

Как мы уже договорились, мы не различаем комплексное число $(-1, 0)$ и действительное число -1. Таким образом, $i^2 = -1$. Мы видим, что в $\mathbb{C}$ существует квадратный корень из -1.

Более того, если a – произвольное отрицательное действительное число, то $(0, \sqrt{-a})(0, \sqrt{-a}) = (a, 0) = a$. Итак, в $\mathbb{C}$ существует квадратный корень из любого отрицательного числа.

Что сделано и что осталось сделать

Мы поставили задачу: найти поле, которое:

1) содержит поле $\mathbb{R}$ действительных чисел;

2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;

– сейчас мы находимся здесь –

3) не содержит ничего лишнего (т.е. среди всех полей со свойствами 1) и 2) наша конструкция – минимальная).

Алгебраическая форма записи комплексного числа

Заметим, что $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$.

Определение

Выражение $a + bi$ называется *алгебраической формой* числа (a, b).

Заметим, что

$$(a + bi) + (c + di) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Важный вывод:

- *сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов от i; при умножении дополнительно учитывается, что $i^2 = -1$:*

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bd\,i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Конструкция поля $\mathbb{C}$ – минимально возможная

Пусть F – произвольное поле, которое содержит поле $\mathbb{R}$ и квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Зафиксируем такой элемент $e \in F$, что $e^2 = -1$.

Тогда F содержит все элементы вида $a + be$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Ясно, что такие элементы складываются и перемножаются в F по тем же правилам, по которым складываются и перемножаются комплексные числа в алгебраической форме:

$$(a + be) + (c + de) = (a + c) + (b + d)e,$$
$$(a + be)(c + de) = (ac - bd) + (ad + bc)e.$$

Сопоставим комплексному числу $a + bi \in \mathbb{C}$ элемент $a + be \in F$. Легко проверить, что так определенное отображение взаимно однозначно и сохраняет операции сложения и умножения. Итак, поле $\mathbb{C}$ *вкладывается* в поле F. Таким образом, $\mathbb{C}$ вкладывается в любое поле, которое содержит $\mathbb{R}$ и квадратные корни из отрицательных чисел. Это и означает, что наша конструкция поля $\mathbb{C}$ минимально возможная.

Более того, наш аргумент показывает, что поле $\mathbb{C}$ единственно с точностью до *изоморфизма* – как бы мы не строили поле с условиями 1)–3), получится по существу одно и то же с точностью до выбора обозначений.

Определение

Если $x = a + bi$ – комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* x и обозначается через $\overline{x}$.

При геометрической интерпретации сопряжение – это отражение точки комплексной плоскости относительно действительной оси.

Свойства операции комплексного сопряжения

Если x и y – произвольные комплексные числа, то:

1) $\overline{\overline{x}} = x$;
2) $x = \overline{x}$ *тогда и только тогда, когда* x *– действительное число;*
3) $x + \overline{x}$ *– действительное число;*
4) $x \cdot \overline{x}$ *– действительное число; более того,* $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$*, причем* $x \cdot \overline{x} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$;
5) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
6) $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Комплексное сопряжение (2)

Доказательство. Пусть $x = a + bi$ и $y = c + di$.

1) $\overline{\overline{x}} = \overline{a - bi} = a + bi = x$.

2) Если $x = \overline{x}$, т. е. $a + bi = a - bi$, то $2bi = 0$, откуда $b = 0$, и значит $x \in \mathbb{R}$. Обратно, если $x \in \mathbb{R}$, то $b = 0$, и потому $x = \overline{x}$.

3) Достаточно учесть, что $x + \overline{x} = 2a$.

4) А здесь достаточно учесть, что $x \cdot \overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

5) Ясно, что

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{x} + \overline{y}. \end{aligned}$$

6) Ясно, что

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{x} \cdot \overline{y}. \end{aligned}$$

Все свойства доказаны. $\square$

Замечание

Если $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ – комплексное число, не являющееся действительным, то z и $\overline{z}$ – корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом. Обратно, корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом – комплексно сопряженные числа.

Доказательство. Если $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $b \neq 0$. Ясно, что z и $\overline{z}$ – корни уравнения

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z})x + z \cdot \overline{z} = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $a^2 - (a^2 + b^2) = -b^2 < 0$.

