Тема III: Комплексные числа

1. Формула Кардано. Постановка задачи

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Рассмотрим кубическое уравнение вида

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (*)$$

Будем искать его решение в виде $x = u + v$, где u и v — новые переменные. Подставляя $x = u + v$ в $(*)$, раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q =$$
$$= u^3 + 3uv\,(u+v) + v^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + (3uv+p)\,(u+v) + q = 0.$$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q =$$
$$= u^3 + 3uv\,(u+v) + v^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + {\color{red}(3uv+p)}\,(u+v) + q = 0.$$

Если выбрать u и v так, чтобы $3uv + p = 0$, остается уравнение

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Заменяя в нем v на $-\frac{p}{3u}$, получаем

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0, \quad \text{то есть} \quad u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

а это — квадратное уравнение относительно u^3.

Формула Кардано (2)

Решая квадратное уравнение $u^6 + qu^3 - \dfrac{p^3}{27} = 0$ относительно u^3 и извлекая кубический корень, находим

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{и аналогично} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Окончательно имеем

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Это и есть *формула Кардано*. Попробуем решить с ее помощью уравнение $x^3 - x = 0$ (корни которого, очевидно, суть $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$). Подставляя $p = -1$, $q = 0$, получим

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Это выражение совсем не похоже ни на один из ожидаемых корней! Чтобы как-то разумно его интерпретировать, надо научиться оперировать с выражениями, содержащими квадратные корни из отрицательных чисел.

Постановка задачи

Итак, нам нужно *поле*, которое:

- содержит поле $\mathbb{R}$ действительных чисел;
- содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- не содержит ничего лишнего.

Напомним, что *полем* называется неодноэлементное ассоциативное и коммутативное кольцо с 1, в котором все ненулевые элементы обратимы.

Мы покажем, что такое поле существует и в некотором естественном смысле единственно. Оно называется *полем комплексных чисел*.