Тема II: Прямые и плоскости

2. Плоскость и прямая в пространстве

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Основная теорема об уравнении плоскости

Рассказ о плоскости в пространстве построен по тому же плану, что и рассказ о прямой на плоскости в предыдущей лекции. Многие утверждения схожи как по формулировкам, так и по доказательствам. Если единственным отличием в доказательстве является появление у точек и векторов третьих координат, мы не повторяем рассуждение.

Теорема об уравнении плоскости

Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая плоскость может быть задана некоторым уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от 0. Обратно, любое уравнение

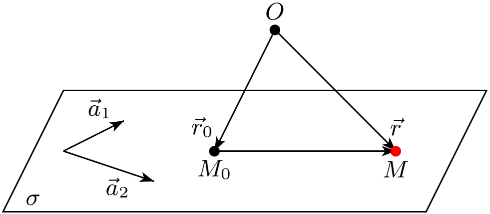
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от 0, задает некоторую плоскость.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной плоскости, называется ее *направляющим вектором*.

Зафиксируем систему координат с началом в точке O. Пусть σ – плоскость, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка плоскости σ, $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ и $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ – направляющие вектора, не коллинеарные между собой. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка пространства. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\vec{r}_0$, а радиус-вектор точки M – через $\vec{r}$.



Точка M лежит в плоскости σ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен σ.

Доказательство прямого утверждения теоремы (2)

Вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис плоскости σ. Если вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \sigma$ коллинеарны, то в силу теоремы о разложении вектора по базису плоскости существуют числа u и v такие, что $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$. Обратно, очевидно, что если $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых u и v, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \sigma$. Таким образом, $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых u и v. Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$, получаем, что $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v. Это – *векторное уравнение* плоскости.

Координаты векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ совпадают с координатами точек M и M_0 соответственно. Расписав равенство $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ в координатах, получаем уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1u + q_2v, \\ y = y_0 + r_1u + r_2v, \\ z = z_0 + s_1u + s_2v, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости*.

Доказательство прямого утверждения теоремы (3)

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Из замечания о координатах компланарных векторов вытекает, что это условие эквивалентно выполнению равенства

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется *канонисеским уравнением плоскости*.

Разложив определитель по первой строке, получим равенство:

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \cdot (z - z_0) = 0.$$

Если обозначить

$$A := \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad B := - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad C := \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix},$$

оно перепишется так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доказательство прямого утверждения теоремы (4)

Если положить $D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то равенство

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

можно переписать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Легко понять, что если $A = B = C = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$. В силу критерия коллинеарности векторов это означает, что вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны вопреки их выбору.
Итак, мы доказали, что плоскость σ задается уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от 0.

Доказательство обратного утверждения теоремы

Рассмотрим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$. Для определенности будем считать, что $A \neq 0$. Возьмем произвольное решение (x_0, y_0, z_0) уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$. (Можно взять, например, $x_0 := -\frac{D}{A}$, $y_0 = z_0 := 0$.) Положим $\vec{a}_1 := (-B, A, 0)$ и $\vec{a}_2 := (-C, 0, A)$. Из того, что $A \neq 0$, вытекает, что координаты векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ непропорциональны, а значит, эти вектора неколлинеарны. Обозначим через σ плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ коллинеарно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Докажем, что σ задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Запишем каноническое уравнение плоскости σ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Раскрывая определитель по первой строке, имеем $A^2(x - x_0) + AB(y - y_0) + AC(z - z_0) = 0$. Разделив это уравнение на $A \neq 0$, получим $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$. Поскольку $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, имеем $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Следовательно, уравнение $(*)$ равносильно уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$. □

Из доказательства теоремы легко выводится следующий полезный факт.

