Тема I: Векторная алгебра

3. Смешанное умножение векторов Координаты точки

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Всё смешалось в доме Облонских

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.
Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!
Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c}$.

- Как и в случае скалярного произведения, результатом смешанного произведения является число.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

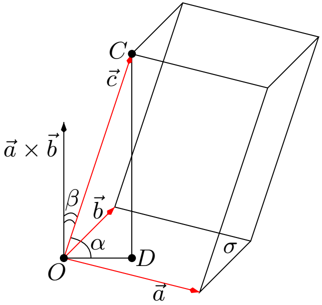
Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Это означает, что $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$. Но вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости σ, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку $\vec{c}$ ортогонален этому вектору, то он лежит в σ. А это означает, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. $\square$

Теорема (геометрический смысл смешанного произведения)

Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — три некомпланарных вектора. Предположим сначала, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок на следующем слайде.



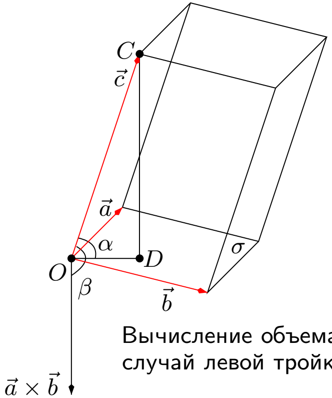
Вычисление объема параллелепипеда, случай правой тройки

Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки O. Пусть точка C такова, что $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, а D — проекция точки C на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которую мы обозначим через σ. Угол между вектором $\vec{c}$ и плоскостью σ обозначим через α, а угол между векторами $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ — через β. Учитывая, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ и потому $\sin\alpha=\cos\beta$, и используя геометрический смысл векторного произведения, имеем

$$V=S_{\text{осн}}\cdot h=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|CD|=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\,\vec{c}\,|\cdot\sin\alpha=$$

$$=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\,\vec{c}\,|\cdot\cos\beta=(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Пусть теперь тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. Тогда $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ (см. рисунок), откуда $\sin\alpha = -\cos\beta$.



Вычисление объема параллелепипеда, случай левой тройки

Имеем

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot |CD| = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot |\,\vec{c}\,| \cdot \sin\alpha =$$
$$= -|\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot |\,\vec{c}\,| \cdot \cos\beta = -(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения (4)

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. В любом случае $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. □

Из доказательства теоремы вытекает важное следствие:

Замечание об ориентации тройки векторов

Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.

Именно поэтому правая тройка векторов называется положительно ориентированной, а левая – отрицательно ориентированной.

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2) $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу*);
5) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по третьему аргументу*).

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.
Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.
Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. $\square$

Заметим, что из равенства $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ вытекает своего рода «ассоциативность»:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Действительно, левая часть по определению равна $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а так как скалярное произведение коммутативно, правая часть есть $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.
Итак, в выражении $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ на самом деле не важно, какие из векторов перемножаются векторно, а какие скалярно. Это оправдывает симметрию в обозначении для смешанного произведения.

Доказательство свойства 2). Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{c}) = t\big((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}\big) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Используя это равенство и свойство 1) смешанного умножения, имеем

$$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t \cdot \vec{b}\vec{c}\vec{a} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Равенство $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ проверяется аналогично предыдущему. $\square$

Доказательство свойств 3)–5) смешанного умножения

Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{b}\vec{d}.$$

Свойство 5) доказано. $\square$

Используя свойства 1) и 5) смешанного умножения, имеем

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\vec{d}\vec{a}+\vec{c}\vec{d}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Свойство 3) доказано. Свойство 4) доказывается аналогично. $\square$

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения – доказательство

Свойство из заголовка слайда было сформулировано на прошлой лекции, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то $(t\vec{a}\,)\times\vec{b}=\vec{a}\times(t\vec{b}\,)=t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)$.

Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 2) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\big((t\vec{a}\,)\times\vec{b}\,\big)\vec{x}=(t\vec{a}\,)\vec{b}\vec{x}=t\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{x}=t\cdot\big((\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\vec{x}\,\big)=\big(t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\big)\vec{x}.$$

Таким образом, $\big((t\vec{a}\,)\times\vec{b}\,\big)\vec{x}=\big(t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\big)\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. В силу ослабленного закона сокращения для скалярного умножения имеем $(t\vec{a}\,)\times\vec{b}=t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)$. Аналогично проверяется, что $\vec{a}\times(t\vec{b}\,)=t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)$. Итак, скаляры можно выносить за знак векторного произведения. $\square$

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения – доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано на прошлой лекции, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.
Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x}=\vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x}=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.$$

Таким образом, $\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного умножения, имеем $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Итак, векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. $\square$

Здесь проверена дистрибутивность по первому аргументу. Мы отмечали, что дистрибутивность по второму аргументу следует из дистрибутивности по первому аргументу и антикоммутативности. Легко понять, что можно и дистрибутивность по второму аргументу доказывать с помощью того же приема, не задействуя антикоммутативность.

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора. По определению векторного произведения векторный квадрат любого вектора равен $\vec{0}$, откуда

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

Но первое и последнее слагаемое равны $\vec{0}$, откуда $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}=\vec{0}$, т.е. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны, равно нулю. Используя этот факт и свойства смешанного умножения, получаем

$$\begin{aligned}\vec{x}\vec{y}\vec{z} &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) = \\ &= (x_1y_2z_3)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 + \\ &+ (x_2y_3z_1)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1.\end{aligned}$$

Используя свойство 1) смешанного умножения, последнее выражение можно переписать в виде

$$(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как определитель 3-го порядка, в котором по строкам записаны координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Следовательно,

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

В качестве следствия получаем

Замечание о координатах компланарных векторов

Пусть (x_1, x_2, x_3), $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ *и* (z_1, z_2, z_3) *— координаты векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *соответственно в некотором базисе* $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. *Вектора* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Из определения базиса и критерия компланарности векторов вытекает, что $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$. Формула $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$ влечет, что $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$. Остается сослаться на критерий компланарности. $\square$

Вычисление смешанного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный, то $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$, и потому

$$\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\vec{b}_3 = \vec{b}_3\vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Поэтому в данном случае формула $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$ принимает совсем простой вид:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения

Пусть (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе.
Используя смешанное произведение, можно

1) вычислить объем V параллелепипеда, построенного на $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$:

$$V = \text{abs} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

2) определить ориентацию тройки векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ положительно (отрицательно) ориентирована тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0$ (соответственно $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0$).

Заключаем, что геометрический смысл определителя 3-го порядка – *ориентированный объем* параллелепипеда.

Понятие системы координат

В школьном курсе сначала вводятся координаты точки, а затем с их помощью определяются координаты вектора. У нас координаты вектора появились в первой лекции; теперь на их основе определим координаты точки.

Определения

Системой координат в пространстве [*на плоскости*] называется совокупность базиса пространства [соответственно базиса плоскости] и точки [принадлежащей этой плоскости]. Точка называется *началом координат*. Систему координат, состоящую из базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и начала координат O, будем обозначать через $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$; в случае плоскости используется обозначение $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Прямые, проходящие через точку O параллельно одному из базисных векторов, называются *осями координат*. Прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_1$, называют *осью абсцисс*, прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_2$, – *осью ординат*, а прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_3$, – *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через точку O и две из трех осей координат, называются *координатными плоскостями*.

Определение

Зафиксируем в пространстве некоторую систему координат $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе координат $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называются координаты ее радиус-вектора в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. То, что точка M в некоторой системе координат имеет координаты (a_1, a_2, a_3), обозначают так: $M(a_1, a_2, a_3)$. Координаты точки на плоскости определяются аналогично координатам точки в пространстве.

