Тема I: Векторная алгебра

2. Скалярное и векторное умножение векторов

М.В.Волков

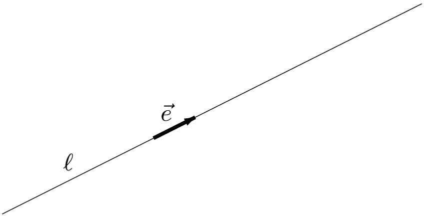
Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2024/2025 учебный год

Неформально, ось — это направленная прямая.

Определение

Прямая называется *осью*, если на ней зафиксирован ненулевой вектор, называемый *направляющим вектором* этой оси.



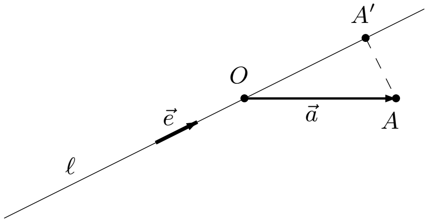
Ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$

Зафиксируем некоторую ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$.

Пусть $\vec{a}$ – вектор. Его *проекцией на ось ℓ* называется число, обозначаемое пр$_{\vec{e}}\,\vec{a}$ и определяемое следующим образом.

Если $\vec{a} \perp \ell$, то пр$_{\vec{e}}\,\vec{a} := 0$.

Если $\vec{a} \not\perp \ell$, отложим вектор $\vec{a}$ от какой-нибудь точки O прямой ℓ.



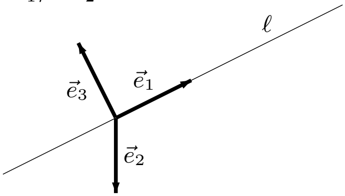
Пусть A' – основание перпендикуляра, опущенного из точки A (конца вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$) на прямую ℓ. Тогда пр$_{\vec{e}}\,\vec{a} := \begin{cases} |OA'|, & \text{если } \overrightarrow{OA'} \upuparrows \vec{e}, \\ -|OA'|, & \text{если } \overrightarrow{OA'} \uparrow\downarrow \vec{e}. \end{cases}$

Свойства проекций

Если ℓ – ось с направляющим вектором $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то:

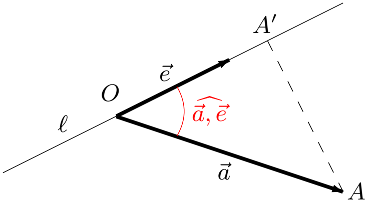
1) $\text{пр}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}$;
2) $\text{пр}_{\vec{e}}(t\vec{a}) = t\,\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$.

Проще всего доказать эти свойства, если ввести базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, в котором $\vec{e}_1$ – орт вектора $\vec{e}$, $\vec{e}_2$ – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный $\vec{e}_1$, а $\vec{e}_3$ – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный и $\vec{e}_1$, и $\vec{e}_2$.



Тогда $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$ есть не что иное, как первая координата вектора $\vec{a}$ в этом базисе, и свойства 1)–2) следуют из соответствующих свойств координат.

Угол между осью ℓ и вектором $\vec{a}$ – это угол между направляющим вектором оси и $\vec{a}$.



Тогда легко проверить, что $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$.

Действительно, если $\vec{a} \perp \ell$, то $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} = 0$, но и $|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}}) = 0$.

Если $\vec{a} \not\perp \ell$, то $|OA'|$, т.е. модуль проекции, — длина катета прямоугольного треугольника OAA', длина гипотенузы которого есть $|\vec{a}|$, а знак проекции плюс, если $\widehat{\vec{a},\vec{e}}$ острый, и минус, если $\widehat{\vec{a},\vec{e}}$ тупой, т.е. совпадает со знаком $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$.

Определение

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$.

- Скалярное произведение не является операцией на множестве всех векторов в смысле определения операции из курса «Введение в математику», так как результатом является не вектор, а число.

Альтернативные обозначения $(\vec{a}, \vec{b})$; $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ (*обозначение Дирака*)

В силу определения, если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые, то

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|}.$$

Связь скалярного произведения и проекций

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\,\vec{a}\,| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\,\vec{b}\,| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a}.$$

Определение

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^{\,2}$.

Поскольку $(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = 0$, а $\cos 0 = 1$, имеем

$$\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2.$$

Иными словами,

- *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.
Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Критерий ортогональности векторов

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению. Если же $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то из ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вытекает, что $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$, и потому $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Но тогда вновь $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению.

