Классификация квадрик в пространстве

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Ранее был доказан следующий факт:

Теорема (классификация квадрик на плоскости)

Уравнение второй степени от двух переменных задает одну из 9 квадрик:
– эллипс,
– гипербола,
– парабола,
– мнимый эллипс,
– пара пересекающихся прямых,
– пара мнимых пересекающихся прямых,
– пара параллельных прямых,
– пара мнимых параллельных прямых,
– пара совпадающих прямых.

Пространственные квадрики

Теперь рассмотрим уравнение второй степени от трех переменных:

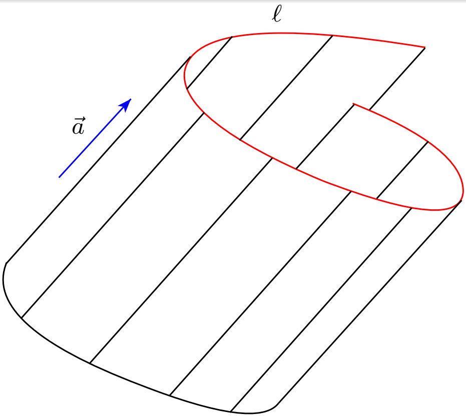
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0. \qquad (**)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек пространства, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида $(**)$, называется *пространственной квадрикой*.

Прежде чем приступать к общей задаче классификации пространственных квадрик, обсудим одну специальную ситуацию.

Определение

Пусть в пространстве заданы кривая ℓ и ненулевой вектор $\vec{a}$. Поверхность, образованная прямыми, проходящими через всевозможные точки кривой ℓ и коллинеарными вектору $\vec{a}$, называется *цилиндрической*. Кривая ℓ называется *направляющей*, а прямые — *образующими* этой поверхности.



Уравнение цилиндрической поверхности

Напомним, как устроено уравнение цилиндрической поверхности.

Теорема (о цилиндрической поверхности)

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Возвращаясь к задаче классификации пространственных квадрик, видим, что каждое уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad (*)$$

в пространстве задает цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит плоская квадрика, задаваемая $(*)$. Таким образом, каждой из 9 плоских квадрик отвечает цилиндрическая квадрика в пространстве.

Плоская квадрика $\longmapsto$ Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс $\longmapsto$ Эллиптический цилиндр

Гипербола $\longmapsto$ Гиперболический цилиндр

Парабола $\longmapsto$ Параболический цилиндр

Мнимый эллипс $\longmapsto$ Мнимый эллиптический цилиндр

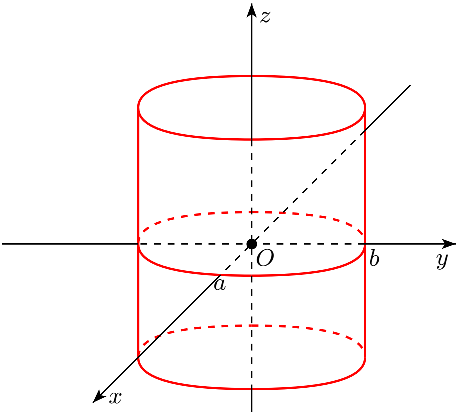
Пара пересекающихся прямых $\longmapsto$ Пара пересекающихся плоскостей

Пара мнимых пересекающихся прямых $\longmapsto$ Пара мнимых пересекающихся плоскостей

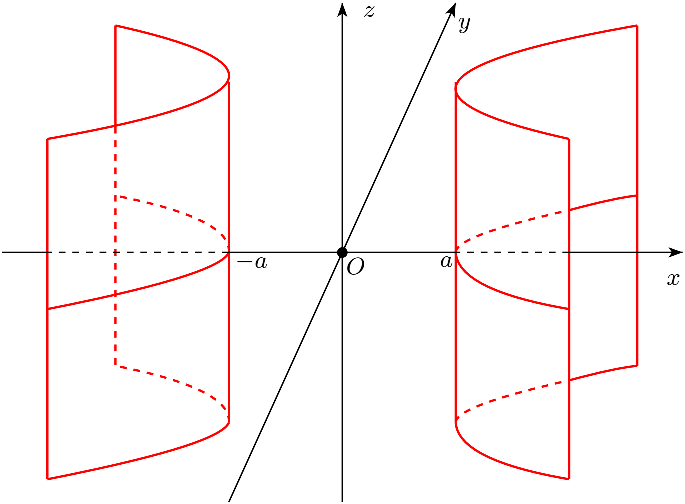
Пара параллельных прямых $\longmapsto$ Пара параллельных плоскостей

