

# Нормальные операторы

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Пусть  $V$  – пространство со скалярным произведением, а  $S$  – подпространство в  $V$ . Вспомним, что множество  $S^\perp$  всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из  $S$ , называется *ортогональным дополнением* подпространства  $S$ . Ортогональное дополнение подпространства само является подпространством и  $V = S \oplus S^\perp$ .

## Лемма 1

*Если  $V$  – пространство со скалярным произведением, а  $S$  – его подпространство, инвариантное относительно линейного оператора  $A: V \rightarrow V$ , то подпространство  $S^\perp$  инвариантно относительно сопряженного оператора  $A^*: V \rightarrow V$ .*

*Доказательство.* Возьмем произвольные вектора  $x \in S$  и  $y \in S^\perp$ . Имеем

$$\begin{aligned} xA^*y &= Axу && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } Ax \in S, \text{ а } y \in S^\perp. \end{aligned}$$

Итак, вектор  $A^*y$  ортогонален произвольному вектору  $x \in S$ , откуда  $A^*y \in S^\perp$ . □

## Определение

Линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ .

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ ) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ ). Сейчас займемся произвольными нормальными операторами.

## Лемма 2

Пусть  $x$  – собственный вектор нормального оператора  $\mathcal{A}$ , принадлежащий собственному значению  $\lambda$ . Тогда  $x$  является собственным вектором сопряженного оператора  $\mathcal{A}^*$ , принадлежащим собственному значению  $\bar{\lambda}$ .

*Доказательство.* Положим  $\mathcal{B} := \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  – тождественный оператор. Тогда  $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}$  и из  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$  следует, что

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}) = (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{B}^*\mathcal{B}.$$

Хотим доказать, что  $\mathcal{A}^*x = \bar{\lambda}x$ , т.е. что  $(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E})x = \mathcal{B}^*x = 0$ . Для этого достаточно убедиться, что  $\mathcal{B}^*x\mathcal{B}^*x = 0$ .

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\ &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda E)x = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

### Следствие

*Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

**Доказательство.** Пусть  $x$  и  $y$  – собственные вектора нормального оператора  $A$ , принадлежащие соответственно  $\lambda$  и  $\mu$ . Имеем

$$\lambda x y = A x y = x A^* y = x \bar{\mu} y = \mu x y \quad \text{т.е.} \quad (\lambda - \mu) x y = 0.$$

При  $\lambda \neq \mu$  отсюда следует  $x y = 0$ . □

## Теорема 1

*Линейный оператор  $A$  на унитарном пространстве  $V$  нормален тогда и только тогда, когда в  $V$  существует ортонормированный базис из собственных векторов  $A$ .*

*Доказательство. Необходимость.* Индукция по  $\dim V$  с очевидной базой.

При  $\dim V > 1$  возьмем собственный вектор  $x$  оператора  $A$ . Его орт  $e_1$  также будет собственным вектором для  $A$ , а по лемме 2  $e_1$  будет собственным вектором и для сопряженного оператора  $A^*$ .

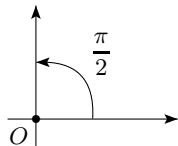
Подпространство  $S$ , натянутое на  $e_1$ , инвариантно относительно  $A$  и  $A^*$ . По лемме 1 ортогональное дополнение  $S^\perp$  также инвариантно относительно  $A$  и  $A^*$ . Понятно, что ограничения операторов  $A$  и  $A^*$  на  $S^\perp$  перестановочны между собой, в силу чего ограничение  $A$  на  $S^\perp$  – нормальный оператор. Поскольку  $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$ , по предположению индукции в  $S^\perp$  существует ортонормированный базис  $e_2, \dots, e_{\dim V}$  из собственных векторов ограничения  $A$  на  $S^\perp$ .

Добавив к нему вектор  $e_1$ , получим ортонормированный базис всего пространства  $V$ , состоящий из собственных векторов оператора  $A$ .