Достаточность. Если $\vec{a}\vec{b} = 0$, то либо $|\vec{a}| = 0$ (т. е. $\vec{a} = \vec{0}$), либо $|\vec{b}| = 0$ (т. е. $\vec{b} = \vec{0}$), либо $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Во всех трех случаях $\vec{a} \perp \vec{b}$. $\square$

Критерий ортогональности векторов можно рассматривать как часть следующего более общего наблюдения.

Замечание об острых и тупых углах

Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) *острый тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} > 0$;*

б) *прямой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$;*

в) *тупой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} < 0$.*

Доказательство. Пункт б) — это не что иное, как критерий ортогональности векторов.
Чтобы доказать пп. а) и в), заметим, что в силу формулы $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ знак косинуса угла между ненулевыми векторами совпадает со знаком их скалярного произведения. Остается учесть, что косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла отрицателен. $\square$

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (*скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов*);
3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$;
4) $\vec{a}\vec{a} \geqslant 0$, *причем* $\vec{a}\vec{a} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$.

Свойство 1) очевидно, а свойство 4) следует из равенства $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Равенство $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ очевидно, если $\vec{c} = \vec{0}$. Если же $\vec{c} \neq \vec{0}$, то можно применить свойство проекций:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}| \cdot \left(\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\right) = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

Свойство 3) проверяется аналогично.

Если x, y и z — такие числа, что $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства $xz = yz$ справа на z^{-1}). Это свойство называется *законом сокращения*.

На множестве всех векторов закон сокращения места не имеет: существуют вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ и $\vec{c} \neq \vec{0}$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Действительно, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два различных вектора, а $\vec{c}$ — вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В силу критерия ортогональности векторов $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$. Но $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Тем не менее, имеет место следующее свойство скалярного произведения.

Ослабленный закон сокращения для скалярного произведения

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что для любого вектора $\vec{x}$ выполняется равенство $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ для любого $\vec{x}$. Тогда $(\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$. Поскольку вектор $\vec{x}$ может быть любым, возьмем в качестве $\vec{x}$ вектор $\vec{a} - \vec{b}$. Получим равенство $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. По свойству 4) скалярного произведения отсюда следует, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$, т. е. $\vec{a} = \vec{b}$. $\square$

Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $(\,\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\,)$ координаты (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) соответственно. Используя свойства скалярного произведения, получаем, что

$$\begin{aligned}
\vec{a}\vec{b} &= (t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3)(s_1\vec{c}_1 + s_2\vec{c}_2 + s_3\vec{c}_3) = \\
&= (t_1s_1)\vec{c}_1\vec{c}_1 + (t_1s_2)\vec{c}_1\vec{c}_2 + (t_1s_3)\vec{c}_1\vec{c}_3 + \\
&+ (t_2s_1)\vec{c}_2\vec{c}_1 + (t_2s_2)\vec{c}_2\vec{c}_2 + (t_2s_3)\vec{c}_2\vec{c}_3 + \\
&+ (t_3s_1)\vec{c}_3\vec{c}_1 + (t_3s_2)\vec{c}_3\vec{c}_2 + (t_3s_3)\vec{c}_3\vec{c}_3.
\end{aligned}$$

Это выражение можно несколько упростить, воспользовавшись коммутативностью скалярного произведения, но оно все равно останется громоздким и, главное, все равно не позволит вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ без дополнительной информации о скалярных произведениях базисных векторов.

Вычисление скалярного произведения в координатах (2)

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

Поэтому формула из предыдущего слайда принимает вид

$$\vec{a}\vec{b} = t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3.$$

Иными словами,

- *в случае ортонормированного базиса скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

В частности,

$$\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2.$$

Пусть (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в некотором ортонормированном базисе. Пользуясь скалярным произведением, можно

1) вычислить длину вектора:

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2};$$

2) вычислить косинус угла между ненулевыми векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$$

в силу формулы $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|}$;

3) определить, будет ли угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острым, прямым или тупым: в силу замечания об острых и тупых углах этот угол
   - острый тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 > 0$;
   - прямой тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 = 0$;
   - тупой тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 < 0$.

Вычисление скалярного произведения в координатах (на плоскости)

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) к векторам плоскости. В частности, если вектора плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированном базисе этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

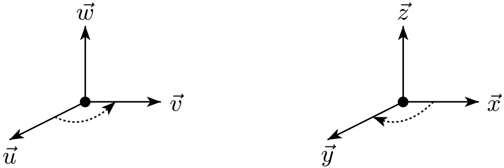
- $\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2$;
- $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$;
- $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$;
- $\vec{a} \perp \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 = 0$.

Определение

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ называется *правой*, если из конца вектора $\vec{w}$ поворот от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и *левой* – в противном случае. Правую тройку векторов называют также *положительно ориентированной*, а левую – *отрицательно ориентированной*.