Пара мнимых параллельных прямых $\longmapsto$ Пара мнимых параллельных плоскостей

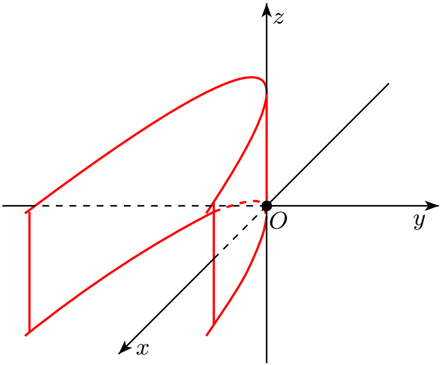
Пара совпадающих прямых $\longmapsto$ Пара совпадающих плоскостей



Эллиптический цилиндр



Гиперболический цилиндр



Параболический цилиндр

План исследования уравнения 2-й степени от трех переменных

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0. \qquad (**)$$

1. Приведем квадратичную форму

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.
2. Избавимся от трех из четырех остальных слагаемых с помощью еще одного ортогонального преобразования или переноса начала координат.
3. Исследуем упрощенное уравнение методом сечения.

Пространственная квадрика *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ не равны 0.

Квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Соответственно, уравнение $(**)$ преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + 2a_3' z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \dfrac{a_1'}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \dfrac{a_2'}{\lambda_2}$, $z' = z'' - \dfrac{a_2'}{\lambda_3}$, избавимся от линейных членов. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a_0' = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0.$$

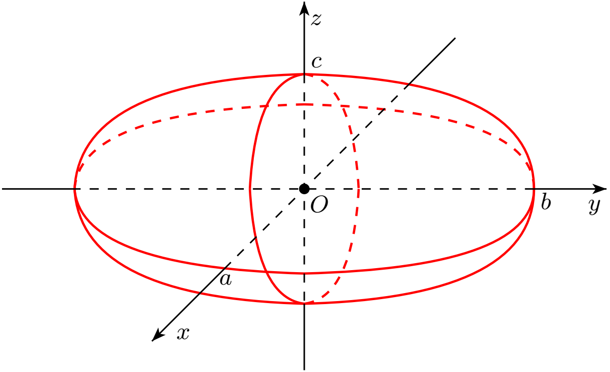
Подслучай 1: $D \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-D/A} + \frac{y''^2}{-D/B} + \frac{z''^2}{-D/C} = 1. \tag{3}$$

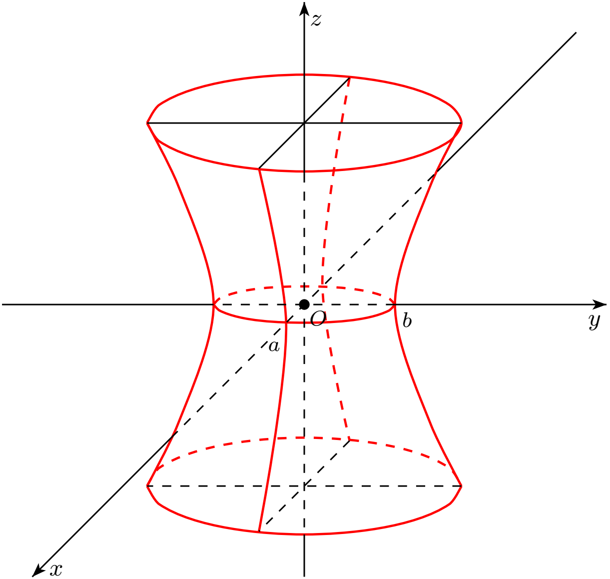
Возможны четыре варианта.

а) Числа $-\dfrac{D}{A}$, $-\dfrac{D}{B}$ и $-\dfrac{D}{C}$ положительны. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *эллипсоидом*.

