Сопряженный оператор

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F. Отображение $\Phi\colon V \to F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V – пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $\Phi\colon V \to F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это – так называемая *δ-функция Дирака*.)

Пример 3: На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ отображение, сопоставляющее многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, – линейный функционал.

Пример 4: На любом пространстве V отображение, сопоставляющее каждому вектору из V элемент $0 \in F$, – линейный функционал.

Определение

Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а V — векторное пространство над F. Отображение $V \times V \to F$, результат применения которого к паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ обозначается $\mathbf{xy}$, называется *скалярным произведением*, если:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{xy} = \overline{\mathbf{yx}}$;
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V\ \forall \alpha \in F \quad (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{xy})$;
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
4) $\forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{xx} \geqslant 0$, причем $\mathbf{xx} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*; пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$ называется *унитарным*.

Определение

Длина вектора $\mathbf{x}$ – это неотрицательное действительное число $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{xx}}$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V.
Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения*: если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Докажем *существование*.
Если $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$, то в роли $\mathbf{a}$ со свойством $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ годится вектор $\mathbf{0}$. Поэтому будем считать, что Φ принимает не только значение 0.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus (\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$, а одномерное подпространство $(\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$ порождается вектором $\mathbf{b}$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) + \Phi(\gamma\mathbf{b}) = \gamma\Phi(\mathbf{b}) = \gamma\beta,$$

поскольку $\Phi(\mathbf{c}) = 0$. С другой стороны,

$$\mathbf{xa} = (\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b})\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b} = \mathbf{c}\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b} + \gamma\mathbf{b}\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b} = \gamma\beta,$$

поскольку $\mathbf{cb} = 0$. $\square$

Заключительные замечания

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(f, g) := \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ функционал, сопоставляющий многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, представим как скалярное произведение многочлена f с многочленом 1. А вот функционал, сопоставляющий многочлену f его свободный член, в виде скалярного произведения представить нельзя; другими словами, нет такого многочлена g, что для любого многочлена f выполняется равенство $\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt = f(0)$. Попробуйте обосновать это утверждение!

Пусть $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ – линейный оператор пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 – свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ – через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}: V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ – линейный функционал на пространстве V_1. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathscr{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}} \\
&= (\mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{A}\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{в силу линейности } \mathscr{A} \\
&= \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} + \mathscr{A}\mathbf{y} \circ_2 \mathbf{r} && \text{свойство скалярного произведения} \\
&= \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) + \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\Phi_{\mathbf{r}}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ для любого $\lambda \in F$.

Построение сопряженного оператора. Ключевое тождество

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1. Это отображение называется *сопряженным оператором* к $\mathscr{A}$ и обозначается через $\mathscr{A}^*$.

Построение дает *ключевое тождество для сопряженного оператора*:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{$\dagger$}$$

Как мы увидим дальше, ключевое тождество – мощный и исключительно полезный инструмент. Именно оно применяется во всех рассмотрениях, связанных с сопряженными операторами; построение же нужно только для того, чтобы обосновать, что сопряженный оператор существует.

Замечание. Тождество $(\dagger)$ *однозначно определяет* сопряженный оператор, т.е. если для оператора $\mathscr{B}\colon V_2 \to V_1$ равенство $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{B}\mathbf{r}$ выполнено при всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{r} \in V_2$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}^*$.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{B}\mathbf{r}$ для всех $\mathbf{x}$, то $\mathscr{A}^*\mathbf{r} = \mathscr{B}\mathbf{r}$ (ослабленный закон сокращения). Это и означает, что $\mathscr{A}^* = \mathscr{B}$. $\square$

Линейность сопряженного оператора

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество (†) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{†}$$

Теорема (линейность сопряженного оператора)

Пусть $\mathscr{A} : V_1 \to V_2$ – линейный оператор пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженный оператор $\mathscr{A}^* : V_2 \to V_1$ линеен.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) &= \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} && \text{свойство скалярного произведения} \\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{q} && \text{тождество (†)} \\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{свойство скалярного произведения} \\
&= \mathbf{x}\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{тождество (†).}
\end{aligned}$$

Отсюда $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$ (ослабленный закон сокращения). Сходным образом проверяется, что $\mathscr{A}^*(\lambda\mathbf{p}) = \lambda\mathscr{A}^*\mathbf{p}$ для всех $\lambda \in F$. □

Укажем основные свойства взятия сопряженного оператора.