Замечание о направляющих векторах плоскости

Пусть плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. *Положим* $\vec{s}_1 := (-B, A, 0)$, $\vec{s}_2 := (-C, 0, A)$ *и* $\vec{s}_3 := (0, -C, B)$. *Тогда по крайней мере два из векторов* $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ *и* $\vec{s}_3$ *не коллинеарны и являются направляющими векторами плоскости (если* $A \neq 0$, *этими свойствами обладают вектора* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_2$, *если* $B \neq 0$ *– вектора* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_3$, *а если* $C \neq 0$ *– вектора* $\vec{s}_2$ *и* $\vec{s}_3$*).*

Определение

Пусть плоскость π задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *главным вектором* плоскости π.

Замечание о главном векторе плоскости

Главный вектор плоскости не коллинеарен этой плоскости.

Мы опускаем доказательство этого факта, поскольку оно вполне аналогично доказательству замечания о главном векторе прямой.

Если система координат является прямоугольной декартовой, замечание о главном векторе плоскости можно уточнить. В этом случае скалярное произведение векторов (A, B, C) и $(-B, A, 0)$ равно $-AB + BA = 0$, т. е. эти вектора ортогональны. Аналогично проверяется ортогональность вектора (A, B, C) каждому из векторов $(-C, 0, A)$ и $(0, -C, B)$. В силу замечания о направляющих векторах плоскости вектор (A, B, C) ортогонален к двум неколлинеарным векторам, лежащим в плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Следовательно, справедливо

Замечание о нормальном векторе плоскости

Если система координат является прямоугольной декартовой, то главный вектор плоскости перпендикулярен этой плоскости. В этом случае главный вектор плоскости называют ее нормальным вектором.

Обратно, если известны координаты (A, B, C) какого-то ненулевого вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости σ, и координаты (x_0, y_0, z_0) какой-то точки M_0 этой плоскости в прямоугольной декартовой системе координат, то можно сразу записать уравнение плоскости σ так: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Действительно, если $M(x, y, z)$ – произвольная точка, то последнее равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, т.е. тогда и только тогда, когда $M \in \sigma$.

Уравнение плоскости по трем точкам

Предположим, что даны координаты трех точек, принадлежащих плоскости и не лежащих на одной прямой, – $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда вектора $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ коллинеарны плоскости и не коллинеарны между собой (последнее гарантировано тем обстоятельством, что точки M_0, M_1 и M_2 не лежат на одной прямой). Подставляя их координаты в каноническое уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0,$$

получаем *уравнение плоскости по трем точкам*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Теорема о взаимном расположении плоскостей

Пусть плоскость σ_1 *задана уравнением* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$*, а плоскость* σ_2 *– уравнением* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$*. Плоскости* σ_1 *и* σ_2*:*

1) *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ *или* $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ *;*
2) *параллельны тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ *;*
3) *совпадают тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ *.*

Доказательство. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2. \end{cases}$$

Ясно, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет решение, но уравнения системы не равносильны; параллельны тогда и только тогда, когда система не имеет решений; совпадают тогда и только тогда, когда уравнения системы равносильны.

Предположим сначала, что коэффициенты при неизвестных непропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Для определенности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Убедимся, что плоскости пересекаются. Придадим z значение 0; тогда система сведется к

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2. \end{cases}$$

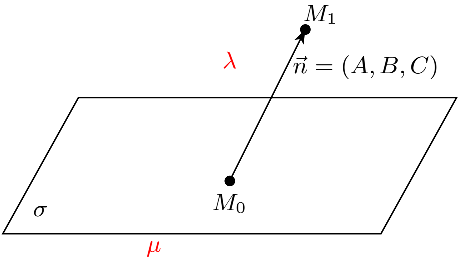
Условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ означает, что $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Поэтому последняя система имеет единственное решение (теорема Крамера). Обозначим его через (x_0, y_0). Тогда тройка чисел $(x_0, y_0, 0)$ будет решением исходной системы. Следовательно, плоскости σ_1 и σ_2 имеют по крайней мере одну общую точку, т.е. либо пересекаются, либо совпадают. Предположим, что $\sigma_1 = \sigma_2$. Пересечение σ_1 с координатной плоскостью $z = 0$ содержит точку $M_0(x_0, y_0, 0)$, а значит, содержит и некоторую прямую. Пусть $M_1(x_1, y_1, 0)$ – точка этой прямой, отличная от M_0. Тогда пара чисел (x_1, y_1) отлична от (x_0, y_0) и является решением системы $\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{cases}$ – противоречие с тем, что эта система имеет единственное решение.