б) Среди чисел $-\dfrac{D}{A}$, $-\dfrac{D}{B}$ и $-\dfrac{D}{C}$ два положительны и одно отрицательно. Без ограничения общности можно считать, что $-\dfrac{D}{A}, -\dfrac{D}{B} > 0$ и $-\dfrac{D}{C} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{\frac{D}{C}}$, получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *однополостным гиперболоидом*.



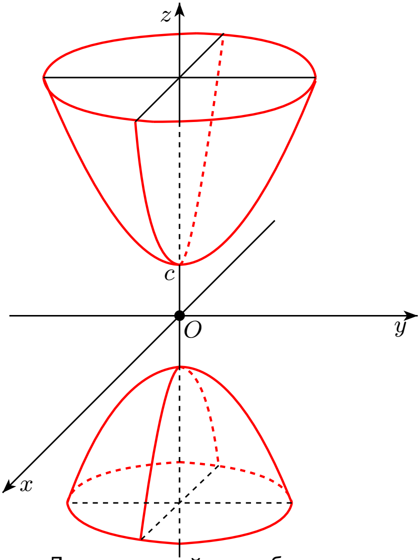
Эллипсоид



Однополостный гиперболоид

в) Среди чисел $-\dfrac{D}{A}$, $-\dfrac{D}{B}$ и $-\dfrac{D}{C}$ одно положительно и два отрицательны. Можно считать, что первые два отрицательны, а третье положительно. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, получим уравнение $-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, что равносильно $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = -1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *двуполостным гиперболоидом*.

г) Числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ отрицательны. Тогда уравнение (3) не имеет решений и его геометрическим образом является пустое множество. Соответствующая квадрика называется *мнимым эллипсоидом*.



Двуполостный гиперболоид

Случай центральной квадрики, подслучай 2

Подслучай 2: $D = 0$. Тогда уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ имеет вид

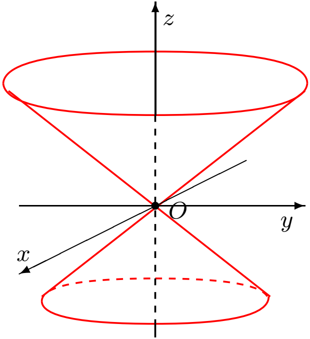
$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 0. \qquad (4)$$

Возможны два варианта.

а) Числа A, B и C имеют один и тот же знак. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 0$ и его геометрическим образом является точка. Соответствующая квадрика называется *мнимым конусом*.

б) Числа A, B и C имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, уравнение (4) на -1, можно добиться того, чтобы среди этих чисел было два положительных и одно отрицательное. Можно считать, что $A, B > 0$ и $C < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{1}{C}}$, мы получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 0$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *конусом*.

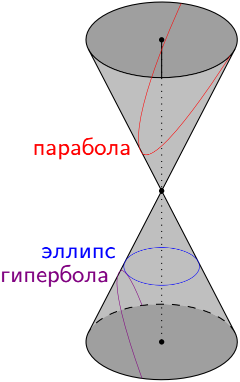
Конус (рисунок)



Конус

Конические сечения (рисунок)

Несложно доказать, что сечение конуса плоскостью может при разных расположениях плоскости оказаться и эллипсом, и гиперболой, и параболой. Поэтому у этих трех кривых есть собирательное имя – конические сечения.



Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1. Если ранг равен 2, среди собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ два ненулевых, а одно нулевое. Если λ_1, λ_2 – ненулевые собственные значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Соответственно, уравнение $(**)$ преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \dfrac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \dfrac{a'_2}{\lambda_2}$, избавимся от членов, содержащих x' и y' в первой степени. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a'_3 z'' + a'_0 = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Ax''^2 + By''^2 + 2Cz'' + D = 0.$$

.

