Квадратичные формы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Формой над полем F называется многочлен из $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, в котором все одночлены имеют одну и ту же ненулевую степень (*степень формы*).

Формы 1-й степени, т.е. многочлены вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные, называются *линейными*.

Формы 2-й степени называются *квадратичными*. При рассмотрении квадратичных форм считаем, что характеристика поля F отлична от 2.

Квадратичную форму принято записывать в виде

$$
\begin{array}{rcccccccc}
q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 & + & a_{22}x_2^2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2 & + \\
+ & 2a_{12}x_1x_2 & + & 2a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1n}x_1x_n & + \\
 & & + & 2a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2n}x_2x_n & + \\
 & & & & + & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & + \\
 & & & & & & + & 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n & ,
\end{array}
$$

где $a_{ij} \in F$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \leqslant j$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные.

Компактная запись: $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$; при этом считают, что $a_{ij} = a_{ji}$. Симметрическая матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется *матрицей* формы $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Положив $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$, можно записать $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^TAX$ – *матричная запись* формы.

Зачем нужны квадратичные формы?

Любую достаточно гладкую функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в окрестности любой точки $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ можно разложить по формуле Тейлора.
А именно, если $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ – точка из окрестности точки $\mathbf{x}_0$ и $\Delta x_i := x_i^1 - x_i^0$ для $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\,\Delta x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\,\Delta x_i \Delta x_j + \dots,$$

где многоточие заменяет члены более высокого порядка малости.
В «обычных» точках приращение функции $\Delta f := f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)$ определяется в первом приближении *линейной формой* $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\,\Delta x_i$ от приращений аргументов (*первый дифференциал*).
В «интересных» точках, где все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ равны 0, приращение Δf определяется в первом приближении *квадратичной формой* $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\,\Delta x_i \Delta x_j$ (*второй дифференциал*).
Такая точка будет точкой *минимума*, если второй дифференциал > 0 для всех ненулевых $\Delta\mathbf{x} := (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$; будет точкой *максимума*, если второй дифференциал < 0 для всех ненулевых $\Delta\mathbf{x}$; не будет точкой экстремума, если второй дифференциал > 0 при некотором $\Delta\mathbf{x}$ и < 0 при некотором другом $\Delta\mathbf{x}$ (*седловая точка*).

Определение

Квадратичная форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$, значение которой на любом ненулевом наборе значений переменных положительно, называется *положительно определенной*.

Итак, запрос анализа состоит в следующем: как по данной форме над $\mathbb{R}$ узнать, является ли она положительно определенной?

Запрос геометрии выглядит иначе. Мы обсуждали геометрические объекты, задаваемые на плоскости или в трехмерном пространстве уравнениями первой степени, – это соответственно прямые и плоскости. А какие объекты задаются уравнениями второй степени, скажем, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$? Для того, чтобы разобраться, что задает такое уравнение, надо его упростить. Возникает вопрос: как упростить квадратичную форму $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ из левой части?

Мы дадим ответы на поставленные вопросы.

Определение

Система равенств вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & b_{11}y_1 & + & b_{12}y_2 & + & \cdots & + & b_{1n}y_n, \\ x_2 & = & b_{21}y_1 & + & b_{22}y_2 & + & \cdots & + & b_{2n}y_n, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ x_n & = & b_{n1}y_1 & + & b_{n2}y_2 & + & \cdots & + & b_{nn}y_n, \end{array}\right. \qquad (*)$$

где b_{ij} – скаляры, называется *линейной заменой переменных*. Замена называется *невырожденной*, если ее матрица $B = (b_{ij})$ невырождена.

Замену $(*)$ можно записать в виде $X = BY$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Замена переменных $Y = B^{-1}X$ называется *обратной к замене* $X = BY$.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичная форма имеет *канонический вид*, если матрица этой формы диагональна. Иными словами, форма имеет канонический вид, если в ней все коэффициенты при произведениях различных переменных равны 0.

Теорема (о приведении квадратичной формы к каноническому виду)

Из любой квадратичной формы можно с помощью невырожденной линейной замены переменных получить квадратичную форму, имеющую канонический вид.

Мы приведем два доказательства этого факта. Оба они конструктивны, т.е. дают алгоритмы приведения формы к каноническому виду.

Первый алгоритм (*метод Лагранжа*) менее громоздок в реализации и работает над любым полем характеристики, отличной от 2.

Второй алгоритм (*метод приведения формы к главным осям*) применим только к формам над полем $\mathbb{R}$.