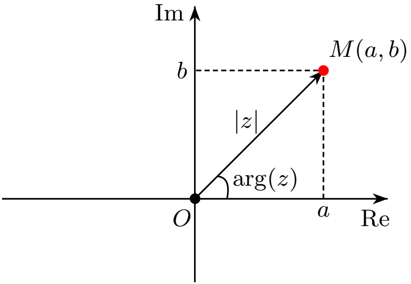
Обратно, если у квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами дискриминант $\Delta := \dfrac{p^2}{4} - q$ отрицателен, то корни $-\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta}$ этого уравнения – комплексно сопряженные числа. □

Свойство 4) можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа $\dfrac{a+bi}{c+di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $c-di$, имеем:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \\ = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$

Определение

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой $M(a, b)$ (см. рисунок). Длина отрезка OM называется *модулем* числа z. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением действительной оси и отрезком OM называется *аргументом* числа z. *У числа* 0 *аргумент не определен.* Модуль комплексного числа z обозначается через $|z|$, а аргумент – через $\arg(z)$. Имеем $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Модуль и аргумент комплексного числа

Два замечания

1. Для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает со стандартным понятием модуля (абсолютной величины). В самом деле, если $z = a + 0 \cdot i$, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$.
2. Аргумент ненулевого комплексного числа определен неоднозначно: если φ – аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ – также его аргумент при любом целом k. Такое соглашение принимается, чтобы при непрерывном движении точки по комплексной плоскости ее аргумент изменялся непрерывно.

Свойства модуля комплексного числа

Если x и y – произвольные комплексные числа, то:

1) $|x| = |\,\overline{x}\,|$;
2) $x \cdot \overline{x} = |x|^2$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
4) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Доказательство. 1), 2) Пусть $x = a + bi$. Тогда

$$|\,\overline{x}\,| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |x| \text{ и}$$
$$x \cdot \overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2.$$

3) Обозначим через A, B и C точки на плоскости, отвечающие числам x, y и $x + y$ соответственно при геометрической интерпретации комплексных чисел. Если точки A, B, O не лежат на одной прямой (левый рисунок на следующем слайде), то, поскольку длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон, имеем

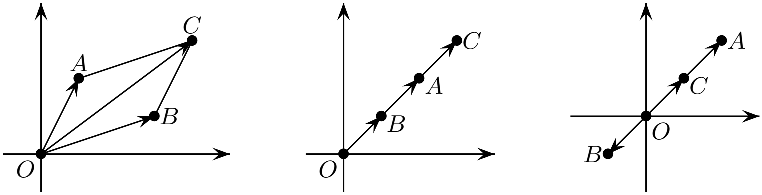
$$|x + y| = |OC| < |OA| + |AC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|.$$

Пусть теперь точки A, B и O лежат на одной прямой. Если A и B лежат по одну сторону от точки O (см. центральный рисунок), то, очевидно,

$$|x+y| = |OC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|.$$

Пусть точки A и B лежат по разные стороны от точки O (см. правый рисунок). Без ограничения общности можно считать, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда точка C принадлежит отрезку OA, и потому

$$|x+y| = |OC| \leqslant |OA| = |x| \leqslant |x| + |y|.$$



Модуль суммы комплексных чисел

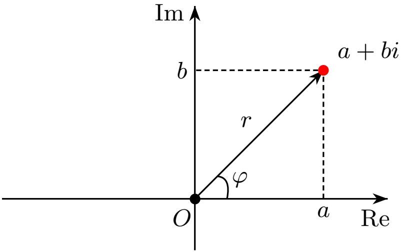
3) Это свойство можно проверить прямым вычислением, но проще вывести его из свойства 2).
Имеем:

$$|xy|^2 \stackrel{2)}{=} xy \cdot \overline{xy} = xy\overline{xy} = x\overline{x} \cdot y\overline{y} \stackrel{2)}{=} |x|^2 \cdot |y|^2.$$

Отсюда $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Пусть r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа $a + bi \neq 0$.

Имеем $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, см. рисунок.



Следовательно,

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot i \right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение

Если r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа $a + bi$, то запись $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* этого числа.

1. Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно – это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.
2. Число 0 не имеет тригонометрической формы, так как у него не определен аргумент.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. В самом деле, пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big] = \\
&= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big); \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).
\end{aligned}$$

Мы видим, что:

- *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов*;
- *модуль частного от деления z_1 на z_2 равен частному от деления модуля z_1 на модуль z_2, а аргумент частного – разности аргументов z_1 и z_2.*

Возведение в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Из результата о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме по индукции легко вывести, что

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1}$$

для любого натурального n. Таким образом,

- *при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени*.

Из формулы (1) при $r = 1$ получается равенство

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

известное как *формула Муавра*.

Комбинация формулы Муавра и формулы бинома Ньютона – неисчерпаемый источник комбинаторных и тригонометрических тождеств. Для примера выведем формулы, выражающие $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Имеем

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi + 10i^2\cos^3\varphi\sin^2\varphi + \\ &+ 10i^3\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5i^4\cos\varphi\sin^4\varphi + i^5\sin^5\varphi = \\ &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \\ &- 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \\ &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + \\ &+ (5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)i.\end{aligned}$$

С другой стороны, из формулы Муавра при $n = 5$ вытекает, что $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$. Следовательно,

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi \quad \text{и}$$

$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$