Взаимное расположение двух плоскостей (3)

Мы доказали достаточность в утверждении 1) теоремы о взаимном расположении плоскостей. Достаточность в утверждениях 2) и 3) доказывается вполне аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости.

После того, как достаточность во всех трех утверждениях доказана, легко понять, что в каждом из этих утверждений верна и необходимость (аргумент с разбиением на взаимоисключающие случаи, см. конец доказательства теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости). □

Как по уравнению плоскости и координатам двух точек, не лежащих в этой плоскости, определить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от плоскости? Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Все пространство делится этой плоскостью на три непересекающиеся части: саму плоскость σ и два *полупространства* (в каждое из этих полупространств входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от σ).



Возьмем точку $M_0 \in \sigma$ и отложим от нее главный вектор плоскости σ. Конец получившегося направленного отрезка обозначим через M_1. По замечанию о главном векторе плоскости $M_1 \notin \sigma$. Обозначим то полупространство, в котором лежит M_1, через λ, а другое – через μ.

Полупространства, определяемые плоскостью (2)

Теорема о полупространствах

Пусть $M(x',y',z')$ – произвольная точка пространства. Если $M \in \lambda$, то $Ax' + By' + Cz' + D > 0$, а если $M \in \mu$, то $Ax' + By' + Cz' + D < 0$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем, поскольку оно вполне аналогично доказательству теоремы о полуплоскостях из предыдущей лекции. Из теоремы о полупространствах вытекает ответ на сформулированный выше вопрос.

Следствие о расположении двух точек относительно плоскости

Точки $P(x_1,y_1,z_1)$ и $Q(x_2,y_2,z_2)$ расположены по одну сторону от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ имеют одинаковый знак, и по разные стороны от этой плоскости тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ имеют разные знаки.

Расстояние от точки до плоскости

Укажем формулу для расстояния от точки до плоскости. *Будем предполагать, что система координат прямоугольная декартова.*

Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а $M(x', y', z')$ – некоторая точка пространства. Обозначим через $d(M, \sigma)$ расстояние от M до σ. Тогда справедлива следующая формула:

$$d(M, \sigma) = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Мы опускаем вывод этой формулы, поскольку он вполне аналогичен выводу формулы для расстояния от точки до прямой на плоскости из предыдущей лекции.

Параметрические уравнения прямой

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке O. Пусть ℓ – прямая в пространстве, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит ℓ, а вектор $\vec{a} = (q, r, s)$ является направляющим вектором этой прямой. Дословно повторяя рассуждения, проведенные при выводе параметрических уравнений прямой на плоскости, можно показать, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases} \qquad (1)$$

для некоторого t. Уравнения (1) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Выражая параметр t из первого, второго и третьего уравнений системы (1) и приравнивая полученные выражения, мы получаем уравнения

$$\frac{x-x_0}{q}=\frac{y-y_0}{r}=\frac{z-z_0}{s},$$

которые называются *канонимескими уравнениями прямой в пространстве*.

Предположим теперь, что известны координаты двух различных точек, принадлежащих прямой: $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т.е. является направляющим вектором прямой. Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем следующие уравнения, которые называются *уравнениями прямой в пространстве по двум точкам*:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Общие уравнения прямой

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. Пусть ℓ – прямая, являющаяся пересечением плоскостей σ_1 и σ_2, а $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Точка $M(x, y, z)$ лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (**)$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.
Из того, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются, вытекает, что либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (см. теорему о взаимном расположении плоскостей).