Метод Лагранжа. Пусть $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма с матрицей $A = (a_{ij})$. Будем считать, что форма не содержит *фиктивных* переменных, т.е. таких переменных x_i, что $a_{ij} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Приведем форму к виду $b_{11}y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n)$, где $g(y_2, \ldots, y_n)$ – квадратичная форма, зависящая только от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Если $a_{1i} = 0$ для всех $i > 1$, то форма уже имеет такой вид (с $y_i := x_i$). Предположим поэтому, что $a_{1i} \neq 0$ для некоторого $i > 1$. Для простоты обозначений будем считать, что $i = 2$ (в общем случае рассуждения аналогичны). Дальнейшие рассмотрения разбиваются на два случая.

Случай 1: $a_{11} \neq 0$. Обозначим через q' сумму всех слагаемых формы q, не содержащих переменную x_1. Тогда

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + q'(x_2, \ldots, x_n).$$

Сумму слагаемых, содержащих x_1, дополним до полного квадрата:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11} \cdot \left(x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}^2} \right) - \frac{(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + q'(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= a_{11} \cdot \left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \right)^2 + g(x_2, \ldots, x_n),$$

где

$$g(x_2, \ldots, x_n) = q'(x_2, \ldots, x_n) - \frac{(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}.$$

Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot y_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot y_n, \\ x_2 = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_n. \end{cases}$$

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1, т.е. замена невырождена. Ясно, что

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}}, \ y_2 = x_2, \ \dots, \ y_n = x_n.$$

Следовательно, замена приводит форму $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к виду $a_{11}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$.

Случай 2: $a_{11} = 0$. Напомним, что $a_{12} \neq 0$. Если $a_{22} \neq 0$, поменяем ролями x_1 и x_2 и придем к случаю 1. Если и $a_{22} = 0$, выполним замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = y_n. \end{cases}$$

Матрица этой замены имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Ее определитель равен: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 = -2 \neq 0$, т.е. замена невырождена.

Применив ее, получим форму, в которой коэффициент при y_1^2 равен $2a_{12}$, и, в частности, отличен от 0. Это снова сводит ситуацию к случаю 1.

Итак, с помощью невырожденной линейной заменой переменных можно избавиться от слагаемых, содержащих произведения x_1 на другие переменные. Аналогично можно избавиться от слагаемых, содержащих произведения x_2 на другие переменные, и т.д. Через конечное число шагов форма примет канонический вид. □

Приведем к каноническому виду форму

$$f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

$$f = 4\left(x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4\right) + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4 =$$

$$= 4\left[\underbrace{(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4)}_{y_1}{}^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2\right] +$$

$$+ 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4 = 4y_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4 =$$

$$= 4y_1^2 + \left[\underbrace{(x_2 + x_3 + x_4)}_{y_2}{}^2 - (x_3 + x_4)^2\right] - 2x_3x_4 =$$

$$= 4y_1^2 + y_2^2 - x_3^2 - 4x_3x_4 - x_4^2 = 4y_1^2 + y_2^2 - \left[\underbrace{(x_3 + 2x_4)}_{y_3}{}^2 - 4x_4^2\right] - x_4^2 =$$

$$= 4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 3x_4^2 = 4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2.$$

Итак, подстановка

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 &-\frac{1}{2}x_2 &-\frac{1}{2}x_3 &+\frac{1}{2}x_4 \\ y_2 &= & x_2 &+x_3 &+x_4 \\ y_3 &= & & x_3 &+2x_4 \\ y_4 &= & & & x_4 \end{cases}$$

приводит форму

$$f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

к каноническому виду

$$4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2.$$

Прежде чем приводить второе доказательство, сделаем следующее

Замечание (изменение матрицы формы при замене переменных)

Если к квадратичной форме $q = X^T AX$ *применить замену переменных* $X = BY$*, то получится квадратичная форма с матрицей* $B^T AB$*.*

Доказательство. Подставив BY вместо X в форму $X^T AX$, мы получим форму $(BY)^T A(BY) = Y^T (B^T AB)Y$, матрица которой равна $B^T AB$. □

Применив это замечание к формам над $\mathbb{R}$, получим

Следствие (о знаке определителя матрицы формы)

Если форма g *над* $\mathbb{R}$ *получена из формы* q *невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм* q *и* g *либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны* 0.

Доказательство. Если $g = Y^T CY$ получена из $q = X^T AX$ невырожденной линейной заменой переменных $X = BY$, то $C = B^T AB$. Поскольку $|B^T| = |B|$, имеем $|C| = |B^T AB| = |B^T| \cdot |A| \cdot |B| = |A| \cdot |B|^2$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из того, что $|B|^2 > 0$. □

Метод приведения к главным осям. Пусть q – квадратичная форма от n переменных над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим матрицу A формы q как матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в стандартном ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^n$. Матрица A симметрична, поэтому оператор $\mathcal{A}$ самосопряженный, а значит, диагонализируемый. Пусть R – матрица перехода к тому ортонормированному базису пространства $\mathbb{R}^n$, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу D. Тогда $D = R^{-1}AR$. Матрица R ортогональна, поэтому $R^{-1} = R^T$. Сделав в форме $q = X^TAX$ невырожденную линейную замену переменных $X = RY$, получим форму с матрицей $R^TAR = R^{-1}AR = D$. □

Более алгоритмично метод приведения квадратичной формы к главным осям изложен на следующем слайде.

Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям

Дана квадратичная форма $X^T AX$ от n переменных над полем $\mathbb{R}$.

Находим собственные значения, а затем все линейно независимые собственные вектора симметрической матрицы A. Они дают базис в $\mathbb{R}^n$.

Применяя при необходимости процесс ортогонализации Грама–Шмидта, получаем ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A.

Составляем матрицу R, столбцы которой – вектора построенного базиса.

Замена переменных $X = RY$ приводит исходную форму к каноническому виду. Коэффициенты при квадратах новых переменных суть собственные значения матрицы A, каждое из которых встречается столько раз, сколько линейно независимых собственных векторов ему принадлежит.

Сравнение двух способов приведения формы к каноническому виду

Изложение метода приведения к главным осям занимает намного меньше места, чем объяснение метода Лагранжа, но при применении этих методов на практике ситуация прямо противоположна.

Для применения метода Лагранжа надо несколько раз выделить полный квадрат по той или иной переменной, а когда квадратов нет – сделать простую вспомогательную замену. На практике это сводится к несложным арифметическим манипуляциям с многочленами.

Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям предусматривает: 1) вычисление определителя матрицы $A - \lambda E$, 2) решение уравнения $|A - \lambda E| = 0$ (эти два действия нужны для нахождения собственных значений матрицы A), 3) решение систем линейных уравнений (для нахождения собственных векторов этой матрицы), 4) применение процесса ортогонализации Грама–Шмидта (для получения ортонормированного базиса из собственных векторов). Итак, метод приведения формы к главным осям намного более трудоемок, чем метод Лагранжа, особенно, если число переменных велико.

Вывод: при решении задач метод приведения к главным осям надо применять только тогда, когда без этого обойтись нельзя, – например, при упрощении уравнения второго порядка.

Ранг формы

Из одной и той же квадратичной формы с помощью различных невырожденных линейных замен переменных можно получить много форм канонического вида. Что общего у этих форм?

Вспомним, что если к квадратичной форме $q = X^T AX$ применить замену переменных $X = BY$, получится квадратичная форма с матрицей $B^T AB$. Ранг матрицы не меняется при умножении справа или слева на невырожденную матрицу, поэтому ранг $B^T AB$ равен рангу A. Когда форма приведена к каноническому виду, матрица диагональна, а ранг диагональной матрицы равен числу ненулевых диагональных элементов, т.е. числу ненулевых слагаемых в каноническом виде. Таким образом, *число ненулевых слагаемых в каноническом виде не зависит от способа приведения формы к каноническому виду*. Этот инвариант называют *рангом формы*.

Для полей, в которых из каждого элемента можно извлечь квадратный корень, например, для поля $\mathbb{C}$, ранг формы – это единственный инвариант, т.е. любые две квадратичные формы одинакового ранга можно перевести друг в друга подходящей линейной невырожденной заменой переменных (*докажите это!*).

Как обстоит дело для форм на полем $\mathbb{R}$?

Теорема (закон инерции квадратичных форм, Сильвестр, 1852)

Если квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ невырожденными линейными заменами переменных приведена к двум формам в каноническом виде, то полученные формы имеют одинаковое число положительных коэффициентов и одинаковое число отрицательных коэффициентов.

Доказательство. Пусть форма $h = h(x_1, \ldots, x_n)$ приводится к каноническому виду

$$f := t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \cdots + t_k y_k^2 - t_{k+1} y_{k+1}^2 - t_{k+2} y_{k+2}^2 - \cdots - t_{k+\ell} y_{k+\ell}^2,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{k+\ell} > 0$, и к каноническому виду

$$g := s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \cdots + s_p z_p^2 - s_{p+1} z_{p+1}^2 - s_{p+2} z_{p+2}^2 - \cdots - s_{p+q} z_{p+q}^2,$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_{p+q} > 0$. Имеем $k + \ell = p + q$, так как обе суммы равны рангу исходной формы h. Докажем, что $k = p$; тогда и $\ell = q$. Пусть $k \neq p$. В силу симметрии можно считать, что $k < p$.

Есть линейная невырожденная замена переменных, которая приводит форму f к виду g (это композиция замены, обратной той, что приводит h к виду f, с заменой, которая приводит h к виду g).