Пусть точки A и B имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, а координаты точек A и B совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно, получаем, что

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Иными словами,

- *чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Определение

Система координат в пространстве $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный. Система координат на плоскости $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ – ортонормированный.

- Именно в прямоугольной декартовой системе координат многие формулы и уравнения принимают наиболее простой и удобный для применения вид.

В прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, ординат и аппликат принято обозначать через Ox, Oy и Oz соответственно. В этом случае в понятном смысле используются также обозначения Oxy, Oxz и Oyz для координатных плоскостей, а вся система координат обозначается через $Oxyz$ (в случае пространства) или Oxy (в случае плоскости).

Пусть точки A и B в прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая формулу для координат вектора из данного параграфа и формулу для длины вектора из § 2, получаем, что расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

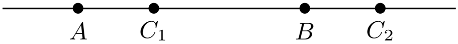
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Определение

Пусть даны различные точки A и B и число t. Будем говорить, что *точка C делит отрезок AB в отношении t*, если

$$\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Например, если C – середина отрезка AB, то она делит его в отношении 1 (так как в этом случае $\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \overrightarrow{CB}$), точка A делит его в отношении 0 (так как $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$), а точка B не делит его ни в каком отношении (так как $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ и не существует такого числа t, что $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{BB}$).
На рисунке точка C_1 делит отрезок AB в отношении $\frac{1}{2}$, а точка C_2 – в отношении -4.



Деление отрезка в данном отношении

- Как видно из последнего примера, точка, делящая отрезок в некотором отношении, не обязана принадлежать этому отрезку.

При $t = -1$ равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ невозможно, поскольку тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ в противоречии с тем, что точки A и B различны. Пусть $t \neq -1$. Предположим, что точка C, делящая отрезок AB в отношении t, существует. Выведем формулы для нахождения ее координат, если известны координаты $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ и число t. Обозначим координаты точки C через (c_1, c_2, c_3). Расписывая равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ в координатах, имеем

$$\begin{cases} c_1 - a_1 = t(b_1 - c_1), \\ c_2 - a_2 = t(b_2 - c_2), \\ c_3 - a_3 = t(b_3 - c_3). \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \dfrac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \dfrac{a_3 + tb_3}{1+t}. \end{cases} \qquad (*)$$

Это – *формулы деления отрезка в отношении* t.

Равенства $(*)$ показывают, что если точка C существует, то она единственна. Прямой подстановкой проверяется, что точка C, координаты которой задаются равенствами $(*)$, удовлетворяет равенству $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$. Вывод: точка C, делящая отрезок AB в отношении t, существует тогда и только тогда, когда $t \neq -1$, причем при выполнении этого условия она единственна.

Посмотрим, где эта точка может располагаться. В силу равенства $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Это означает, что точка C должна лежать на прямой AB. Как отмечалось выше, она не может совпадать с точкой B. Пусть теперь C – произвольная точка прямой AB, отличная от B. Тогда вектора $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны и $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$. В силу критерия коллинеарности векторов существует такое число t, что выполнено равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$.
Итак,

- *точка C делит отрезок AB в некотором отношении тогда и только тогда, когда она принадлежит прямой AB и отлична от точки B. При этом, если C принадлежит отрезку AB, то $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{CB}$, и потому $t \geqslant 0$, а в противном случае $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, и потому $t < 0$.*

Координаты середины отрезка

Отметим один важный частный случай. Пусть C – середина отрезка AB. Как уже отмечалось, середина отрезка делит его в отношении 1. Подставляя $t = 1$ в формулы

$$\begin{cases} c_1 &= \dfrac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 &= \dfrac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 &= \dfrac{a_3 + tb_3}{1+t}, \end{cases} \qquad (*)$$

получаем координаты точки C:

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

Иными словами,

- *координаты середины отрезка суть полусуммы соответствующих координат его начала и конца.*