$\nabla 1$: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

$\nabla 2$: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

$\nabla 3$: $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

$\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Доказательство свойства $\nabla 1$. Заметим, что $(\mathscr{A}^*)^*$ отображает V_1 в V_2. Применяя тождество ($\dagger$) к оператору $\mathscr{A}^*$, получаем

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\left(\mathscr{A}^*\right)^*\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{p} \in V_2$ и $\mathbf{x} \in V_1$. С другой стороны,

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p}} \stackrel{(\dagger)}{=} \overline{\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p}} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}.$$

Итак, $\mathbf{p}\left(\mathscr{A}^*\right)^*\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$, откуда $\left(\mathscr{A}^*\right)^*\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x}$ (ослабленный закон сокращения). Это и означает, что $\left(\mathscr{A}^*\right)^* = \mathscr{A}$. $\square$

Свойства $\nabla 2$ и $\nabla 3$ докажите самостоятельно.

Обсудим свойство $\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. Здесь рассматриваются три векторных пространства V_1, V_2 и V_3, причем $\mathscr{A}$ – линейный оператор из V_2 в V_3, а $\mathscr{B}$ – линейный оператор из V_1 в V_2. Соответственно, $\mathscr{B}^*$ – оператор из V_2 в V_1, а $\mathscr{A}^*$ – оператор из V_3 в V_2.

Возьмем произвольные вектора $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{s} \in V_3$. Тогда

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s}.$$

С другой стороны,

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} = \mathscr{A}\,(\mathscr{B}\mathbf{x})\,\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathscr{B}\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}.$$

Итак, $\mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s} = \mathbf{x}\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}$ для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{s}$, откуда $(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s} = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}$ (ослабленный закон сокращения). Это и значит, что $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. $\square$

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – базис V_1, а $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ – базис V_2. Матрица линейного оператора $\mathscr{A} \colon V_1 \to V_2$ состоит из координат векторов $\mathscr{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, записанных по столбцам:

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{f}_j\}$ – ортонормированный, умножив справа на $\mathbf{f}_j$, получим

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\right)\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\mathbf{f}_j = \alpha_{ji}.$$

Оператор $\mathscr{A}^* \colon V_2 \to V_1$ – тоже линейный, и его матрица состоит из координат векторов $\mathscr{A}^*\mathbf{f}_1, \ldots, \mathscr{A}^*\mathbf{f}_n$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$:

$$\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{k} \beta_{\ell j}\mathbf{e}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ – ортонормированный, умножив слева на $\mathbf{e}_i$, получим

$$\mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i\left(\sum_{\ell=1}^{k} \beta_{\ell j}\mathbf{e}_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \overline{\beta_{\ell j}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_\ell = \overline{\beta_{ij}}.$$

Итак, если оба базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ ортонормированные, то

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \alpha_{ji} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \overline{\beta_{ij}}.$$

Но левые части этих равенств одинаковы в силу $(\dagger)$. Отсюда $\alpha_{ji} = \overline{\beta_{ij}}$. Это можно переписать как $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Мы видим, что матрица сопряженного оператора $\mathscr{A}^*$ получается, если матрицу исходного оператора $\mathscr{A}$ транспонировать и заменить каждый элемент его сопряженным. Матрица, получаемая из данной матрицы A транспонированием и заменой каждого элемента на сопряженный, называется *эрмитово сопряженной* к матрице A и обозначается через A^*: если $A = (a_{ij})_{k\times n}$, то $A^* := (\overline{a_{ji}})_{n\times k}$.

Итак, установлен следующий весьма полезный факт:

Предложение (матрица сопряженного оператора)

Если линейный оператор $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ имеет в ортонормированных базисах пространств V_1 и V_2 матрицу A, то сопряженный ему оператор $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ имеет в тех же базисах матрицу A^*.

Во всех рассмотрениях выше не исключался случай, когда пространства V_1 и V_2 – это одно и то же пространство V. В этом важном частном случае сопоставление каждому линейному оператору $\mathscr{A}\colon V \to V$ его сопряженного оператора становится дополнительной *унарной операцией* в кольце всех линейных операторов пространства V.

Наличие такой дополнительной операции позволяет:

- выделить важные типы линейных операторов – прежде всего, *самосопряженные* (когда $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$) и *унитарные/ортогональные* (когда $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^{-1}$);
- описать устройство произвольных линейных операторов пространств со скалярным произведением.