- Термины «правая» и «левая» для троек векторов имеют «антропное» происхождение: если смотреть с конца большого пальца на поворот от указательного пальца к среднему, то на правой руке этот поворот будет происходить против часовой стрелки, а на левой – по часовой стрелке.

На рисунке тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ является правой, а тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – левой (имеется в виду, что вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{x}$, $\vec{y}$ расположены в горизонтальной плоскости, а вектора $\vec{w}$ и $\vec{z}$ направлены вверх).



Правая (слева) и левая (справа) тройки векторов

Несложно убедиться в том, что *перестановка двух соседних векторов в тройке меняет ее ориентацию на противоположную, а циклическая перестановка не меняет*. (*Циклическая перестановка* — это переход от тройки $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ к тройке $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ или к тройке $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$.)

Определение

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

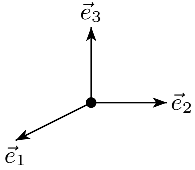
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, т.е. длина векторного произведения неколлинеарных векторов равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах,
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
3) тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нулевому вектору. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Пункт 2) из определения векторного произведения определяет прямую, вдоль которой направлен вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (это прямая, перпендикулярная к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$), но не указывает, в какую сторону вдоль этой прямой направлен этот вектор. Для того, чтобы однозначно указать направление вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, и нужен пункт 3) определения.

Пример: векторные произведения векторов правого ортонормированного базиса

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – *правый ортонормированный базис пространства*, т.е. ортонормированный базис, являющийся правой тройкой векторов:



Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1.$$

Первое равенство вытекает из того, что $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$, тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – правая и

$$|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{e}_3|.$$

Два других равенства проверяются аналогично, надо только учесть, что тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)$ – левая, а тройка $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ – правая.

Свойства векторного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (*антикоммутативность*);
2) $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу*).

- Из свойств сложения и векторного умножения векторов видно, что множество всех векторов с этими двумя операциями является кольцом. Это кольцо некоммутативно и неассоциативно. (Оно принадлежит классу так называемых *колец Ли*). Это единственный пример неассоциативного кольца, возникающий в нашем курсе.

Свойства 1) и 4) будут доказаны на следующем слайде, а свойства 2) и 3) — в следующем разделе.

Свойства векторного умножения (доказательство)

Доказательство свойства 1). Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Поскольку $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$, имеем

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = |\vec{b} \times \vec{a}|.$$

Как $\vec{a} \times \vec{b}$, так и $\vec{b} \times \vec{a}$ ортогональны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{b} \times \vec{a}$. Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ правая (по определению векторного произведения), а потому тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}))$ левая (перестановка соседних векторов меняет ориентацию тройки). Поскольку тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a})$ – правая, видим, что $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b} \times \vec{a}$. Итак, $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ – обратно коллинеарные вектора одинаковой длины, т.е. противоположные вектора. □

Свойство 4) следует из свойств 1) и 3). В самом деле,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = -(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = -(\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}) = -(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

□

Вычисление векторного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – некоторый базис, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно. Применяя свойства 2)–4) векторного умножения, имеем

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = \\ = (x_1y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + (x_1y_2) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \\ + (x_2y_1) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + (x_2y_2) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + (x_2y_3) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + \\ + (x_3y_1) \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + (x_3y_2) \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + (x_3y_3) \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Используя антикоммутативность векторного умножения, можно переписать это равенство в виде

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3 - x_3y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + (x_2y_3 - x_3y_2) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3.$$

Как и в случае со скалярным произведением, эта формула не позволяет вычислить векторное произведение без знания «таблицы умножения» базисных векторов.

Вычисление векторного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Предположим теперь, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – правый ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

и формула

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3 - x_3y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + (x_2y_3 - x_3y_2) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3.$$

приобретает вид

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3.$$

Правую часть этого равенства удобно представлять как результат разложения по первой строке символического определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

С учетом этой договоренности имеем

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Приложения векторного произведения

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный базис, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно. Используя векторное произведение, можно вычислить площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$S = \sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2};$$

Пусть даны координаты (x_1, x_2) и (y_1, y_2) неколлинеарных векторов $\vec{x}$ и соответственно $\vec{y}$ в ортонормированном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ той плоскости, где лежат $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Возьмем $\vec{e}_3 := \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$; тогда $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – правый ортонормированный базис пространства, в котором вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют координаты $(x_1, x_2, 0)$ и $(y_1, y_2, 0)$ соответственно. Подставляя эти координаты в формулу для S, получаем

$$S = \sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} = \text{abs}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

(символом abs мы обозначили абсолютную величину определителя). Заключаем, что геометрический смысл определителя 2-го порядка – *ориентированная площадь* параллелограмма.