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Как найти ее каноническое уравнение? Для этого нужно знать некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащую прямой ℓ, и какой-то ненулевой вектор, параллельный ℓ. Найти точку легко: например, если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то можно положить $z_0 = 0$ и определить x_0 и y_0, решив систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2. \end{cases}$$

Как найти направляющий вектор для ℓ?
Допустим сначала, что система координат прямоугольная декартова. Вектора $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются нормальными векторами плоскостей σ_1 и σ_2, задаваемых первым и вторым уравнениями системы (**) соответственно. Положим $\vec{b} := \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Тогда $\vec{b} \perp \vec{n}_1$. Поскольку $\vec{n}_1 \perp \sigma_1$, получаем, что $\vec{b} \parallel \sigma_1$. Аналогично получаем $\vec{b} \parallel \sigma_2$. Но тогда $\vec{b}$ коллинеарен прямой пересечения плоскостей σ_1 и σ_2, т.е. прямой ℓ. Из того, что $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, вытекает, что $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, откуда $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$. Таким образом, вектор $\vec{b}$ является направляющим вектором прямой ℓ.

Векторное произведение векторов $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ имеет координаты

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right). \qquad (\dagger)$$

Вывод

Если прямая задана как пересечение двух плоскостей и известны уравнения этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять векторное произведение главных векторов этих плоскостей.

Оказывается, формула $(\dagger)$ дают координаты направляющего вектора в *любой системе координат*! Мы докажем это чуть позже.
Получаем *правило*: направляющим вектором прямой, заданной как пересечение двух плоскостей, будет вектор с координатами, вычисленными по формуле для координат векторного произведения главных векторов этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат.
Отметим, когда система координат произвольна, нельзя утверждать, что векторное произведение главных векторов двух пересекающихся плоскостей параллельно прямой, по которой эти плоскости пересекаются!

Взаимное расположение прямой и плоскости (1)

Перейдем к вопросу о взаимном расположении прямой и плоскости.

Теорема о взаимном расположении прямой и плоскости

Пусть плоскость σ *задана уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *а прямая* ℓ *– уравнениями* $\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st. \end{cases}$ *Тогда:*

1) ℓ *и* σ *пересекаются тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs \neq 0$;
2) ℓ *и* σ *параллельны тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;
3) ℓ *лежит в* σ *тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Доказательство. Подставим $x_0 + qt$, $y_0 + rt$, $z_0 + st$ вместо x, y и z в уравнение плоскости. Получим уравнение

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) + D = 0. \qquad (2)$$

Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит одновременно и ℓ, и σ, то значение параметра t, соответствующее точке M, является решением уравнения (2). Следовательно, ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда это уравнение имеет единственное решение; ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда оно не имеет решений; наконец, ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда это уравнение имеет бесконечно много решений. Уравнение (2) можно переписать в виде

$$(Aq + Br + Cs)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Ясно, что оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$, что доказывает утверждение 1); не имеет решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, что доказывает утверждение 2); имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, что доказывает утверждение 3). $\square$

Обоснование формулы (†) для направляющего вектора прямой, заданной как пересечение двух плоскостей

В качестве приложения теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости обоснуем правило вычисления направляющего вектора прямой ℓ, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Пусть ℓ' – прямая, проведенная через какую-то точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой ℓ параллельно вектору с координатами

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \qquad (\dagger)$$

Как расположена прямая ℓ' относительно плоскости σ_1, задаваемой первым уравнением системы (**)? Имеем

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

и $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$, откуда $\ell' \subset \sigma_1$. Аналогично, $\ell' \subset \sigma_2$, где σ_2 – плоскость, задаваемая вторым уравнением системы (**). Поэтому $\ell' = \ell$.

Теорема о взаимном расположении прямых в пространстве

Пусть прямые ℓ_1 *и* ℓ_2 *заданы уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно. Положим $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}$.