*Достаточность.* Матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора  $\mathcal{A}^*$  равна эрмитово сопряженной к  $A$  матрице  $A^* = \overline{A^T}$  и, следовательно, тоже диагональна. Поэтому  $AA^* = A^*A$ , так как диагональные матрицы перестановочны. Отсюда  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ , т.е.  $\mathcal{A}$  – нормальный оператор.  $\square$

Для нормального оператора евклидова пространства аналог теоремы 1 неверен, поскольку такой оператор может не иметь собственных векторов. Примером может служить оператор  $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$  поворота плоскости на угол  $\frac{\pi}{2}$ ,

матрица которого равна  $R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



Ее эрмитово сопряженная матрица есть попросту  $R^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  и легко подсчитать, что  $RR^T = R^T R = E$ . Поэтому оператор  $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$  нормален, но собственных векторов у  $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$  нет.

Несмотря на указанную трудность, структуру нормального оператора на евклидовом пространстве удастся полностью прояснить.

## Теорема 2

*Линейный оператор  $A$  на евклидовом пространстве  $V$  нормален тогда и только тогда, когда в  $V$  существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора  $A$  блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1, либо размера 2 и вида  $\rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ .*





*Необходимость.* Индукция по  $\dim V$  с очевидной базой.  
Пусть  $\dim V > 1$ . Рассмотрим два случая.

### Случай 1.

*У оператора  $\mathcal{A}$  есть действительное собственное значение.*

В этом случае проходят рассуждения из доказательства теоремы 1. Возьмем собственный вектор  $x$  оператора  $\mathcal{A}$ . Его орт  $e_1$  также будет собственным вектором для  $\mathcal{A}$ , а по лемме 2  $e_1$  будет собственным вектором и для сопряженного оператора  $\mathcal{A}^*$ . Подпространство  $S$ , натянутое на  $e_1$ , инвариантно относительно  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$ . По лемме 1 ортогональное дополнение  $S^\perp$  также инвариантно относительно  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$ . Понятно, что ограничения операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  на  $S^\perp$  перестановочны между собой, в силу чего ограничение  $\mathcal{A}$  на  $S^\perp$  – нормальный оператор. Поскольку  $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$ , по предположению индукции в  $S^\perp$  существует ортонормированный базис  $e_2, \dots, e_{\dim V}$ , в котором матрица  $A'$  ограничения  $\mathcal{A}$  на  $S^\perp$  имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Добавив к нему вектор  $e_1$ , получим ортонормированный базис всего пространства  $V$ . Матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе получается из  $A'$  добавлением одного блока размера 1.

## Случай 2.

*У оператора  $A$  нет действительных собственных значений.*

В этом случае характеристический многочлен оператора  $A$  разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом. Возьмём один из них и пусть  $\alpha = \sigma + \tau i$  и  $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$  – его корни. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис пространства  $V$  и запишем в нём матрицу  $A$  оператора  $A$ . Возьмем теперь унитарное пространство  $U$  размерности  $\dim V$ , зафиксируем в нём некоторый ортонормированный базис и определим на  $U$  линейный оператор  $A_{\mathbb{C}}$  с матрицей  $A$  (*комплексификация  $A$* ). Так как  $A$  – действительная матрица,  $A^* = A^T$ , а так как  $A$  – нормальный оператор,  $AA^T = A^T A$ . Закljučаем, что и  $A_{\mathbb{C}}$  – нормальный оператор. Отметим еще, что отождествляя зафиксированные базисы в  $V$  и  $U$ , можно считать, что  $V \subset U$ . При таком отождествлении  $A$  и  $A_{\mathbb{C}}$  действуют на  $V$  одинаково. Характеристические многочлены операторов  $A$  и  $A_{\mathbb{C}}$  совпадают, так что  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$  – собственные значения оператора  $A_{\mathbb{C}}$ . Если  $x$  – собственный вектор оператора  $A_{\mathbb{C}}$ , принадлежащий  $\alpha$ , то  $A[x] = \alpha[x]$ . Сопрягая это равенство, с учетом того, что  $A$  – действительная матрица, получаем  $A[\bar{x}] = \bar{\alpha}[\bar{x}]$ . Видим, что  $\bar{x}$  – собственный вектор оператора  $A_{\mathbb{C}}$ , принадлежащий  $\bar{\alpha}$ .

## Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ . Тогда  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$ . Выразив отсюда вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , получим:  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}}{2}$  и  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{2i}$ . Учитывая, что  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  действуют на  $V$  одинаково и  $\alpha = \sigma + \tau i$  и  $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$ , имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{a} &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{x} + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{x} + \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} + (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{b} &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{b} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{x} - \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}(\alpha\mathbf{x} - \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2i}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} - (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}\sigma(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Итак, подпространство  $S$  в  $V$ , натянутое на вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ . Из леммы 2 вытекает, что вектора  $\mathbf{x}$  и  $\bar{\mathbf{x}}$  – собственные для оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$  и принадлежат собственным значениям  $\bar{\alpha}$  и  $\alpha$  соответственно. Пользуясь этим легко проверить, что подпространство  $S$  инвариантно и относительно оператора  $\mathcal{A}^*$ .

По лемме 1 ортогональное дополнение  $S^\perp$  также инвариантно относительно  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$ . Понятно, что ограничения операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  на  $S^\perp$  перестановочны между собой, в силу чего ограничение  $\mathcal{A}$  на  $S^\perp$  – нормальный оператор. Поскольку  $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$ , по предположению индукции в  $S^\perp$  существует ортонормированный базис  $e_3, \dots, e_{\dim V}$ , в котором матрица ограничения  $\mathcal{A}$  на  $S^\perp$  имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Остается построить «правильный» ортонормированный базис в подпространстве  $S$ .

По следствию леммы 2 вектора  $x$  и  $\bar{x}$  ортогональны как собственные вектора нормального оператора  $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ , принадлежащие его различным собственным значениям  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} 0 = x\bar{x} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)(\mathbf{a} - \mathbf{b}i) = \mathbf{a}\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{b}i) + (\mathbf{b}i)\mathbf{a} - (\mathbf{b}i)(\mathbf{b}i) = \\ &= \mathbf{a}\mathbf{a} + i\mathbf{a}\mathbf{b} + i\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 + 2i\mathbf{a}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Закljučаем, что  $|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$  и  $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$ , т.е.  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$  и  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ . Поэтому орты  $e_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$  и  $e_2 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$  образуют ортонормированный базис в  $S$ .

Выше подсчитано, что  $\mathcal{A}a = \sigma a - \tau b$ , а  $\mathcal{A}b = \tau a + \sigma b$ . Разделив эти равенства на  $|a| = |b|$ , получим действие оператора  $\mathcal{A}$  на базис  $e_1, e_2$ :

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \sigma e_1 - \tau e_2, \\ \mathcal{A}e_2 = \tau e_1 + \sigma e_2. \end{cases} \quad \text{Итак, матрица ограничения оператора } \mathcal{A}$$

на подпространство  $S$  в базисе  $e_1, e_2$  равна  $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$ . Если записать

комплексное число  $\alpha = \sigma + \tau i$  в тригонометрической форме

$$\alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ то эта матрица запишется как } \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в точности в том виде, который указан в формулировке теоремы 2.

Итак, добавив к базису  $e_3, \dots, e_{\dim V}$  подпространства  $S^\perp$  вектора  $e_1$  и  $e_2$ , получим ортонормированный базис всего пространства  $V$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет требуемый вид.

**Достаточность.** Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию. Легко проверяется, что каждый блок блочно-диагональной матрицы из формулировки теоремы 2 перестановочен со своей транспонированной матрицей (*проверьте!*). □

Теорема о строении нормального оператора на евклидовом пространстве — еще один пример «100% действительного» факта, для **формулировки** которого комплексные числа не нужны, но **доказательство** которого использует комплексные числа.

Сравнение формулировок и особенно доказательств теорем 1 и 2 еще раз показывает, насколько комплексные числа лучше действительных!