Рассмотрим эту замену:

$$\begin{cases} y_1 = d_{11}z_1 + d_{12}z_2 + \cdots + d_{1n}z_n, \\ y_2 = d_{21}z_1 + d_{22}z_2 + \cdots + d_{2n}z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = d_{n1}z_1 + d_{n2}z_2 + \cdots + d_{nn}z_n \end{cases}$$

и подставим в f вместо $y_1, \dots, y_n$ их выражения через $z_1, \dots, z_n$. Получим тождество

$$t_1y_1^2 + t_2y_2^2 + \cdots + t_ky_k^2 - t_{k+1}y_{k+1}^2 - t_{k+2}y_{k+2}^2 - \cdots - t_{k+\ell}y_{k+\ell}^2 = \\ = s_1z_1^2 + s_2z_2^2 + \cdots + s_pz_p^2 - s_{p+1}z_{p+1}^2 - s_{p+2}z_{p+2}^2 - \cdots - s_{p+q}z_{p+q}^2.$$

Его можно переписать так:

$$t_1y_1^2 + t_2y_2^2 + \cdots + t_ky_k^2 + s_{p+1}z_{p+1}^2 + s_{p+2}z_{p+2}^2 + \cdots + s_{p+q}z_{p+q}^2 = \\ = s_1z_1^2 + s_2z_2^2 + \cdots + s_pz_p^2 + t_{k+1}y_{k+1}^2 + t_{k+2}y_{k+2}^2 + \cdots + t_{k+\ell}y_{k+\ell}^2. \quad (1)$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \cdots = z_n = 0.$$

Вот та же система в развернутом виде:

$$\begin{cases} d_{11}z_1 + d_{12}z_2 + \cdots + d_{1n}z_n = 0, \\ d_{21}z_1 + d_{22}z_2 + \cdots + d_{2n}z_n = 0, \\ \dotfill \\ d_{k1}z_1 + d_{k2}z_2 + \cdots + d_{kn}z_n = 0, \\ z_{p+1} = 0, \\ z_{p+2} = 0, \\ \dotfill \\ z_n = 0. \end{cases}$$

Число уравнений в этой системе $k+n-p<n$, поскольку $k<p$. Поэтому система имеет ненулевое решение $(u_1,u_2,\dots,u_p,0,\dots,0)$. Подставляя его в тождество (1), получим равенство

$$0 = s_1u_1^2 + s_2u_2^2 + \cdots + s_pu_p^2 + t_{k+1}y_{k+1}^2 + t_{k+2}y_{k+2}^2 + \cdots + t_{k+\ell}y_{k+\ell}^2,$$

что невозможно, поскольку правая часть положительна. $\square$

Итак, число положительных слагаемых и число отрицательных слагаемых в каноническом виде действительной квадратичной формы – инварианты, а значит, инвариантом является и их разность, которая называется *сигнатурой* формы.

Пример: форма $x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 - x_5^2$ имеет ранг 5 и сигнатуру 1.

Следствие (классификация действительных квадратичных форм)

Две действительные квадратичные формы можно перевести друг в друга подходящей линейной невырожденной заменой переменных тогда и только тогда, когда у этих форм равны ранги и сигнатуры.

Доказательство. Необходимость следует из закона инерции.

Достаточность. Если ранги и сигнатуры форм f и g равны соответственно r и s, то число положительных коэффициентов в канонических видах этих форм равно $\frac{r+s}{2}$, а число отрицательных коэффициентов равно $\frac{r-s}{2}$. Обозначая $k := \frac{r+s}{2}$, $\ell = \frac{r-s}{2}$, запишем эти формы в каноническом виде:

$$f = t_1y_1^2 + t_2y_2^2 + \cdots + t_ky_k^2 - t_{k+1}y_{k+1}^2 - t_{k+2}y_{k+2}^2 - \cdots - t_{k+\ell}y_{k+\ell}^2,$$
$$g = p_1z_1^2 + p_2z_2^2 + \cdots + p_kz_k^2 - p_{k+1}z_{k+1}^2 - p_{k+2}z_{k+2}^2 - \cdots - p_{k+\ell}z_{k+\ell}^2,$$

где все коэффициенты $t_1, t_2, \dots, t_{k+\ell}, p_1, p_2, \dots, p_{k+\ell}$ положительны. Ясно, что линейная невырожденная замена переменных по правилу

$$y_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{p_i}{t_i}}z_i & \text{при } i \leq k+\ell, \\ z_i & \text{при } i > k+\ell \end{cases}$$ приводит форму f к виду g. $\square$

Классификация действительных квадратичных форм (2)

Каждая действительная квадратичная форма от n переменных определяет *псевдоевклидову геометрию* пространства $\mathbb{R}^n$.

Мы видим, что все такие геометрии определяются парой (ранг,сигнатура).

Обычная евклидова геометрия из осеннего семестра отвечает паре (n, n); соответствующая квадратичная форма – это $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

Еще одна важная геометрия – это *геометрия Минковского*, т.е. геометрия специальной теории относительности в $\mathbb{R}^4$, отвечающая паре (4,2).

Ее каноническая квадратичная форма $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.