1) ℓ_1 *и* ℓ_2 *скрещиваются тогда и только тогда, когда* $\Delta \neq 0$*;*
2) ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$ *и либо* $\frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$*, либо* $\frac{r_1}{r_2} \neq \frac{s_1}{s_2}$*;*
3) ℓ_1 *и* ℓ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ *и либо* $\frac{x_2 - x_1}{q_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{r_1}$*, либо* $\frac{y_2 - y_1}{r_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{s_1}$*;*
4) ℓ_1 *и* ℓ_2 *совпадают тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ *и* $\frac{x_2 - x_1}{q_1} = \frac{y_2 - y_1}{r_1} = \frac{z_2 - z_1}{s_1}$.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ – направляющий вектор прямой ℓ_1; $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ – направляющий вектор прямой ℓ_2; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, принадлежащая прямой ℓ_1; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точка, принадлежащая прямой ℓ_2; $\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда вектора $\vec{c}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Утверждение 1) вытекает теперь из замечания о координатах компланарных векторов.

Предположим теперь, что прямые лежат в одной плоскости или, что эквивалентно, выполнено равенство $\Delta = 0$. Ясно, что при выполнении этого условия прямые пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$. Учитывая критерий коллинеарности векторов, получаем утверждение 2).

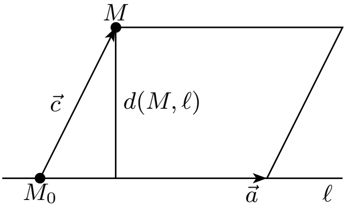
Пусть, наконец, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить два этих случая, достаточно проверить, лежит ли точка M_2 на прямой ℓ_1. Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае – параллельны. Учитывая, что канонические уравнения прямой ℓ_1 имеют вид $\frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{r_1} = \frac{z-z_1}{s_1}$, получаем утверждения 3) и 4). $\square$

Расстояние от точки до прямой (1)

Наша ближайшая цель – вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а $M(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка пространства. Точку с координатами (x_0, y_0, z_0), принадлежащую прямой ℓ, обозначим через M_0, а вектор с координатами (q, r, s), являющийся направляющим вектором прямой ℓ, – через $\vec{a}$. Кроме того, положим $\vec{c} := \overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок.



Расстояние от точки до прямой

Обозначим расстояние от точки M до прямой ℓ через $d(M,\ell)$. Ясно, что $d(M,\ell)$ – высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Обозначим его площадь через S. Тогда $d(M,\ell) = \frac{S}{|\vec{a}|}$. Вспоминая геометрический смысл векторного произведения векторов, получаем, что

$$d(M,\ell) = \frac{|\vec{a}\times\vec{c}|}{|\vec{a}|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния от точки до прямой в пространстве. Если система координат прямоугольная декартова, можно явно выразить $d(M,\ell)$ через координаты точек M_0 и M и вектора $\vec{a}$:

$$d(M,\ell) = \sqrt{\frac{\begin{gathered}\big(r(z_1-z_0)-s(y_1-y_0)\big)^2+\big(q(z_1-z_0)-s(x_1-x_0)\big)^2+\\ +\big(q(y_1-y_0)-r(x_1-x_0)\big)^2\end{gathered}}{q^2+r^2+s^2}}.$$

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (1)

Наша следующая цель – научиться находить расстояние между скрещивающимися прямыми. Прежде, чем выводить соответствующую формулу, надо сказать, что понимается под таким расстоянием. Для этого нам понадобится одно новое понятие.