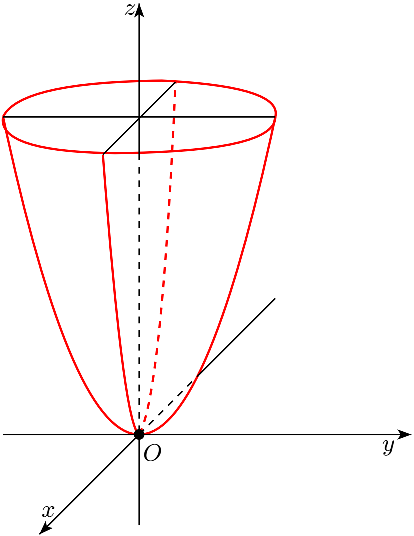
Если $C=0$, уравнение $Ax''^2+By''^2+2Cz''+D=0$ сводится к $Ax''^2+By''^2+D=0$, т.е. задает некоторую цилиндрическую квадрику. Поэтому считаем, что $C\neq 0$, а тогда замена $x''=x'''$, $y''=y'''$, $z''=z'''-\frac{D}{2C}$ избавляет от свободного члена и приводит уравнение к виду

$$Ax'''^2+By'''^2+2Cz'''=0.$$

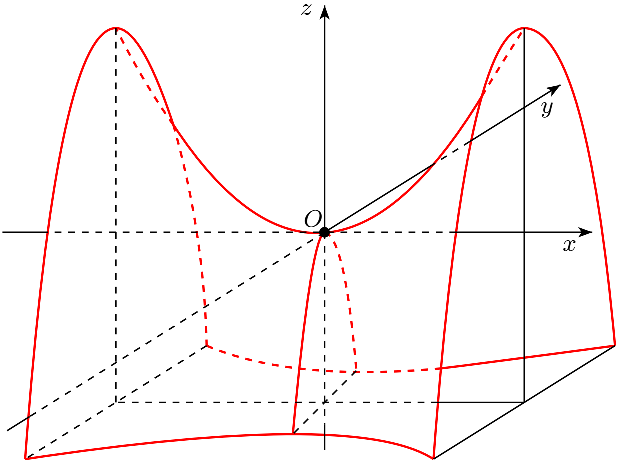
Возможны два варианта.

а) Числа $-\dfrac{C}{A}$ и $-\dfrac{C}{B}$ имеют одинаковый знак. Можно считать, что они положительны. Введя обозначения $a=\sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b=\sqrt{-\frac{C}{B}}$, получим уравнение $\frac{x'''^2}{a^2}+\frac{y'''^2}{b^2}=2z'''$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *эллиптическим параболоидом*.

б) Числа $-\dfrac{C}{A}$ и $-\dfrac{C}{B}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\dfrac{C}{A}>0$ и $-\dfrac{C}{B}<0$. Введя обозначения $a=\sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b=\sqrt{\frac{C}{B}}$, получим уравнение $\frac{x'''^2}{a^2}-\frac{y'''^2}{b^2}=2z'''$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *гиперболическим параболоидом*.



Эллиптический параболоид



Гиперболический параболоид

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 1, то одно из ее собственных значений ненулевое, а два равны 0. Если λ – ненулевое собственное значение, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda x'^2$. Соответственно, уравнение $(**)$ преобразуется к виду

$$\lambda x'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + 2a_3'z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \dfrac{a_1'}{\lambda_1}$, избавимся от x' в первой степени. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda x''^2 + 2a_2'y'' + 2a_3'z'' + a_0' = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0.$$

.

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ задает некоторую цилиндрическую квадрику. Если же $C \neq 0$, выполним ортогональное преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} & -\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} \end{pmatrix}$. Подсчитаем, во что перейдет линейная форма $By'' + Cz''$ при таком преобразовании:

$$By'' + Cz'' = B\left(\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}y''' - \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}z'''\right) + \\ + C\left(\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}y''' + \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}z'''\right) = \sqrt{B^2+C^2}y'''.$$

Видим, что уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ преобразуется в $Ax'''^2 + \sqrt{B^2+C^2}y''' + D = 0$. Значит, и при $C \neq 0$ оно задает некоторую цилиндрическую квадрику.

Мы доказали следующий факт:

Теорема (классификация квадрик в пространстве)

Уравнение второй степени от трех переменных задает одну из 17 квадрик:
– одну из 9 цилиндрических квадрик
– эллипсоид,
– мнимый эллипсоид,
– однополостный гиперболоид,
– двуполостный гиперболоид,
– конус,
– мнимый конус,
– эллиптический параболоид,
– гиперболический параболоид.