Определение

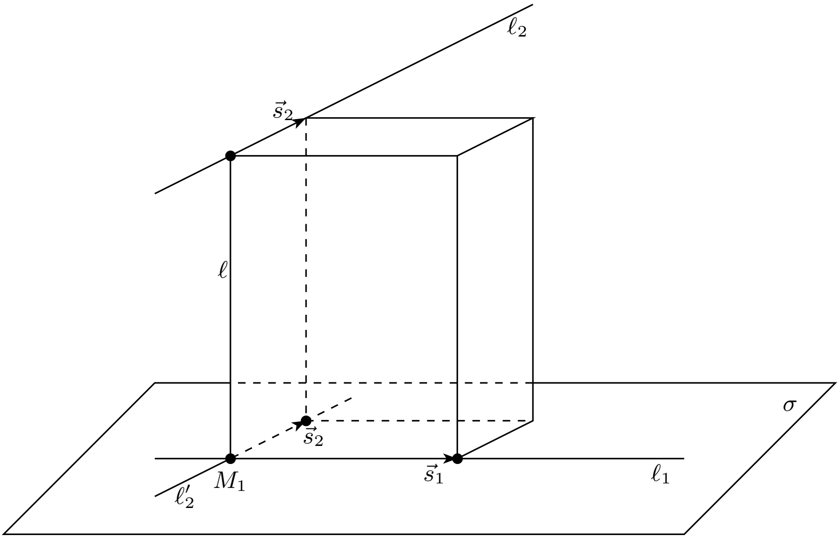
Пусть ℓ_1 и ℓ_2 – скрещивающиеся прямые. *Общим перпендикуляром* к прямым ℓ_1 и ℓ_2 называется прямая, перпендикулярная к каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 и пересекающая каждую из них.

То, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым всегда существует, не вполне очевидно. Докажем, что это так.

Теорема об общем перпендикуляре

Для произвольных скрещивающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 существует общий перпендикуляр к этим прямым.

Доказательство. Рассуждения иллюстрирует рисунок на следующем слайде.



Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (3)

Обозначим через $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Ясно, что эти векторы не коллинеарны, так как в противном случае прямые ℓ_1 и ℓ_2 были бы параллельными или совпадали бы. Обозначим через σ плоскость, проходящую через прямую ℓ_1 параллельно прямой ℓ_2, а через ℓ_2' – ортогональную проекцию прямой ℓ_2 на плоскость σ. Поскольку векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ не коллинеарны, прямые ℓ_1 и ℓ_2' пересекаются. Обозначим точку их пересечения через M_1. Далее, пусть ℓ – прямая, проходящая через точку M_1 перпендикулярно к плоскости σ. Из построения прямой ℓ_2' и того факта, что $M_1 \in \ell_2'$ вытекает, что прямые ℓ и ℓ_2 пересекаются и перпендикулярны. Следовательно, прямая ℓ является общим перпендикуляром к ℓ_1 и ℓ_2. □

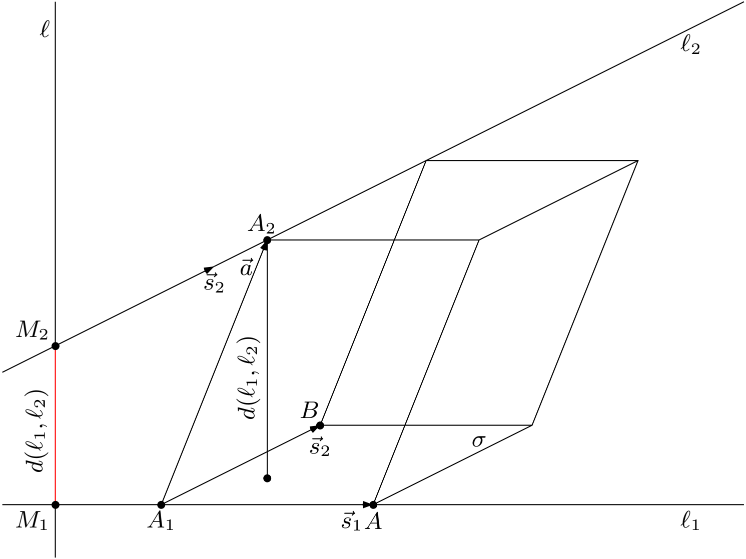
Расстояние между скрещивающимися прямыми (1)

Определение

Расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 и ℓ_2.

Такое определение расстояния между скрещивающимися прямыми естественно, поскольку, как несложно показать, расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, равно минимуму из длин всех отрезков вида A_1A_2, где $A_1 \in \ell_1$, а $A_2 \in \ell_2$.

Для того, чтобы вывести формулу расстояния между скрещивающимися прямыми, продолжим построения, начатые при доказательстве теоремы об общем перпендикуляре. Возьмем произвольные точки $A_1 \in \ell_1$ и $A_2 \in \ell_2$. Обозначим через M_2 точку пересечения прямых ℓ и ℓ_2, а через A и B – концы направленных отрезков, которые получатся, если отложить от точки A_1 векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ соответственно (см. рисунок на следующем слайде). Ясно, что расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, т. е. длина отрезка M_1M_2, равно длине высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1B}$.



Расстояние между скрещивающимися прямыми

Длина высоты параллелепипеда равна частному от деления его объема на площадь основания. Таким образом, чтобы найти расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, надо объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} := \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{s}_1 = \overrightarrow{A_1A}$ и $\vec{s}_2 = \overrightarrow{A_1B}$, разделить на площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1A}$ и $\overrightarrow{M_1B}$. Обозначим расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 через $d(\ell_1, \ell_2)$. Вспоминая геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов, получаем, что

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\,\vec{a}\vec{s}_1\vec{s}_2\,|}{|\,\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\,|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния между скрещивающимися прямыми.

Расстояние между скрещивающимися прямыми (4)

Если система координат прямоугольная декартова, можно в явном виде выразить $d(\ell_1, \ell_2)$ через координаты точек A_1 и A_2 и векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Обозначим координаты точек A_1 и A_2 через (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно, а координаты векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ – через (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) соответственно. Тогда:

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{\mathrm{abs}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (a_1c_2 - c_1a_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2}}$$

(символом abs здесь обозначен модуль определителя).

Угол между прямыми

Обсудим вычисление углов. Формулы для углов приведем для случая прямоугольной декартовой системы координат.
Углом между прямыми (вне зависимости от их взаимного расположения) естественно считать угол между их направляющими векторами.
Так, если в пространстве заданы прямые с направляющими векторами (q_1, r_1, s_1) и (q_2, r_2, s_2), то угол α между этими прямыми можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{q_1q_2 + r_1r_2 + s_1s_2}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2 + s_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2 + s_2^2}}.$$

.
Если прямые на плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол α между этими прямыми можно найти по формуле

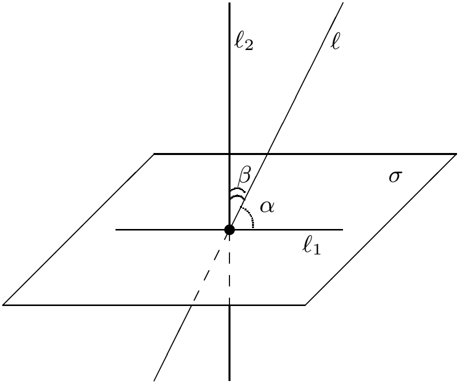
$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Угол между плоскостями

Величина угла между плоскостями определяется как величина линейного угла этого двугранного угла.
Если плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол между этими плоскостями можно найти, вычисляя угол α между их главными векторами по формуле

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Углом между прямой ℓ и плоскостью σ называется угол между прямой ℓ и ее проекцией на σ, см. рисунок.



Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью (2)

Обозначим через ℓ_1 проекцию ℓ на σ, а через ℓ_2 – прямую, перпендикулярную к σ и проходящую через точку пересечения ℓ и σ. Если α – угол между ℓ и ℓ_1, а β – острый угол между ℓ и ℓ_2, то $\alpha + \beta = 90^o$. Пусть (q, r, s) – направляющий вектор прямой ℓ, а $Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости σ. Тогда прямая ℓ_2 коллинеарна главному вектору (A, B, C) плоскости σ. Отсюда

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{|qA + rB + sC|}{\sqrt{q^2 + r^2 + s^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Модуль в числителе появился из-за того, что угол между прямой и плоскостью не больше 90^o, откуда $\sin\alpha = \cos\beta \geq 0$, а скалярное произведение векторов (q, r, s) и (A, B, C) может быть и отрицательным.